Énoncés des problèmes

Nouveaux exercices

Problème 1. Une compétition d'escargots réunit 25 escargots. La piste ne peut recevoir que 5 escargots à la fois et on n'a pas de chronomètre. Comme départager le quinté dans l'ordre (les 5 plus rapides) en un minimum de courses ?

Chaque escargot refera exactement le même temps à chaque course et tous les escargots ont des vitesses différentes.

Problème 2. Un mulot au milieu d'une mare circulaire aimerait échapper à un renard qui l'attend au bord. Le renard n'aime pas l'eau et ne se déplace que sur le bord de la mare. Le mulot nage 4 fois moins vite que ne court le renard mais il court plus vite que le renard. Pourra-t-il s'échapper ?

En fait il y a un rapport critique c des vitesses $\frac{V(\text{renard})}{V(\text{mulot})}$ qui est tel que, si $\frac{V(\text{renard})}{V(\text{mulot})} < c$ alors le mulot peut s'échapper et si $\frac{V(\text{renard})}{V(\text{mulot})} > c$ il ne peut pas. La question posée est donc : c est-il supérieur ou inférieur à 4 ? La deuxième question est : que vaut ce rapport critique c ?

Problème 3. On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. A-t-on plus de chance d'obtenir une "couleur" (toutes les cartes de la même couleur pique, coeur, carreau ou trèfle) ou un "full" (trois cartes d'une même hauteur + deux cartes d'une même hauteur) ?

Exercices de l'an dernier

Problème 4. [Perfect Triangles, Univ. Georgia]

Déterminer tous les triangles dont les longueurs des côtés sont des entiers et dont l'aire est égale au périmètre. On pourra chercher sur internet des formules donnant l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés.

Indications. Si vous êtes gênés par le fait qu'une aire puisse être "égale" à un périmètre, on pourra choisir une unité de longueur, par exemple le centimètre. Chaque côté doit avoir comme longueur un nombre entier de côtés, et si le périmètre est n cm alors l'aire doit être n cm^2.

Pour l'aire, il faut utiliser la formule de Héron, qu'on trouve facilement sur Wikipédia. Elle fait intervenir le *demi-périmètre* $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Le meilleur point de vue est de faire intervenir le cercle inscrit et les points de contact de ce cercle avec le bord du triangle, puis de découper en deux chacun des côtés du triangle à l'aide de ces points de contact. Les côtés du triangle sont alors de la forme $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, et le demi-périmètre est $p = x + y + z$, où x, y, z sont les distances des sommets du triangle aux points de contact. Les calculs sont bien plus agéables dans les variables x, y, z que dans les variables a, b, c.

Problème 5. On a un tas de 25 cailloux. On le partage en deux tas et on note sur le tableau le produit des nombres de cailloux dans les deux tas obtenus. À l'étape suivante, on divise en deux un des tas obtenus (on obtient donc trois tas) et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. On continue ainsi : à chaque étape, on divise en deux un des tas existants, et on note au tableau le produit des nombres de cailloux des deux nouveaux tas. L'opération se termine quand on obtient 25 tas de 1 caillou chacun. Quelles sont les valeurs que peut prendre la somme de tous les nombres notés au tableau ?

Problème 6. [S. Barr, A Miscellany of Puzzles]

On se donne un rectangle 1×3. Découpez-le en deux parties identiques de telle sorte qu'en pliant et recollant les deux morceaux, on puisse obtenir un cube (comme pour un patron habituel, il ne doit y avoir ni trous ni superposition). En guise d'échauffement, on pourra commencer par faire l'exercice avec un rectangle 2×3 au lieu de 1×3.

Problème 7. Un *pentamino* est une figure géométrique d'un seul tenant composée de cinq carrés identiques, chaque carré ayant au moins un côté commun avec un autre.

a. Combien de modèles différents de pentaminos existe-t-il ? (à déplacement dans le plan près, éventuellement en le retournant)

b. Si l'on dispose d'un jeu complet de tétraminos (i.e. un exemplaire de chaque modèle), peut-on paver un rectangle en utilisant tous les tétraminos ?

c. Avec quels pentaminos peut-on paver le plan ? (en n'utilisant qu'un modèle de tétramino).

d. Avec quels pentaminos peut-on paver un rectangle ? (toujours un seul modèle).

Problème 8. Chacun des nombres $1, 2, \ldots, n$ est colorié en rouge ou en bleu. On change les couleurs de ces nombres par étape. À chaque étape, trois nombres distincts en progression arithmétique sont sélectionnés et la couleur de chacun des trois nombres est changée (rouge donne bleu et inversement). Pour quelles valeurs de n est-il possible de rendre tous les nombres rouges quelque soit les couleurs initiales des nombres, en appliquant une succession appropriée de telles étapes ?