Club Animaths Lycée Schweitzer, 2015-2016
Exercices proposés par l'UHA

SOMMES INFINIES

L'idée d'additionner une infinité de nombres est ancienne. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, on peut parfois additionner une infinité de nombres strictement positifs et obtenir un résultat fini.

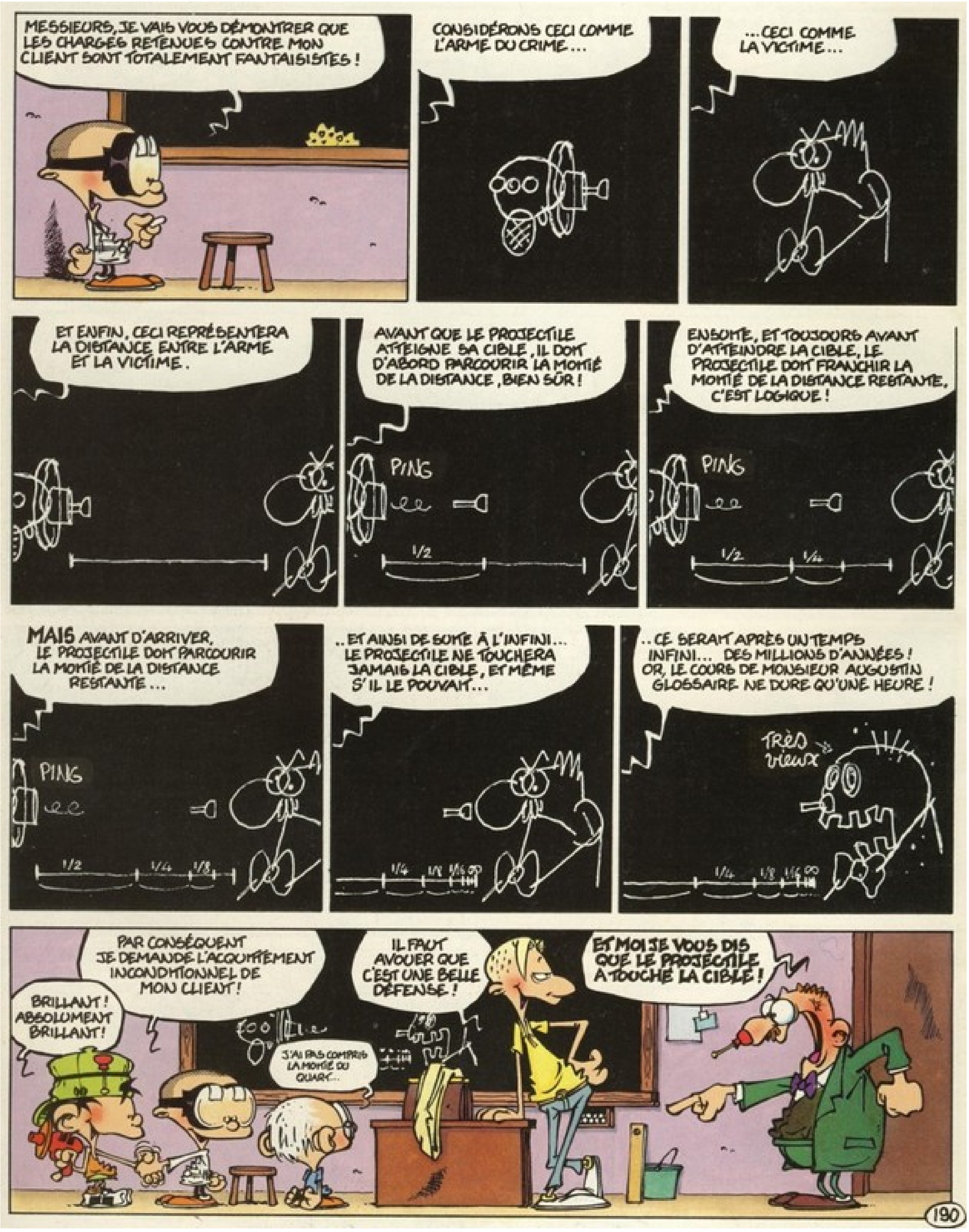
Cependant, qu'une somme de termes en nombre infini puisse donner un résultat fini intrigue depuis bien longtemps, au moins depuis Zénon d'Élée (vers 480-420 av. J.C.).

Les textes originaux de Zénon ne nous sont pas parvenus, mais nous connaissons quelques uns de ses fameux paradoxes, par la discussion qu'en a fait Aristote (384-322 av. J.C.) dans son livre « PHYSIQUE ». Voici comment Aristote énonce le paradoxe de dichotomie :

Si sur une grandeur d, on prend la moitié, puis la moitié de la moitié puis encore la moitié du reste, et ainsi de suite sans limitation de divisions, la grandeur obtenue en additionnant une moitié de chaque division successive (division appelée dichotomie) ne pourra jamais être égale exactement à la distance d. Avant d'arriver à son but, un mobile doit arriver à la moitié de son parcours. Mais auparavant, il doit arriver à la moitié de la moitié... Le mobile doit parcourir une quantité infinie d'unités d'espace. Il n'arrivera donc jamais à son but.

Les paradoxes de Zénon ont été abondamment discuté tout au long des siècles et jusqu'à aujourd'hui. On pourra trouver sur internet de nombreux liens sur cette question.

On trouvera même une version illustrée du paradoxe de la dichotomie de Zénon dans un volume de la série *Kid Paddle* de MIDAM, précisément, dans le Tome 5, intitulé *Alien chantilly* et qui a paru en 1999 (voir page suivante).


MESSIEURS, JE VAIS VOUS DÉMONTRER QUE LES CHARGES RETENUES CONTRE MON CLIENT SONT TOTALEMENT FANTAISISTES !
CONSIDÉRONS CECI COMME L'ARME DU CRIME...
...CECI COMME LA VICTIME...
ET ENFIN, CECI REPRÉSENTERA LA DISTANCE ENTRE L'ARME ET LA VICTIME.
AVANT QUE LE PROJECTILE ATTEIGNE SA CIBLE, IL DOIT D'ABORD PARCOURIR LA MOITIÉ DE LA DISTANCE, BIEN SÛR !
PING
1/2
ENSUITE, ET TOUJOURS AVANT D'ATTEINDRE LA CIBLE, LE PROJECTILE DOIT FRANCHIR LA MOITIÉ DE LA DISTANCE RESTANTE, C'EST LOGIQUE !
PING
1/2
1/4
MAIS AVANT D'ARRIVER, LE PROJECTILE DOIT PARCOURIR LA MOITIÉ DE LA DISTANCE RESTANTE...
PING
1/2
1/4
1/8
..ET AINSI DE SUITE À L'INFINI... LE PROJECTILE NE TOUCHERA JAMAIS LA CIBLE, ET MÊME S'IL LE POUVAIT...
1/4
1/8
1/16
∞
..CE SERAIT APRÈS UN TEMPS INFINI... DES MILLIONS D'ANNÉES ! OR, LE COURS DE MONSIEUR AUGUSTIN GLOSSAIRE NE DURE QU'UNE HEURE !
TRÈS VIEUX
1/4
1/8
1/16
∞
PAR CONSÉQUENT JE DEMANDE L'ACQUITTEMENT INCONDITIONNEL DE MON CLIENT !
BRILLANT ! ABSOLUMENT BRILLANT !
IL FAUT AVOUER QUE C'EST UNE BELLE DÉFENSE !
J'AI PAS COMPRIS LA MOITIÉ DU QUART...
ET MOI JE VOUS DIS QUE LE PROJECTILE A TOUCHÉ LA CIBLE !
190

1 Introduction

Comment définir la somme d'une infinité de nombres :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots ?$$

Le procédé naturel est de faire des sommes finies de plus en plus longues et de regarder comment cela évolue :

$$\begin{aligned}
&S_1 = x_1 \\
&S_2 = x_1 + x_2 \\
&S_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\
&S_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
&\ldots\ldots \\
&S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On regarde alors comment se comportent les sommes *partielles* S_n quand n devient grand ; autrement dit, on regarde la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$. Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la *série* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ est convergente et que sa somme est la valeur de cette limite.

Prenons comme exemple la série liée au paradoxe de Zénon :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

La somme partielle S_n s'écrit :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot$$

En multipliant par 2 cela donne :

$$2S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

et par soustraction, on obtient :

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 - \frac{1}{2^n}\cdot$$

D'où, $S_n \to 1$ quand $n \to +\infty$; on écrit alors :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

EXERCICE 1. — Calculer les sommes infinies :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}+\cdots$$

EXERCICE 2. — Que peut-on dire de la somme infinie : $1+1+1+1+\cdots+1+1+\cdots$?

Dans les exemples précédents, on voit qu'en additionnant une infinité de nombres x_n, on peut parfois obtenir un résultat fini. Lorsque c'est le cas, on remarque que les nombres en question deviennent de plus en plus petit quand n grandit. Autrement dit : $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 3. — Montrer que si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ possède une limite finie, alors $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Cependant, il ne suffit pas que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour obtenir une somme finie, comme le montre l'exemple de l'exercice 4 ci-dessous.

EXERCICE 4. — Pour $n \geq 1$, on pose : $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ et $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

1) Montrer que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2) Calculer S_n. Que peut-on en conclure ?

2 La série harmonique et la fourmi sur une route élastique

La *série harmonique* est la série :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Elle n'a pas une somme finie. Pour le voir, raisonnons par l'absurde et supposons que cette somme est finie et vaut S. Alors :

$$\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots \\
&\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots \\
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&= \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \frac{1}{2}+S
\end{aligned}$$

ce qui est absurde. On dit que la série harmonique est *divergente*.

La divergence de la série harmonique est connue depuis le 14-ième siècle. La preuve en a été donnée par un français, du nom de Nicolas ORESME ; sa démonstration, de nature différente, repose essentiellement sur l'argument de la première question de l'exercice 5 ci-dessous.

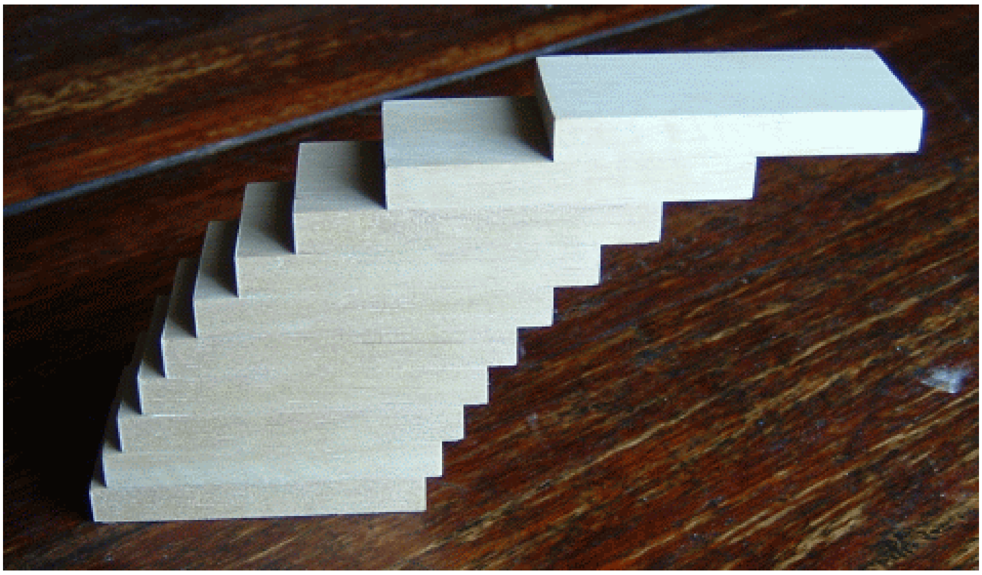
EXERCICE 5. — Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{H}_n$ la n-ième somme partielle de la série harmonique :

$$\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1) Montrer que $\mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n \geq \frac{1}{2}$ et en déduire que la série harmonique est divergente.

2) Montrer que la suite $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Justifier l'écriture :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty.$$



EXERCICE 6. — [UN SURPLOMB AUSSI GRAND QUE L'ON VEUT]

On souhaite construire une tour avec des dominos comme sur la figure ci-dessus. Les dimensions de chacun des dominos sont : 2ℓ, ℓ et h, où $\ell > 1$.

Si l'on dispose de $n+1$ dominos, on pose sur une table un domino (numéroté 0) puis on pose les suivants en les décalant vers la droite de la manière suivante :

— on décale le premier de $1/n$;
— on décale le deuxième de $1/n-1$;
— $\cdots$
— on décale le $(n-1)$-ième de $1/2$;
— on décale le n-ième de 1.

1) Expliquer pourquoi la tour ainsi construite ne s'écroule pas.

2) On note a_n l'avancée du surplomb obtenu, c'est-à-dire la distance entre le bord droit du domino posé sur la table et la projection (orthogonale) sur la table du bord droit du dernier domino. Montrer qu'on peut choisir n afin que a_n soit aussi grand que l'on veut.

EXERCICE 7. — [UNE FOURMI SUR UNE ROUTE ÉLASTIQUE]

Une fourmi décide de rendre visite à son amie la cigale. Pour ce long voyage, elle décide d'économiser ses forces et de ne marcher que le jour, de huit heures du matin à huit heures du soir. Elle a 10 mètres à parcourir et elle progresse à vitesse constante de 1 mètre par jour. Hélas, chaque nuit, un mauvais génie étire la route de manière *uniforme* de 10 mètres.

Ainsi, au soir du premier jour, la fourmi se trouve à un mètre de son point de départ et, au matin du deuxième jour, à deux mètres. Au matin du troisième jour (c'est-à-dire au bout de deux jours et deux nuits de voyage) elle se trouve à 4 mètres et demi du départ, mais la route mesure désormais 30 mètres. La question que l'on se pose est de savoir si la fourmi arrivera un jour chez la cigale...

1) Quelle est la longueur de la route au matin du n-ième jour ?

2) On note u_n la distance parcourue par la fourmi au soir du n-ième jour.

   (a) Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\frac{u_n}{n} - \frac{u_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

   En déduire que $u_n \geq n\mathcal{H}_n$.

3) Conclure.

3 Le problème de Bâle

Le problème du calcul de la somme de la série des inverses des carrés des entiers naturels non nuls

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

a été posé par Pietro Mengoli en 1644. Ce problème (communément appelé *problème de Bâle* et connu aussi sous le nom de *problème de Mengoli*) résista à bien des mathématiciens éminents de l'époque, comme Leibniz, les frères Bernoulli, Stirling ou De Moivre. Il fût résolu par le célèbre mathématicien suisse Leonhard Euler, dont Bâle était la ville natale. L'annonce de cette découverte en 1735 apporta à Euler une notoriété immédiate. Il était alors âgé de 28 ans.

La démonstration de 1735 d'Euler n'était pas totalement rigoureuse, en ce sens qu'il écrivit la fonction sinus comme un produit infini, sans justifier la validité de son égalité. Dix années plus tard, Euler donna une démonstration rigoureuse de son résultat.

On trouve dans la littérature plusieurs méthodes de nature différente pour calculer la somme de cette série. Aucune d'entre elles n'est réellement facile. Un article de Robin Chapman présente 14 démonstrations différentes permettant de calculer cette somme...

EXERCICE 8. — Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, \qquad S_n \leq \frac{33}{20} - \frac{2}{2n+1}.$$

2) En déduire que la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ est convergente.

3) On note S sa somme ; calculer S_{11} et en déduire un encadrement de S à 10^{-1} près.

4) Chercher sur le net ou ailleurs la valeur exacte de S.

4 La série harmonique alternée

La série harmonique *alternée* est la série suivante :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

ou si l'on veut bien mettre en évidence que c'est une somme :

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \left(-\frac{1}{2n}\right) + \cdots$$

Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{A}_n$ la somme partielle :

$$\mathcal{A}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, on a donc :

$$\mathcal{A}_{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$$

$$\mathcal{A}_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

EXERCICE 9. — [LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE EST CONVERGENTE]

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a : $0 < \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k^2}$.

2) Montrer que la suite $(\mathcal{A}_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante, puis en utilisant l'exercice 8, qu'elle est majorée.

3) Que peut-on dire de la suite $(\mathcal{A}_{2n-1})_{n\geq 1}$? Conclure.

Si l'on connait la fonction *logarithme*, on peut montrer que la somme de la série harmonique alternée est égale à $\ln 2$:

EXERCICE 10. — [CALCUL DE LA SOMME DE LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE]

1) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
2) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $x_n = \mathcal{H}_n - \ln n$.
   (a) Pour $n \geq 2$, calculer : $x_n - x_{n-1}$. A l'aide de la 1ère question, en déduire que la suite (x_n) est décroissante.
   (b) Soit $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité de la 1ère question pour $x = 1/k$ pour tous les entiers $k \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $\mathcal{H}_n \geq \ln(n+1)$. En déduire que la suite (x_n) est convergente.
3) Soit $n \geq 1$. Montrer que : $\mathcal{A}_{2n} = \mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n$.
4) A l'aide la question précédente, exprimer $\mathcal{A}_{2n}$ en fonction de termes de la suite (x_n). En déduire la limite de la suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$.

Montrons qu'il peut se passer des choses étranges si l'on change l'*ordre* des termes de la série harmonique alternée.

La série suivante

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

s'obtient en modifiant l'ordre des termes de la série alternée. Regroupons les termes de cette série par paquets de 3 :

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots$$

Dans chaque paquet de trois termes, calculons la somme des deux premiers et factorisons par $\frac{1}{2}$:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

La série s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Sur cet exemple, on voit qu'en permutant les termes de la série initiale, on conserve la convergence, mais que l'on change la valeur de la somme.

Ce qui est remarquable, c'est que l'on peut permuter les termes de la série harmonique alternée afin d'obtenir une somme égale à n'importe quel nombre réel choisi à l'avance, ou même égale à $+\infty$ ou $-\infty$...

EXERCICE 11 . — [COMMENT AVOIR UNE SOMME ÉGALE À 1.34 ?]

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \qquad \text{et} \qquad v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

ont pour limite $+\infty$.

2) Donner des valeurs approchées des sommes :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{4}$$

— Que constate-t-on ?
— Ecrire les deux étapes suivantes.
— Comment poursuivre pour épuiser tous les termes de la série harmonique alternée et obtenir une somme égale à 1.34 ?
— Pourquoi est-on sûr d'y parvenir ?