

Club Animaths Lycée Schweitzer

Exercices tirés du concours Kömal proposés par l'UHA

Kömal est un concours Hongrois qui a débuté en 1893. Il s'agit d'une compétition annuelle de résolution de problèmes de mathématiques, de physique ou plus récemment d'informatique. Il y a plusieurs niveaux dans chaque matière. Le concours se déroule sur un an. Chaque mois une série de problèmes est publiée dans chaque matière et chaque niveau. Les candidats les résolvent chez eux et envoient leurs solutions le mois suivant. À la fin de l'année, des prix sont attribués aux meilleurs candidats.

Exercice 1 (Kömal)

Trouver les solutions réelles de l'équation

$$(1 - x + x^2)(1 - x + x^2 - \dots + x^{2k}) = (1 - x + x^2 - \dots + x^{k+1})^2$$

où k est un entier impair donné.

Exercice 2 (Kömal)

Définissons un coin comme la figure formée par trois cubes unités ayant deux à deux exactement une arête en commun.

- Combien y-t-il de coins dans un parallélépipède rectangle $4 \times 4 \times 2$ rempli de cubes unités ?
- Même question pour un parallélépipède rectangle $4 \times 4 \times 3$.

Exercice 3 (Kömal)

Des hexagones réguliers les plus petits possibles sont construits à partir de triangles équilatéraux de côté 1.

- Le premier de ces hexagones comporte 6 triangles le second 24. Combien en comporte le sixième ?
- Si on dispose de 2019 triangles, combien de triangles restera-t-il si on construit le plus grand hexagone possible avec ces triangles ?

Exercice 4 (Kömal)

Alice et Bernard jouent à colorier alternativement les arêtes d'un cube. À chaque coup le joueur doit colorier une arête qui n'est pas dans un même plan que l'arête qui vient d'être coloriée. Le joueur qui n'a plus de coup possible a perdu. Alice commence le jeu. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 5 (Kömal)

Chacun des nombres $1, 2, \dots, n$ est colorié en rouge ou en bleu. On change les couleurs de ces nombres par étape. À chaque étape, trois nombres distincts en progression arithmétique sont sélectionnés et la couleur de chacun des trois nombres est changée (rouge donne bleu et inversement). Pour quelles valeurs de n est-il possible de rendre tous les nombres rouges quelque soit les couleurs initiales des nombres, en appliquant une succession appropriée de telles étapes ?