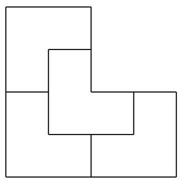
Puzzles auto-similaires

Augustin Fruchard

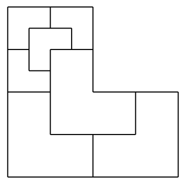
27 septembre 2017

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Un *puzzle auto-similaire à n pièces* (un PAS en abrégé, ou un n-PAS si on veut préciser le nombre de pièces) est une figure du plan qu'on peut découper en n pièces toutes semblables à la figure de départ. Ainsi on passe de la figure à l'une quelconque de ses pièces par une *similitude*, c'est-à-dire la composée d'une homothétie de rapport < 1 et d'une rotation ou d'une symétrie par rapport à une droite (on peut retourner les pièces).

Voici un exemple de PAS. Il en existe aussi qui sont fractales.



$n = 4$



$n = 7$

L'objet de ces exercices est d'explorer quelles sont les figures *convexes* du plan qui sont des PAS, et pour quels entiers n. Une figure est dite *convexe* si, dès que deux points sont dans la figure, tout le segment joignant ces points est dedans. Une autre façon de se représenter un convexe est de dire que son bord tourne toujours dans le même sens. L'exemple ci-dessus n'est donc pas convexe.

On peut remarquer que la propriété pour une figure d'être un n-PAS est conservée après une homothétie de la figure. C'est pourquoi, dans la suite, je dirai *le carré*, *le triangle équilatéral*, etc. pour désigner n'importe quel carré, triangle équilatéral, etc.

Le nombre d'étoiles indique la difficulté ; les plus faciles n'en ont pas. Il est donc recommandé de ne pas trop s'attarder aux exercices à deux ou trois étoiles en première lecture.

Exercice 1 — Donner un exemple de rectangle qui soit un n-PAS pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 2 — Pour quels entiers $n \geqslant 2$ le carré est-il un n-PAS ?

On trouve tous les entiers, sauf 2, 3 et 5.

Exercice 3 — Quels sont les triangles qui sont 2-PAS ? (*) et 3-PAS ?

Exercice 4 — Montrer que tout triangle est n-PAS pour tout n différent de 2, 3 et 5.

Exercice 5 — (**) Trouver un triangle non rectangle qui soit un 5-PAS.
(***) Démontrer que c'est le seul.

On peut montrer [4] qu'un PAS convexe est obligatoirement un polygone, c'est-à-dire dont le bord est une réunion finie de segments.

Exercice 6 — (**) Montrer qu'un polygone PAS a au plus 5 côtés.

On ne connaît pas de pentagone PAS, mais on sait que certaines classes de pentagones sont exclues [3]. On connaît aussi tous les 4-PAS [6].

Un PAS est dit *totalement irrégulier* (PASTI en abrégé) si toutes ses pièces sont de tailles différentes.

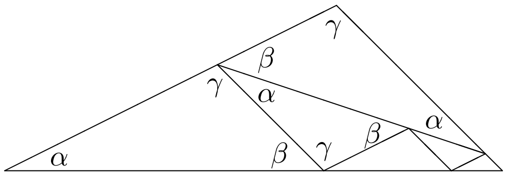
On a longtemps cru que le carré ne pouvait être un PASTI pour aucun entier n — on a même publié des articles contenant de fausses preuves — avant d'en découvrir, d'abord à la main pour $n = 55$, puis $n = 24$, et enfin grâce à l'ordinateur pour $n = 21$. On sait maintenant que 21 est le plus petit n tel que le carré soit un n-PASTI [1].

Exercice 7 — (**) Pour chaque $n \geqslant 3$, trouver un rectangle qui soit un n-PASTI.

Exercice 8 — Montrer que tout triangle rectangle non isocèle est un n-PASTI pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 9 — En examinant la figure ci-dessous, proposer une construction montrant que la plupart des triangles sont des 6-PASTI.

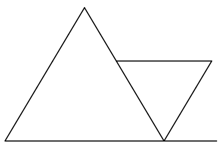
(*) Quels sont les triangles pour lesquels cette construction ne donne pas un 6-PASTI ? On trouve le triangle équilatéral et deux triangles isocèles, de longueurs de côtés respectivement $1, 1, q$ et $1, q, q$, où q est l'unique solution positive de l'équation $q + q^3 = 1$.



Exercice 10 — Proposer des constructions analogues montrant que tout triangle, sauf l'équilatéral et deux isocèles, est un 8-PASTI, idem pour $2n$-PASTI pour tout $n \geqslant 5$.

(*) En déduire que tout triangle, sauf l'équilatéral, est un PASTI.

Exercice 11 — (**) Démontrer que le triangle équilatéral n'est pas un PASTI, un résultat dû à Tutte [5]. Indication (inspirée de [2]) : montrer que la configuration ci-dessous (un triangle collé à un triangle plus petit, avec un sommet commun, et un segment prolongeant un côté du grand triangle à partir de ce sommet) existe nécessairement dans un découpage du triangle équilatéral, puis montrer par l'absurde qu'il ne peut pas y avoir une *plus petite* telle configuration.



Références

[1] C.J. Bouwkamp and A.J.W. Duijverstrijn, Catalogue of Simple Perfect Squared Squares of orders 21 through 25, EUT Report 92-WSK-03 Eindhoven, 1992.

[2] T. Chu, Dissecting the Equilateral Triangle into Non-Congruent Equilateral Triangles arXiv :1412.5431v1 [math.HO] 15 Dec 2014

[3] R. Ding, D. Schattschneider, T. Zamfirescu, Tiling the pentagon *Discrete Math.* 221 (2000) 113–124. www.elsevier.com/locate/disc

[4] M. Laczkovich, Decomposition of convex figures into similar pieces, *Discrete Comput. Geom.* 13 (1995) 143–148.

[5] W. T. Tutte, The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 44, (1948) 463–482.

[6] G. Valette, T. Zamfirescu, Les partages d'un polygone convexe en 4 polygones semblables au premier, *J. Combinatorial Theory*, Ser. B 16 (1974) 1–16.