$(1-x+x^2)\left(1-x+x^2-\cdots+x^{2k}\right)=(1-x+x^2-\cdots+x^{k+1})^2$ Avec k entier naturel impair et x réel

On pose $A=\left(1-x+x^2-\cdots+x^{2k}\right)=\sum_{i=0}^{2k}(-x)^i=\frac{1-(-x)^{2k+1}}{1+x}$

$$(1-x+x^2)*A=\frac{x^2-x+1-(-x)^{2k+1}-(-x)^{2k+2}-(-x)^{2k+3}}{x+1}$$

On pose $B=\left(1-x+x^2-\cdots+x^{k+1}\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-x)^i\right)^2=\left(\frac{1-(-x)^{k+2}}{1+x}\right)^2=\frac{1-2(-x)^{k+2}+(-x)^{2k+4}}{(x+1)^2}$

Donc $(1-x+x^2)\left(1-x+x^2-\cdots+x^{2k}\right)=(1-x+x^2-\cdots+x^{k+1})^2$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2-x+1-(-x)^{2k+1}-(-x)^{2k+2}-(-x)^{2k+3}}{x+1}=\frac{1-2(-x)^{k+2}+(-x)^{2k+4}}{(x+1)^2}$$

Les produits en croix sont égaux:

$(x^2-x+1-(-x)^{2k+1}-(-x)^{2k+2}-(-x)^{2k+3})*(x+1)=1-2(-x)^{k+2}+(-x)^{2k+4}$

Réduction du premier membre :

$$x^3-x^2+x+(-x)^{2k+2}+(-x)^{2k+3}+(-x)^{2k+4}+x^2-x+1-(-x)^{2k+1}-(-x)^{2k+2}-(-x)^{2k+3}$$

$$=x^3+1+(-x)^{2k+4}-(-x)^{2k+1}$$

Retour à l'équation : $x^3+1+(-x)^{2k+4}-(-x)^{2k+1}=1-2(-x)^{k+2}+(-x)^{2k+4}$

$$x^3-(-x)^{2k+1}+2(-x)^{k+2}=0$$

K est impair donc 2k+1 et k+2 sont impair donc $-(-x)^{2k+1}=x^{2k+1}$ et $2(-x)^{k+2}=-2*x^{k+2}$

$$x^3\left(1+x^{2k-2}-2x^{k-1}\right)=0$$

On reconait la 2eme identité remarquable: $x^3\left(1-x^{k-1}\right)^2=0$

$$x^3=0 \text{ ou } \left(1-x^{k-1}\right)^2=0$$

$$x=0 \text{ ou } x^{k-1}=1$$

K est impaire donc k-1 est pair donc si k≠1 alors x=1 ou x=-1 et si k=1 alors x ∈ R*

Etudions à part le cas de x=-1: $(1-x+x^2)\left(1-x+x^2-\cdots+x^{2k}\right)=(1-x+x^2-\cdots+x^{k+1})^2$

$$3\left(1(2k+1)\right)=(1(k+2))^2$$

$$6k+3=k^2+4k+4$$

$$k^2-2k+1=0$$

$$k=1$$