

Club Animaths Lycée Schweitzer
Exercices proposés par l'UHA
Janvier 2017

Exercice 1 (tiré d'un livre russe). Une équipe de faucheurs doit faucher deux prés dont l'un est deux fois plus grand que l'autre. La première demi-journée, ils fauchent tous ensemble une partie du grand pré, la deuxième demi-journée ils se divisent en deux groupes égaux. Le premier groupe finit de faucher le grand pré et le second groupe fauche une partie du petit pré. Le lendemain, un faucheur met toute la journée pour finir le petit pré. Combien y a-t-il de faucheurs ?

Hypothèse implicite : tous les faucheurs fauchent à la même vitesse qui est constante au cours du temps.

Exercice 2 Un groupe de n joueurs de tennis se réunit et décide d'organiser une coupe pour déterminer le meilleur d'entre eux. Il procède de la manière suivante :

- si n est pair, un tirage au sort détermine les $\frac{n}{2}$ matches à jouer, les vainqueurs de ces matches sont qualifiés pour le tour suivant,
- si n est impair, un joueur est qualifié d'office pour le tour suivant par un tirage au sort ce qui ramène au cas n pair,
- à chaque tour de la coupe, on procède de la même manière avec le groupe des joueurs qualifiés,
- le vainqueur est celui qui aura gagné la "finale".

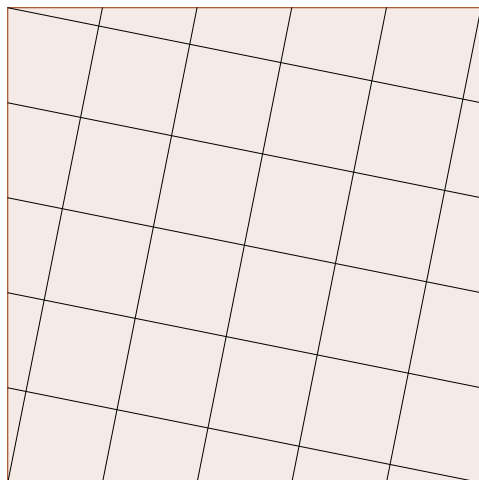
Déterminer en fonction de n le nombre total de matches qui aura lieu pendant la coupe.

Exercice 3 (tiré d'un concours allemand). Avec son épée reçue de la dame du lac, Sir Robin veut délivrer du dragon la ville d'Agnor. Le dragon a trois têtes et trois queues. Pour le tuer il doit couper toutes les têtes et toutes les queues. D'un coup d'épée, il peut couper une ou deux têtes, ou une ou deux queues. S'il coupe une tête, trois nouvelles têtes repoussent. S'il coupe deux têtes, rien ne repousse. S'il coupe une queue, deux queues repoussent. S'il coupe deux queues, une tête repousse. Quel est le nombre minimum de coups d'épée nécessaire pour tuer le dragon.

Exercice 4 (tiré du même livre russe). Deux bergers possèdent ensemble un troupeau de boeufs. Ils décident de se séparer et vendent chaque boeuf autant de roubles qu'il y a de boeufs. Avec l'argent reçu ils achètent des moutons à 10 roubles le mouton, et un agneau un nombre entier de roubles. Ils partagent les moutons. Un des bergers prend un mouton de plus que l'autre qui prend l'agneau. Pour que le partage soit équitable celui qui a le mouton supplémentaire donne sa blague à tabac à celui qui a pris l'agneau. Ils sont alors quittes. Combien coûte la blague à tabac ?

Exercice 5 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ qui sont sommes d'au moins deux entiers consécutifs.

Exercice 6 Un ensemble est constitué de dix nombres distincts à deux chiffres. Montrer que cet ensemble contient deux sous-ensembles disjoints non vides dont les sommes des éléments sont égales.



Exercice 7 (Concours hongrois Kömal). Chaque côté d'un carré est divisé en n segments égaux. Les extrémités des segments d'un côté sont jointes aux extrémités du côté opposé avec un décalage comme montré sur la figure. On obtient ainsi un puzzle. Montrer qu'il est possible de réarranger les pièces du puzzle pour obtenir $n^2 + 1$ carrés égaux.

Exercice 8 On considère deux entiers a et b et le rectangle R du plan dont les sommets ont pour coordonnées $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) et $(0, b)$. Trouver un chemin du plan de longueur minimale passant par tous les points à coordonnées entières du rectangle R et revenant au point de départ. Les points à coordonnées entières du rectangle R sont tous les points de coordonnées (m, n) où $m \in \{0, 1, \dots, a\}$ et $n \in \{0, 1, \dots, b\}$. Justifier que votre chemin est bien de longueur minimale.

Exercice 9 Montrer qu'étant donnés k chiffres $a_1, \dots, a_k$, il existe un entier n dont la partie fractionnaire de la racine carrée ait une écriture décimale commençant par $0, a_1 a_2 \dots a_k$.

Exercice 10 (Concours hongrois Kömal) Résoudre le système d'équation

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \end{cases}.$$

Exercice 11 Les aiguilles des heures et des minutes d'une horloge sont indistinguables et il n'y a pas d'aiguille des secondes. Combien y a-t-il d'instantants entre midi et minuit tels qu'il soit impossible de dire l'heure en regardant l'horloge à ces instantants ?

Exercice 12 Un puzzle "standart du commerce" contient le même nombre de pièces internes que de pièces du bord. Quelles sont les valeurs possibles du nombre de pièces ?