



Problèmes numériques

1. Le résultat du calcul $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx \right)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{\frac{1}{n^3}}$ est:

a) $\sqrt{e}$ b) $\sqrt[3]{e}$ c) ∞ d) nu există limita.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A^n a la forme:

a) $2^{n-1} \begin{pmatrix} -n+2 & -n \\ n & n+2 \end{pmatrix}$ b) $2^n \begin{pmatrix} -n+2 & -n \\ n & n+2 \end{pmatrix}$ c) A d) I_2 .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Le rang de la matrice $A^{2017} + A^{2018} + I_3$ est:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 2.

Problèmes de logique

1. Soit la rangée $(a_n)_{n \geq 1}$ avec $a_n = 3 + (-1)^n$. La valeur de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$ est:

a) 3 b) 4 c) 2 d) 5.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, où $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Par conséquent, A^{2014} a la forme:

a) εA b) $\varepsilon^2 A$ c) O_2 d) A .

3. On considère le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$. Pour toutes les valeurs entières des a, b et c ,

Δ est divisible par:

a) 5 b) 7 c) 6 d) 10.

Applications pratiques

1. Mihai, George et Andrei, qui se sont égarés à la montagne, doivent installer leur tente improvisée afin de passer la nuit et se protéger de la pluie. La base de la tente est un triangle équilatéral, et l'endroit qu'ils ont maintenant à leur disposition n'est pas du tout facile. En effet, c'est un casse tête : il est rocailleux et ils ne peuvent pas planter n'importe où les pieux qui aident à l'ancrage des coins.
- Mihai trouve un lopin herbeux et George découvre une langue de terre moins rocailleuse. Ils sortent tout de suite une feuille de papier et forment une esquisse: le point choisi par Mihai est représenté comme $M(0,2)$ et la langue de terre trouvée par George comme l'axe Ox d'un repère cartésien qu'ils ont conçu. Le moment où Mihai se tient exactement dans le point M et

Ensuite, ils placent verticalement les nombres dans une matrice à trois lignes. Maintenant, ils choisissent à codifier seulement les premières 15 lettres de ce message. La matrice obtenue est



$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$. Ils multiplient la matrice de codification A par la matrice obtenue:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 15 & 19 \\ 13 & 9 & 20 & 14 & 13 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 15 & 34 & 178 & 209 \\ 11 & 21 & 08 & 33 & 163 & 190 \\ 45 & 46 & 15 & 67 & 79 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{Z})$$

et ensuite divisent les 15 nombres obtenus par 29 et forment une nouvelle matrice seulement

avec les restes résultats: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix}$. Maintenant, en associant à chaque chiffre la lettre

correspondante, ils trouvent: $\begin{pmatrix} 5 & 28 & 5 & 4 & 6 \\ 25 & 21 & 4 & 18 & 16 \\ 16 & 17 & 15 & 9 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E & ? & E & D & F \\ Y & U & D & R & P \\ P & Q & O & I & U \end{pmatrix}$, et le message codifié est

EYP?UQEDODRIFPU.

Afin de décrypter un message, on dispose de même manière, verticalement, les nombres dans une matrice. Ensuite on détermine l'inverse de la matrice à codifier et on multiplie à la gauche par la matrice du message à décrypter.

Les valeurs de la matrice produit sont ensuite divisées par 29, en suivant la théorème de la division à reste ; (le dividende = le diviseur x le quotient + le reste, ou le reste est toujours est un nombre positif, strictement moindre que le diviseur !).

Maintenant, Mircea et Vlad vous présentent à crypter, en utilisant la même matrice de codification, les dernières neuf lettres du message et de décrypter le mot suivant, en 9 lettres : ANSK UKJJ. Les deux messages vont être:

a) UJGEKOKG , GEOMETRIE b) KVBJ!AFXE, PRIMAVARA c) UJGEKOKG , PRIMAVARA

d) KVBJ!AFXE, GEOMETRIE.



Problèmes numériques

- Le résultat du calcul $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2 \cdot x] + \dots + [14 \cdot x]}{x}$ est:
a) 105 b) 0 c) ∞ d) il n'y a pas aucune limite.
- La paire des nombres réels (x, y, z) pour laquelle il y a la somme $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & -2 & 0 \\ y & z & 2 \end{pmatrix}$,
 $A \in M_3(R)$ est:
a) (2, 4, 6) b) (6, 4, 2) c) (4, 6, 0) d) (4, 0, 6).
- Le résultat du calcul $\begin{vmatrix} 1 - 2^{2016} - 2016^2 & \sqrt{2016} & \sqrt{2016} \\ 2^{2016} & 1 - 2016^2 - \sqrt{2016} & 2^{2016} \\ 2016^2 & 2016^2 & 1 - 2^{2016} - \sqrt{2016} \end{vmatrix}$ est:
a) $(1 + 2^{2016} + 2016^2 + \sqrt{2016})^2$ b) $(1 - 2^{2016} - 2016^2 - \sqrt{2016})^2$ c) $2^{2016} \cdot 2016^2 \cdot \sqrt{2016}$ d) 0.

Problèmes de logique

- Les valeurs $a, b \in R$ de sorte que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - 2ax - 3b \right) = 1$ sont:
a) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ b) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$ c) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}$ d) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. Par conséquent $\sum_{k=1}^{2016} A^k$ est égale à:
a) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 4032 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2017} - 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2016 & 0 \\ 0 & 2^{2016} - 1 \end{pmatrix}$.
- Si $M = \sum_{a \in A} a^2$, où $A = \left\{ a \in R \mid B^* = B^{-1}, B = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -3 & 5 & -3 \\ -a & a & 0 \end{pmatrix} \right\}$, par conséquent
a) $M = 0$ b) $M = 2$ c) $M = 1$ d) $M = 4$.



Applications pratiques

1. Dans un bassin qui contient 10 litres d'eau à l'état pur on pompe d'eau saline qui a une concentration de 20 grammes pour un litre à une vitesse de 2 litres par minute. L'expression de la concentration du sel $C(t)$ (exprimée en g/l) après t minutes, et aussi la concentration du sel à long terme, respectivement $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$ seront :

$$a) C(t) = \frac{20t}{5+t}, \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 20 \quad b) C(t) = \frac{100t}{5+20t}, \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 5 \quad c) C(t) = \frac{10t}{1+20t}, \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{1}{2}$$

$$d) C(t) = \frac{20t}{1+10t}, \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 2.$$

2. Trois ouvriers ont réalisé ensemble 2064 pièces. Le premier a réalisé 140% de ce que la deuxième a réalisé, et 60% de ce que a réalisé le deuxième est avec 15% plus que 25% de ce que le troisième ouvrier a réalisé. Combien de pièces a réalisé le deuxième ouvrier ?

- a) 460 b) 644 c) 504 d) 960

2. André et Georges ouvrent un fast food pour commercialiser trois types de sandwich :

(1) avec du pain, du beurre et de la confiture, (2) avec du pain, du jambon et du fromage, et (3) avec du pain, du fromage et des sauces. A l'aube de chaque jour, André (A) et Georges (G) se proposent de vendre les trois types de sandwich en utilisant une

matrice M , $M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(2 \times 3)}(N)$. Chaque sandwich peut contenir des tranches

de pain (p), des cubes de beurre (u), des cuillerées de confiture (d), des tranches de jambon (s), des tranches de fromage (c), des cuillerées de sauce (m). Le nécessaire pour toutes ces choses est représenté dans une autre matrice,

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(3 \times 6)}(N). \text{ Afin de déterminer le nécessaire pour les}$$

sandwiches de la matrice M , Georges effectue le calcul suivant : $3(2) + 3(2) + 6(2) = 24$ tranches de pain (p), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cubes de beurre (u), $3(4) + 3(0) + 6(0) = 12$ cuillerées de confiture (d), et le résultat est noté dans une matrice



$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ G \end{matrix} & \begin{pmatrix} 24 & 16 & 16 & 15 & 22 & 6 \\ 24 & 12 & 129 & 30 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{(2 \times 6)}(N). \text{ Le coût des ingrédients utilisés est noté}$$

$$\text{dans la matrice } C = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & u & d & s & c & m \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 40 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 03 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 00 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} p \\ u \\ d \\ s \\ c \\ m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,15 \\ 0,10 \\ 0,30 \\ 0,25 \\ 0,12 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Cost} \\ \text{Cost} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1,24 \\ 1,64 \\ 1,84 \end{pmatrix} \end{matrix} = 2 \begin{pmatrix} 1,24 \\ 1,64 \\ 1,84 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, André et Georges veulent savoir quelle est la somme nécessaire pour préparer tous les sandwiches contenus dans la matrice M .

a) A = 18,46; G = 19,25 b) A = 17,60; G = 17,52 c) A = 18,46; G = 19,25 d) A = 16,50; G = 19.