Club Animath LAS Mulhouse, 2018-2019

Énoncés des problèmes

Problème 1. Déterminer tous les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers consécutifs. Pour commencer, on pourra répondre à la question beaucoup plus facile : quels sont les entiers qui sont la somme d'exactement deux entiers consécutifs ?

Problème 2. Peut-on paver un carré 10×10 privé de la première case (en haut à gauche) et de la dernière case (en bas à droite) avec 49 rectangles 1×2 ? Peut-on paver un carré 10×10 avec 25 rectangles 1×4 ?

Problème 3. [Elisabeth Busser et Gilles Cohen, *Une affaire de logique*, Le Monde]

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or. Comme il fait nuit, ils conviennent ensemble d'attendre le lendemain matin pour se partager le butin. N'ayant aucune confiance en les deux autres pirates, l'un des pirates se lève sans bruit durant la nuit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Sainte Lucile, patronne des Pirates, et compte les pièces restantes. Il se trouve qu'il peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche sa part et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario ; à chaque fois le reste se partage en trois parts égales. Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Sainte Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales. Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Problème 4. [Perfect Triangles, Univ. Georgia]

Déterminer tous les triangles dont les longueurs de côtés sont des entiers et dont l'aire est égale au périmètre. On pourra chercher sur internet des formules donnant l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés.

Problème 5. On a un tas de 25 cailloux. On le partage en deux tas et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. À l'étape suivante, on divise en deux un des tas obtenus (on obtient donc trois tas) et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. On continue ainsi : à chaque étape, on divise en deux un des tas existants, et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. L'opération se termine quand on obtient 25 tas de 1 caillou chacun. Quelles sont les valeurs que peut prendre la somme de tous les nombres notés au tableau ?

Problème 6. [S. Barr, A Miscellany of Puzzles]

On se donne un rectangle 1×3. Découpez-le en deux parties identiques de telle sorte qu'en pliant et recollant les deux morceaux, on puisse obtenir un cube (comme pour un patron habituel, il ne doit y avoir ni trous ni superposition). En guise d'échauffement, on pourra commencer par faire l'exercice avec un rectangle 2×3 au lieu de 1×3.

./.

Problème 7. Par hasard dans la rue, je rencontre un ami que je n'ai pas vu depuis l'enfance, et qui m'annonce : « J'ai trois enfants et je vais te faire deviner leurs âges. Le produit de ces trois âges (tous des nombres entiers) est égal à 36 et la somme est le numéro que tu vois sur l'immeuble en face ». Je regarde ce numéro, réfléchis et lui réponds : « Désolé, je ne peux pas trouver ». Il précise : « J'ai oublié de dire que l'aîné aime les glaces à la vanille ! ». Quels sont ces âges ?

Problème 8. Un *tétramino* est une figure géométrique composée de quatre carrés identiques, chaque carré ayant au moins un côté commun avec un autre. Combien de modèles différents de tétraminos existe-t-il ? (à position dans le plan près, éventuellement en le retournant)

Si l'on dispose d'un jeu complet de tétraminos (i.e. un exemplaire de chaque modèle), peut-on paver un rectangle en utilisant tous les tétraminos ?

Prolongements possibles :

a. Avec quels tétraminos peut-on paver le plan ? (en n'utilisant qu'un modèle de tétramino).

b. Avec quels tétraminos peut-on paver un rectangle ? (toujours un seul modèle).

c. Combien y a-t-il de pentaminos (cinq carrés au lieu de quatre) ?

d. Un jeu complet de pentaminos peut-il paver un rectangle ? (difficile)

e. Avec quels pentaminos peut-on paver le plan ? un rectangle ? (toujours un seul modèle).

Problème 9. Trouver tous les nombres premiers p, q, r tels que p divise $qr+1$, q divise $rp+1$ et r divise $pq+1$ (on rappelle que 1 n'est pas un nombre premier).

Problème 10. Un chasseur d'ours établit son campement puis part à la chasse. Il parcourt dix kilomètres vers le nord puis, ne trouvant rien, décide de changer de cap et parcourt dix kilomètres vers l'est. Là, le chasseur trouve un ours, le tue, puis rentre à son campement, parcourant à nouveau dix kilomètres, cette fois-ci vers le sud. De quelle couleur est l'ours ?

Problème 11. Quarante-quatre arbres sont plantés autour d'un étang. Sur chacun des arbres il y a au départ exactement un moineau. De temps en temps deux moineaux changent simultanément leurs positions : un moineau se déplace sur l'arbre voisin dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre se déplace sur l'arbre voisin dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les moineaux peuvent-ils se retrouver tous sur un même arbre ?

Problème 12. On a un billard carré de 1 mètre de côté. Trouvez le nombre de trajectoires qui mènent d'un coin donné à un autre coin du billard (éventuellement le même coin) et qui ont une longueur inférieure ou égale à 6 mètres. On admet que la boule de billard est un point et que le billard ne permet pas de donner de l'effet à la boule.