Applications du théorème de Birkhoff aux fractions continues.

1 Ergodicité de la transformation $\{\frac{1}{x}\}$

Théorème 1 *L'application $T : x \in B \to \{\frac{1}{x}\}$ est ergodique pour la mesure de Lebesgue ou la mesure de Gauss $\mu = \frac{1}{\ln 2\,(1+x)}\,dx$.*

Démonstration. Utilisons la mesure de Lebesgue. Appelons $\mathcal{B}_n$ l'ensemble de tous les cylindres $B(a_1, ..., a_n)$de longueur n et $\mathcal{B} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{B}_n$. Comme le diamètre des cylindres tend vers 0 la tribu $\sigma(\mathcal{B})$ engendrée par $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de B. Soit A une partie de B invariante par T. Cherchons pour $x \in B(a_1, ..., a_n)$

$$\frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A(x)\,dx.$$

Comme $T^{-1}(A) = A$ on a $1_A = 1_A \circ T^n$ d'où

$$\frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A(x)\,dx = \frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A \circ T^n(x)\,dx.$$

Comme T^n est une bijection de $B(a_1, ..., a_n)$ sur B de réciproque $V(a_1, ..., a_n)$ on obtient avec le théorème du changement de variable

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A(x)\,dx &= \frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A \circ T^n(x)\,dx \\ &= \frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_B V'(a_1, ..., a_n)(x) \times 1_A \circ T^n \circ V(a_1, ..., a_n)(x)\,dx \\ &= \frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_B 1_A V'(a_1, ..., a_n)(x)\,dx.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{4q_n^2} \leq V'(a_1, ..., a_n)(x) \;\leq 4\frac{1}{q_n^2}$$

et

$$|B(a_1, ..., a_n)| = \int_B V'(a_1, ..., a_n)(x)\,dx \leq 4\frac{1}{q_n^2}$$

donc

$$\frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_B 1_A(x)V'(a_1, ..., a_n)(x)\,dx \geq \frac{q_n^2}{4}\int_B 1_A(x)\,\frac{1}{4q_n^2}dx \geq \frac{|A|}{16}.$$

D'après le théorème de densité de Lebesgue on a pour presque tout $x \in B$

$$\lim_{n\to\infty,\; x\in B(a_1,...,a_n)} \frac{1}{|B(a_1, ...a_n)|}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_A(x)\,dx = 1_A(x)$$

d'où $1_A(x) \geq \frac{|A|}{16}$ presque partout et $|A| = 0$ ou 1. $\square$

2 Théorème de Levy

Théorème 2 *Pour presque tout $\theta \in [0,1]$ on a* $\lim \frac{1}{n} \ln q_n = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$.

Démonstration. Remarquons que $\frac{1}{n} \ln q_n$ et $-\frac{1}{n} \ln r_n$ sont proches. En effet, $q_n r_{n-1} + q_{n-1} r_n = 1$ donc

$$\frac{1}{2} \leq q_n r_{n-1} \leq 1 \text{ et } \ln \frac{1}{2} \leq \ln q_n + \ln r_{n-1} \leq 0.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n}(-\ln 2 - \ln r_{n-1}) \leq \frac{1}{n} \ln q_n \leq -\frac{1}{n} \ln r_{n-1}.$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{1}{n} \ln r_n = -\frac{\pi^2}{12 \ln 2}$.
Pour $\theta \in [0,1[$ on a $\theta = r_0$ et $\theta_n = \frac{r_n}{r_{n-1}}$ pour $n \geq 1$ d'où $r_n = \theta_n \theta_{n-1} ... \theta_0 = T^n(\theta) T^{n-1}(\theta) .... T^0(\theta)$ et

$$\frac{1}{n} \ln r_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln T^k(\theta).$$

Appliquons le théorème de Birkhoff à $(B, T, \mu = \frac{dx}{(\ln 2)(1+x)})$ et à la fonction $f(x) = \ln x$. f est de sgn constant et

$$\int_{[0,1]} \frac{\ln x}{\ln 2\,(1+x)}\, dx = \int_{[0,1]} \frac{\ln x}{\ln 2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, dx.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} x^k \ln x \;\, dx &= [\ln x \times \frac{x^{k+1}}{k+1}]_0^1 - \int_{[0,1]} \frac{x^k}{(k+1)}\, dx \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} &= -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

donc

$$\int_{[0,1]} \frac{\ln x}{\ln 2\,(1+x)}\, dx = \int_{[0,1]} \frac{1}{\ln 2} \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Comme T est ergodique on obtient $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln T^k(\theta) = -\frac{\pi^2}{12}$ pour presque tout θ. □

Théorème 3 *de Khinchin. Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application.*
1. *Si $\sum_{n \geq 1} \phi(n) < +\infty$ alors pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ il existe au plus un nombre fini de $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\|qx\| \leq \phi(n)$.*
2. *Si les applications $\phi(x)$ et $x\phi(x)$ sont décroissantes et si $\sum_{n \geq 1} \phi(n) = +\infty$ alors pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ il existe une nombre infini de $q \in \mathbb{N}$ tels que $\|q\theta\| \leq \phi(n)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver le théorème pour $\theta \in [0,1[$. Le **1** résulte du lemme de Borel-Cantelli et du fait que l'application $T_q : x \in [0,1[\to \{qx\}$ conserve la mesure de Lebesgue. Prouvons **2** à l'aide des théorèemes de Borel-Bernstein et Levy.
D'après le théorème de Levy il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour presque tout $\theta \in [0,1[$ $q_n(\theta) \leq e^{An}$ pour n assez grand. Posons $f(x) = e^{Ax}\phi(e^{Ax})$. Par hypothèse f est décroissante donc

$$\sum_{n\geq 1} f(n) = \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)\,dt = \infty.$$

Or

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty e^{Ax}\phi(e^{Ax})\,dx = \frac{1}{A}\int_{e^A}^\infty \phi(t)\,dt = \infty$$

car ϕ est décroissante et $\sum_{n=1}^\infty \phi(n) = \infty$, donc pour presque $\theta \in [0,1[$ $a_{n+1}(\theta) \geq \frac{1}{f(n)}$ pour une infinité de n. Par conséquent pour presque tout θ il existe une infinité de n tels que

$$\|q_n\theta\| \leq \frac{1}{q_{n+1}} \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n} \leq \frac{f(n)}{q_n} = \frac{e^{An}\phi(e^{An})}{q_n} \leq \frac{q_n\phi(q_n)}{q_n} = \phi(q_n). \square$$

3 Comportement de $q_n \|q_n\theta\|$

3.1 Extension naturelle du développement en fraction continue

Soit S l'application définie sur $B \times B$ par

$$S(x,y) = (T(x), V(a_1(x))(y)).$$

S est une bijection de $B \times B$ sur lui-même de réciproque

$$S^{-1}(x,y) = (V(a_1(y))(x), T(y)).$$

Lemme 1 *La probabilité* $\mu = \frac{1}{\ln 2}\frac{dxdy}{(1+xy)^2}$ *est* S*-invariante.*

Démonstration. Comme S est un diffeomorphisme de $]0,1[^2 \backslash \{(x,y) : \frac{1}{y} \in \mathbb{N}^*\}$ sur $]0,1[^2 \backslash \{(x,y) : \frac{1}{x} \in \mathbb{N}^*\}$ il suffit de montrer que $JacS^{-1} \times f \circ S^{-1} = f$. Calculons le Jacobien de S^{-1}. On a $S^{-1}(x,y) = (\frac{1}{a_1+x}, \frac{1}{y} - a_1)$ où $a_1 = a_1(y)$. Par conséquent

$$Jac(S^{-1})(x,y) = \det\begin{pmatrix} \frac{-1}{(a_1+x)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(a_1+x)^2y^2}.$$

Avec $f(x,y) = \frac{1}{(1+xy)^2}$ on a

$$\begin{aligned} Jac(S^{-1})(x,y) \times f \circ S^{-1}(x,y) &= \frac{1}{(a_1+x)^2y^2} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{a_1+x}(\frac{1}{y}-a_1))^2} \\ &= \frac{1}{((a_1+x)y+1-a_1y)^2} = f(x,y). \square \end{aligned}$$

Lemme 2 *S est ergodique pour la mesure de Lebesgue ou la mesure μ.*

Démonstration. Comme S est bijective bimesurable et conserve μ on a pour tout $f \in L^1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^{-k}(x,y)$$

pour presque tout (x,y). On a $S^k(x,y) = (T^k(x), V(a_k(x),...,a_1(x))(y))$ donc si $y,y' \in B$ on a $\left|S^k(x,y) - S^k(x,y')\right| \to 0$ quand $k\to\infty$; par suite, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k(x,y) = l(x,y)$, alors pour tout $y' \in B$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k(x,y') = l(x,y)$ donc pour presque tout (x,y) la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k(x,y)$ converge vers une limite $l(x)$ qui dépend pas de y. De même avec S^{-1} on démontre que pour presque tout (x,y) la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^{-k}(x,y)$ converge vers une limite $l'(y)$ qui ne dépend pas de x. Par conséquent on $l(x) = l'(y)$ pour presque tout (x,y) et $l(x)$ et $l'(y)$ ne dépendent ni de x ni de y. Il résulte que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k(x,y)$ est presque surement constante et cette constante ne peut-être que la moyenne $M(f)$ de f sur $B\times B$. D'après le theorème de convergence dominée (ou Von Neuman) la convergence a aussi lieu dans L^1. La suite des applications linéaires $A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ S^k$ est bornée sur $L^1(\mu)$ et converge pour la norme $\| \|_1$ vers $M(f)$ sur un ensemble dense (les fcts continues) donc pour tout $f\in L^1$ $A_n f$ tend vers $M(f)$ dans L^1. Finalement si A est une partie S-invariante la fonction $f = 1_A$ est S-invariante et $A_n f = f$ pour tout n donc $f = cste$. $\square$

Remarque. On a utilisé le lemme suivant :

Lemme 3 *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, L, L' deux applications mesurables de $X\times X$ dans $\mathbb{R}$* ***et*** *l, l' deux applications mesurables de x dans $\mathbb{R}$. Si $L = L'$ presque partout $L = l\circ p_1$, presque partout et $L' = l'\circ p_2$ presuqe partout alors L est presque sûrement constante.*

3.2 Theorem de Bosma, Jager et Wiedijk (1983)

Théorème 4 *Pour $N\in\mathbb{N}$, $t\in[0,1]$ et $\theta\in B$ posons*

$$A(N,t,\theta) = \left|\{1\le n\le N : q_n r_n \le t\}\right|.$$

Alors pour presque tout $\theta\in B$ on a pour tout $t\in[0,1]$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A(N,t,\theta) = g(t)$$

où g est donnée par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{\ln 2} \; si\; t\in[0,\frac{1}{2}] \\ \frac{-t+\ln(2t)+1}{\ln 2} \; si\; t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}.$$

Démonstration. Il suffit de prouver que pour presque tout θ on a $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A(N,t,\theta) = g(t)$ pour les $t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ car les fonctions $g(t)$ et $\frac{1}{N}A(N,t,\theta)$ sont croissantes et la fonction g est continue.
Calculons $q_n r_n$ pour $\theta\in B\times B$. Nous avons

$$\theta = \frac{p_{n-1}T^n\theta + p_n}{q_{n-1}T^n\theta + q_n}$$

donc

$$\begin{aligned}
q_n r_n &= q_n \left|q_n\theta - p_n\right| = q_n \left| q_n \frac{p_{n-1}T^n\theta + p_n}{q_{n-1}T^n\theta + q_n} - p_n \right| \\
&= q_n \left| \frac{p_{n-1}T^n\theta + p_n}{\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1} - p_n \right| = q_n \left| \frac{p_{n-1}T^n\theta + p_n - p_n(\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1)}{\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1} \right| \\
&= q_n \left| \frac{p_{n-1}T^n\theta - p_n\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta}{\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1} \right| = \left| \frac{q_n p_{n-1}T^n\theta - p_n q_{n-1}T^n\theta}{\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1} \right| = \frac{T^n\theta}{\frac{q_{n-1}}{q_n}T^n\theta + 1}
\end{aligned}$$

De plus,

$$S^n(\theta, y) = (T^n\theta, V(a_n(\theta), ..., a_1(\theta))(y)).$$

Calculons

$$V(a_n(\theta), ..., a_1(\theta))(0).$$

Nous avons $V(a_1)(0) = \frac{1}{a_1} = \frac{q_0}{q_1}$ et par récurrence on voit que

$$\begin{aligned}
V(a_n, ..., a_1)(0) &= V(a_n)(V(a_{n-1}, ..., a_1)(0)) = \frac{1}{a_n + V(a_{n-1}, ..., a_1)(0)} \\
&= \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}} = \frac{q_{n-1}}{q_n}
\end{aligned}$$

Considérons la région

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in B \times B : \frac{x}{1 + xy} \leq t\},$$

D'après le calcul précédent $q_n(\theta)r_n(\theta) \leq t$ équivaut à $S^n(\theta, 0) = (T^n(\theta), \frac{q_{n-1}}{q_n}) \in \Omega(t)$. Par conséquent

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A(N, t, \theta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1_{\Omega(t)} \circ S^n(\theta, 0).$$

Cela suggère d'appliquer le théorème de Birkhoff à $f_t = 1_{\Omega(t)}$.Pour presque tout (θ, y) nous avons

$$\mu(\Omega(t)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_t \circ S^n(\theta, y).$$

Comme dans la démonstration de l'ergodicité de μ on voit que pour tout $y \in B$

$$V(a_n, ..., a_1)(y) \in B(a_n, ..., a_1)$$

et $\mathrm{diam}(B(a_n, ..., a_1)) \leq \varepsilon_n$ qui tend vers 0 et ne dépend pas de θ. Par conséquent, pour $y \in B$ nous avons $S^n(\theta, y) = (u, v) = S^n(\theta, 0) + \alpha_n$ où $|\alpha_n| \leq \varepsilon_n$ et

$$\begin{aligned}
S^n(\theta, 0) &= (u, v) \in \Omega(t) \Rightarrow (u, v - \alpha_n) \in \Omega(t) \\
&\Rightarrow \frac{u}{1 + u(v - \alpha_n)} = \frac{u}{(1 + uv)} \times \frac{1}{1 - \frac{u\alpha_n}{1+uv}} \leq t(1 + \varepsilon_n) \\
&\Rightarrow S^n(\theta, y) \in \Omega(t(1 + \varepsilon_n)).
\end{aligned}$$

De même
$$S^n(\theta,y)\in\Omega(t-\varepsilon_n)\Rightarrow S^n(\theta,0)\in\Omega(t).$$
Donc pour $\delta>0$ fixé,

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_{t-\delta}\circ S^n(\theta,y) &\le \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_t\circ S^n(\theta,0)\\ &\le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_t\circ S^n(\theta,0)\le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_{t+\delta}\circ S^n(\theta,y).\end{aligned}$$

Soit (θ,y) tel que $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_{t-\delta}\circ S^n(\theta,y)\to\Omega(t-\delta)$ et $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_{t+\delta}\circ S^n(\theta,y)\to\Omega(t-\delta)$ pour tous les δ d'une suite tendant vers 0. Comme $\mu(\Omega(t\pm\delta))$ tend vers $\mu(\Omega(t))$, d'après les inégalites précedentes on a

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_t\circ S^n(\theta,0)=\mu(\Omega(t))$$

d'où pour presque tout $\theta\in B$ on a

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A(N,t,\theta)=\mu(\Omega(t)).$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\mu(\Omega(t))$. On a

$$\frac{x}{1+xy}\le t\iff y\ge\frac{1}{t}-\frac{1}{x}$$

et
$$\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\le 1\iff x\le\frac{t}{1-t}\text{ et }\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\le 0\iff x\le t$$
Si $t\le 1/2$ alors

$$\begin{aligned}\ln 2\times\mu(\Omega(t)) &= \int_0^t dx\int_0^1 dy\,\frac{1}{(1+xy)^2}+\int_t^{\frac{t}{1-t}}dx\int_{\frac{1}{t}-\frac{1}{x}}^1 dy\,\frac{1}{(1+xy)^2}\\ &= \int_0^t dx\,(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+x)})+\int_t^{\frac{t}{1-t}}dx\,(\frac{1}{x(1+x(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}))}-\frac{1}{x(1+x)})\\ &= \int_0^t dx\,(\frac{1}{1+x})+\int_t^{\frac{t}{1-t}}dx\,(\frac{t}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x})\\ &= \ln(1+t)+1-(1-t)-(\ln\frac{t}{1-t}-\ln t)+(\ln(1+\frac{t}{1-t})-\ln(1+t))\\ &= t.\end{aligned}$$

Si $t \geq 1/2$ alors

$$\begin{aligned}
\ln 2 \times \mu(\Omega(t)) &= \int_0^t dx \int_0^1 dy\, \frac{1}{(1+xy)^2} + \int_t^1 dx \int_{\frac{1}{t}-\frac{1}{x}}^1 dy\, \frac{1}{(1+xy)^2} \\
&= \int_0^t dx\, (\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x)}) + \int_t^1 dx\, (\frac{1}{x(1+x(\frac{1}{t}-\frac{1}{x}))} - \frac{1}{x(1+x)}) \\
&= \int_0^t dx\, (\frac{1}{1+x}) + \int_t^1 dx\, (\frac{t}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}) \\
&= \ln(1+t) + 1 - t + \ln t + \ln 2 - \ln(1+t) \\
&= 1 - t + \ln 2t. \ \square
\end{aligned}$$