Club Animaths Lycée Schweitzer, 2017-2018
Exercices proposés par l'UHA
PROBLÈMES DE CHAPEAUX

Une première catégorie de problèmes est la suivante : On dispose de chapeaux de deux couleurs différentes. N personnes reçoivent chacune un chapeau dont il ne connaît pas la couleur mais il voit la couleur de tous les autres (ou bien seulement certains voient la couleur d'une partie des chapeaux). En général, le problème est de trouver une stratégie qui permettra au plus grand nombre de trouver la couleur de son chapeau.

Suivant la difficulté recherchée pour le problème, il y a divers énoncés. En voici des exemples :

Exercice 1. *Les chapeaux noirs.* Deux chapeaux blancs, trois chapeaux noirs sont placés dans une même urne. Trois personnes tirent chacune un chapeau et se le mettent sur la tête, de sorte que chacune voit le chapeau des autres mais pas le sien. Le hasard veut qu'elles aient tiré toutes un chapeau noir. On leur pose alors la question suivante : « de quelle couleur est votre chapeau ? » La première dit : « je ne sais pas ». La deuxième : « je ne sais pas non plus. » Et la troisième dit fièrement : « Je sais, j'ai un chapeau noir ! ». La troisième personne peut-elle réellement deviner la couleur de son chapeau ou est-ce de l'intox ?

Exercice 2. Trois personnes sont placées en file indienne, sur la tête de chacun se trouve un chapeau tiré au hasard parmi deux chapeaux noirs et trois chapeaux blancs. Chacun voit les chapeaux des personnes qui se trouvent devant lui (le premier n'en voit aucun). On leur demande, sans se retourner de connaître la couleur de leur chapeau... Après quelques secondes de silence, la première personne prend la parole et devine correctement la couleur de son chapeau. Quelle est la couleur de son chapeau et comment a-t-elle fait ?

Exercice 3. Cent personnes sont placées en cercle de telle façon que chacun voit tous les autres, chacune a un chapeau jaune ou bleu. Personne ne peut voir la couleur de son propre chapeau, mais tout le monde voit les chapeaux des autres.

– une personne est désignée pour parler en premier, puis c'est le tour de la personne située à sa gauche, puis la personne suivante à gauche, et ainsi de suite . . .

– chaque personne dit « jaune » ou « bleu », les autres entendent ce qui est dit, mais personne ne peut donner d'autre information.

Les personnes peuvent élaborer une stratégie avant qu'on leur ait mis les chapeaux.
Trouver une stratégie qui donne au moins 99 réponses correctes.
La situation est étudiée avec prolongement jusqu'à une infinité de chapeaux et de couleurs sur http ://www.cmapx.polytechnique.fr/~benaych/benaych.chapeaux.pdf

Exercice 4. On prévient des prisonniers qu'on va leur attribuer à chacun (au hasard) soit un chapeau blanc soit un chapeau noir. On leur dit aussi qu'on les mettra en ligne devant la porte de sortie et qu'on les questionnera chacun leur tour, en partant du dernier pour arriver jusqu'au premier : si le prisonnier interrogé donne la couleur de son chapeau (qu'il ne voit pas bien entendu) on le libère. Chaque prisonnier entend les réponses et voit tous les chapeaux devant lui mais ne voit pas le sien, ni ceux derrière lui. On leur laisse du temps pour mettre au point une stratégie. Quelle est la stratégie à employer pour faire sortir le maximum de prisonniers ?

Exercice 5. Les jeux de chapeaux intéressent de nombreux mathématiciens, informaticiens, théoriciens du codage et même les médias !

Voici un jeu qui intéresse les informaticiens et théoriciens du codage :

Une équipe de n joueurs se présente (au moins 3 joueurs). On dispose de 2 couleurs de chapeaux différentes, disons ici Rouge et Bleu. On attribue à chaque joueur un chapeau en tirant à pile ou face sa couleur. Chaque membre de l'équipe voit le chapeau des autres mais pas le sien. Pendant tout le jeu, aucune communication n'est autorisée entre les différents joueurs, ils sont par la suite interrogés un par un sur la couleur de leur chapeau et doivent soit répondre une couleur soit « passer » ; les autres joueurs n'entendent pas la réponse.

L'équipe gagne si au moins une bonne réponse a été donnée et si aucune mauvaise réponse n'a été donnée (l'équipe gagne avec une bonne réponse et que des « passes » mais perd avec que des « passes »).

Les équipes sont autorisées à adopter une stratégie avant le début du jeu.

A première vue, on pourrait croire que la meilleure probabilité de gain est de $\frac{1}{2}$: en effet cela peut se produire si tous les joueurs répondent « je passe » sauf un qui répondra au hasard rouge ou bleu (il aura donc une chance sur deux de faire gagner son équipe !).

1. Proposer une stratégie donnant une probabilité de gagner de 75% pour une équipe de 3 joueurs.

2. (*Très difficile*) Montrer que l'on ne peut pas faire mieux.

3. Proposer une stratégie pour 4 joueurs avec 75% de chance de gain.

Le problème de la recherche de stratégies optimales peut se résoudre en utilisant les fameux codes correcteurs d'erreurs construit par Richard Hamming en 1940. Pour les entiers n de la forme $n = 2^m - 1$, les codes de Hamming fournissent une stratégie avec une probabilité de gain de $\frac{n}{n+1}$.

4. (*Très difficile.*) Pour $n = 7$, proposer une stratégie donnant une probabilité de gagner égale à 7/8.

Indication. Trouver un ensemble E de 16 mots de longueur 7 écrit avec les lettres R et B tels que tout mot m de longueur 7 écrit avec des R et des B :
il y a exactement un mot $w \in E$ qui diffère d'au plus une lettre avec m.
Utiliser E pour définir la stratégie.

Exercice 6. (*Difficile*) Un tyran retient 12 mathématiciens prisonniers. Il les soumet à une épreuve. Il affuble chaque mathématicien d'un chapeau sur lequel il écrit un numéro entre 1 et 12. Il peut utiliser plusieurs fois le même numéro. Chaque mathématicien voit tous les numéros des autres mais pas le sien. Le tyran interroge individuellement chaque mathématicien sur le numéro de son chapeau et si au moins un mathématicien le découvre ils sont tous libérés sinon ils sont tous exécutés. Avant de leur mettre les chapeaux, le tyran permet aux mathématiciens de se concerter pour élaborer une stratégie. Quelle est la stratégie choisie par les mathématiciens ?

Exercice 7. (*Très difficile*) n personnes laissent leur chapeau dans un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun ne reprenne son propre chapeau ?
Ce problème a de nombreux noms : problème des dérangements, problème des rencontres, problème de Montmort qui l'a popularisé en 1708, ...