

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE

Nicolas Chevallier 2011

1 Dynamique topologique

1.1 Définitions

Définition 1 Un système dynamique topologique est la donnée d'un espace métrique compact X et d'une application continue T de X dans X . Notation (X, T) .

Définition 2 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. L'orbite $\mathcal{O}_T(x)$ d'un élément x de X est l'ensemble $\{T^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$.
2. Lorsque T est un homéomorphisme, l'orbite d'un élément x de X est $\mathcal{O}_T(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbf{Z}\}$.

Remarque : Il y a une ambiguïté lorsque T est un homéomorphisme.

Notation : dans le cas d'un homéomorphisme, $\mathcal{O}_T^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$, $\mathcal{O}_T^-(x) = \{T^{-n}(x) : n \in \mathbf{N}\}$.

Exemple. Soit $X = [0, 1]$ et $T(x) = x^2$. T est un homéomorphisme. Pour chaque x , 0 et 1 sont adhérents à $\mathcal{O}_T(x)$ mais si $x < 1$, seule 0 est adhérent à $\mathcal{O}_T^+(x)$.

Définition 3 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. L'ensemble ω -limite d'un élément x de X est l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$. Notation $\omega(x)$.

Remarque : Comme X est compact $\omega(x)$ n'est jamais vide.

Définition 4 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. On dit qu'une partie A de X est invariante si $T^{-1}(A) = A$.
2. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est invariante si $f \circ T = f$.

Remarque A invariante équivaut à 1_A invariante.

Exercice. Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, $\omega(x)$ est stable par $T : T\omega(x) \subset \omega(x)$.
2. Montrer que si T est un homéomorphisme alors pour tout $x \in X$, $\omega(x)$ est invariant.

Définition 5 Soit (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques topologiques. On dit que (X, T) et (Y, S) sont topologiquement conjugués si il existe un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ tel que $f \circ T = S \circ f$.

Remarque Si (X, T) et (Y, S) sont deux systèmes dynamiques topologiques conjugués ils sont identiques au changement de variable près $x \rightarrow y = f(x)$. Les trajectoires se correspondent deux à deux et leurs propriétés topologiques sont les mêmes.

Définition 6 Soit (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques topologiques. On dit que (X, T) est une extension de (Y, S) ou que (Y, S) est un facteur de (X, T) si il existe une application $f : X \rightarrow Y$ continue et surjective telle que $f \circ T = S \circ f$.

1.2 Minimalité

Définition 7 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. On dit que T est minimale si toutes les orbites sont denses, c-a-d si quelque soit $x \in X$, $\{T^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans X .
2. Lorsque T est un homéomorphisme, on dit que l'homéomorphisme T est minimal si toutes les orbites complètes sont denses, c-a-d si quelque soit $x \in X$, $\{T^n(x) : n \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans X .

Exemples

1. $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $T : x \in X \rightarrow x + \theta \in X$ est minimal ssi θ est irrationnel.
 2. $X = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \approx (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^d$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in X$, $T : x \in X \rightarrow x + \theta \in X$ est minimal ssi $1, \theta_1, \dots, \theta_d$ sont indépendants sur $\mathbf{Q}$ (ou $\mathbf{Z}$). On vérifie facilement que si $1, \theta_1, \dots, \theta_d$ sont liés sur $\mathbf{Z}$ alors aucune orbite n'est dense.
- La réciproque est plus difficile, il s'agit du théorème de Kronecker. On peut en faire une démonstration directe (facile en dimension 2) mais on peut aussi montrer que toutes les suites $(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ sont équiréparties grâce au critère de Weyl sur l'équirépartition.

Lemme 1 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X . Si la famille $(T^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est équicontinue alors $\forall x \in X$, $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = \overline{\mathcal{O}(x)}$ et $\omega_T(x) = \omega_{T^{-1}}(x)$.

Dem. Soit $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z, z' \in X$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $d(z, z') \leq \alpha \Rightarrow d(T^n(z), T^n(z')) \leq \varepsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $d(y, T^{n_0}(x)) \leq \varepsilon$. Par compacité il existe $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \bigcup_{i=1}^k B(T^{n_i}(x), \alpha).$$

Prenons m un entier $\geq \max(n_1, \dots, n_k) - n_0$. Il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $T^m(x) \in B(T^{n_j}(x), \alpha)$. Par équicontinuité

$$T^{n_0 - n_j}(T^m(x)) \in B(T^{n_0 - n_j}(T^{n_j}(x)), \varepsilon)$$

donc $T^{m - (n_j - n_0)}(x) \in B(T^{n_0}(x), \varepsilon) \subset B(y, 2\varepsilon)$ ce qui achève la démonstration de l'inclusion $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ car $m - (n_j - n_0) \in \mathbf{N}$. La même démonstration donne l'inclusion $\omega_{T^{-1}}(x) \subset \omega_T(x)$ et par symétrie on obtient l'égalité. $\square$

Proposition 1 Soit G un groupe topologique compact et a un élément de G . La translation $T : x \in G \rightarrow ax \in G$ est minimal ssi la suite $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est dense dans G .

Dem. Comme les translations sont des homéomorphismes on a $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$ dense ssi $(a^n x)_{n \in \mathbf{N}}$ dense pour tout x de G . De même, $(a^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dense ssi $(a^n x)_{n \in \mathbf{Z}}$ dense pour tout x de G . La seule chose à prouver est donc $(a^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dense implique $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$ dense. On reprend la démonstration du lemme précédent en remplaçant les boules par des translatés des voisinages de l'élément neutre. $\square$

Proposition 2 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. (X, T) est minimal.
2. Les seuls fermés invariants de X sont X et $\emptyset$.
3. Pour tout ouvert non vide U , $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} T^n U = X$.

Dem : exercice.

Proposition 3 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. (X, T) est minimal.
2. Les seuls fermés de X stables par T sont X et $\emptyset$.
3. Pour tout ouvert non vide U , $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} T^{-n} U = X$.

Dem : exercice.

Proposition 4 Soit X un espace métrique compact non vide et $T : X \rightarrow X$ une application continue (resp. un homéomorphisme). Alors il existe un fermé stable (resp. invariant) non vide F tel que $(F, T|_F)$ soit minimal.

Dem : Comme une intersection décroissante de fermés non vides et stables (invariants) est un fermé non vide et stable (invariant), le théorème de Zorn s'applique à l'ensemble des fermés non vides et stables (invariants) muni de l'inclusion. Il existe donc un fermé F non vide et stable (invariant) minimal au sens de l'inclusion. D'après la proposition précédente $(F, T|_F)$ est minimal.

Exercice : Soit X un espace métrique compact et $S : \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ une application linéaire. On munit $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ de la norme uniforme. On dit que S est un opérateur de Markov si S envoie les fonctions positives sur les fonctions positives et si $S(1_X) = 1_X$.

- a. Montrer que si S est de Markov alors S est continue et que sa norme opérateur est 1.
- b. On dit qu'un opérateur de Markov $S : \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ est irréductible si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ positive non identiquement nulle et tout x de X il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $S^n f(x) > 0$. Montrer si $T : X \rightarrow X$ est une application continue alors T est minimal ssi $S : f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) \rightarrow f \circ T \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ est un opérateur de Markov irréductible.

1.3 Ensemble des points errants

Définition 8 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit qu'un point x de X est errant s'il existe un voisinage V de x tel que les images réciproques $T^{-n}(V)$, $n \in \mathbf{N}$, soit deux à deux disjointes. L'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est le complémentaire dans X de l'ensemble des points errants.

Remarques 1. Le point x est errant ssi il existe un voisinage V de x tel que $\forall n \geq 1$, $T^{-n}(V) \cap V = \emptyset$.

2. Lorsque T est un homéomorphisme, si un point x est errant alors il existe un voisinage V de x tel que tous les itérés $T^n(V)$, $n \in \mathbf{Z}$, sont deux à deux disjointes. En effet, si $T^n V \cap T^m V \neq \emptyset$ avec $n > m$ alors $V \cap T^{m-n} V \neq \emptyset$.

Exercice. Soit $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $x \rightarrow x^2$. Déterminer $\Omega(T)$.

Exercice. Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Montrer que si T est minimal alors $\Omega(T) = X$.

Proposition 5 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. $\Omega(T)$ est fermé.
2. $\cup_{x \in X} \omega(x) \subset \Omega(T)$ (ainsi $\Omega(T) \neq \emptyset$).
3. Tous les points périodique appartiennent à $\Omega(T)$ (x est périodique s'il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x) = x$).
4. $T(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$ et si T est un homéomorphisme on a égalité.

Dem. 1. Evident.

2. Soit $y \in \omega(x)$ et un voisinage V de y . Il existe $n > m \geq 0$ tel que $T^n(x)$ et $T^m(x) \in V$. On a $T^{n-m}(T^m(x)) = T^n(x) \in V$ donc $T^{-(n-m)}(V)$ rencontre V donc y n'est pas errant.

3. Evident.

4. Soit x et $y \in X$, tels que $y = T(x)$ et V un voisinage de y . $T^{-n}(V) \cap V = \emptyset$ entraîne à $T^{-1}(T^{-n}(V) \cap V) = \emptyset$ donc y errant entraîne x errant. Donc $T^{-1}(X \setminus \Omega(T)) \subset X \setminus \Omega(T)$ et par conséquent $\Omega(T) \subset T^{-1}(\Omega(T))$.

Remarque Il existe un homéomorphisme T d'un compact X tel que l'ensemble $\Omega(T|_{\Omega(T)})$ des points non errants de la restriction $T|_{\Omega(T)}$ de T à $\Omega(T)$, soit distinct de $\Omega(T)$ (exercice ?).

Théorème 1 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si x est un point non errant de X alors pour tout voisinage V de x il existe une infinité de $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$.

Dem : Si x est un point périodique le résultat est évident. Supposons donc que x n'est pas un point périodique. Soit V un voisinage de x et N un entier. Pour chaque entier $n \geq 1$, comme $x \neq T^n(x)$, il existe $\rho_n > 0$ tel que les boules $B(x, \rho_n)$ et $B(T^n(x), \rho_n)$ soient disjointes. Par continuité, il existe $r_n \leq \rho_n$ tel que $T^n(B(x, r_n)) \subset B(T^n(x), \rho_n)$, donc $T^n(B(x, r_n)) \cap B(x, r_n) = \emptyset$ et par conséquent $T^{-n}(B(x, r_n)) \cap B(x, r_n) = \emptyset$. Posons $\delta = \min\{r_1, \dots, r_N\}$, on a

$$T^{-n}B(x, \delta) \cap B(x, \delta) = \emptyset$$

pour tous les n compris entre 1 et N . En diminuant éventuellement δ on peut supposer que $B(x, \delta)$ est inclus dans V . Mais comme x n'est pas errant, il existe $n > N$ tel que $T^{-n}B(x, \delta) \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$.

□

1.4 Transitivité

Définition 9 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. On dit que T est topologiquement transitive si il existe une orbite dense, c-a-d si il existe $x \in X$

tel que $\{T^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ soit dense dans X .

2. Lorsque T est un homéomorphisme, on dit que l'homéomorphisme T est topologiquement transitif si il existe une orbite dense, c-a-d si il existe $x \in X$ tel que $\{T^n(x) : n \in \mathbf{Z}\}$ soit dense dans X .

Proposition 6 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X (resp. une application continue de X dans X). Si T est transitif (resp. transitive) alors les seuls applications continues invariantes définies sur X sont les applications constantes.

Dem. Une application invariante est constante sur les trajectoires. Une application invariante et continue est donc constante sur l'adhérence des trajectoires. Par hypothèse il existe une trajectoire dense donc toutes les applications continues invariantes sont constantes. $\square$

Exercice. Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité sur X . Montrer que si μ est T -invariante ergodique et charge tous les ouverts non vide alors T est transitive.

Proposition 7 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Les propositions sont équivalentes

1. (X, T) est transitif.
2. Si F est un fermé invariant de X alors soit $F = X$ soit F est d'intérieur vide.
3. Si U et V sont deux ouverts non vides de X alors il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $T^n(U)$ rencontre V .
4. L'ensemble des x de X de trajectoire dense est un G_δ dense.

Dem. $1 \Rightarrow 2$. Supposons que (X, T) soit transitif. Soit F un fermé tel que $T^{-1}(F) = F$. Si $F \neq X$ alors $U = F^C$ est un ouvert non vide. L'orbite de tout point de F ne rencontre jamais U donc il existe un point de U d'orbite dense ; donc U est dense et F est d'intérieur vide.

$2 \Rightarrow 3$. $W = \cup_{n \in \mathbf{Z}} T^n U$ est un ouvert invariant donc $F = W^C$ est un fermé invariant. Comme W n'est pas vide F est d'intérieur vide donc V n'est pas inclus dans F , donc il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $T^n(U)$ rencontre V .

$3 \Rightarrow 4$. Soit $E = \{x \in X : \overline{\mathcal{O}(x)} = X\}$. Soit $\{U_p : p \in \mathbf{N}\}$ une base d'ouverts (non vides) de X . E est toujours un G_δ car $E = \cap_{p \in \mathbf{N}} \cup_{n \in \mathbf{Z}} T^{-n}(U_p)$. 3 signifie que pour chaque ouvert non vide U de X , $\cup_{n \in \mathbf{Z}} T^{-n}(U)$ est dense dans X . Par conséquent, d'après le théorème de Baire, E est dense.

$4 \Rightarrow 1$: évident.

Proposition 8 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si T est surjective alors les propositions sont équivalentes

1. (X, T) est transitif.
2. Si F est un fermé de X tel que $T(F) \subset F$ alors soit $F = X$ soit F est d'intérieur vide.
3. Si U et V sont deux ouverts non vides de X alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n(U)$ rencontre V .
4. L'ensemble des x de X de trajectoires denses est un G_δ dense.

Dem : $1 \Rightarrow 2$. Si F est d'intérieur non vide, une orbite dense doit rencontrer F , l'hypothèse $T(F) \subset F$ montre alors que l'orbite rentre dans F et y reste. On en déduit qu'il existe un x de trajectoire dense et un entier $n \geq 0$ tels que $F \cup \{x, \dots, T^n(x)\}$ soit dense dans X . Comme T est surjective, l'image par T d'une partie dense est dense, par conséquent,

$$T^k(F) \cup T^k(\{x, \dots, T^n(x)\}) \subset F \cup \{T^k(x), \dots, T^{k+n}(x)\}$$

est dense dans X pour tout $k \geq 0$. Or $T^m(x)$ appartient à F dès que m est assez grand, donc pour k assez grand, $\{T^k(x), \dots, T^{k+n}(x)\} \subset F$ et $F = \overline{F} = X$.

Suite : exercice. $\square$

Remarques 1. la surjectivité n'est utile que pour $1 \Rightarrow 2$.

2. La surjectivité est nécessaire : $T : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$, $T(1) = T(2) = 1$.

3. Si X n'a pas de point isolé et si (X, T) est transitif alors T est surjective. En effet, si x est un point dont la trajectoire est dense alors la trajectoire de tous les $T^k(x)$, $k \geq 0$, est dense. Cela se démontre à partir du résultat suivant :

Si A est une partie dense d'un espace métrique (topologique séparé) E sans point isolé et si F est une partie finie de A alors $A \setminus F$ est dense dans E . Ainsi on voit que $T(X)$ est un compact contenant la suite $T^n(x)$, $n \geq 1$, qui est dense, par conséquent $T(X) = X$.

Théorème 2 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X . Alors il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{O}^+(x)$ soit dense ssi T est transitif et $\Omega(T) = X$.

Dem. Soit x_0 tel que $\mathcal{O}^+(x_0)$ soit dense. Supposons que $\Omega(T) \neq X$. Il existe alors un ouvert non vide U tel que $T^{-n}(U)$, $n \in \mathbf{N}$, soit deux à deux disjoints. Comme T est bijective, les ouverts $T^{-n}(U)$, $n \in \mathbf{Z}$, soit deux à deux disjoints. Il existe $n_0 \geq 0$ tel que $T^{n_0}(x_0) \in U$. Donc pour tout $n \geq n_0$ $T^n(x_0) \in \cup_{m \geq 0} T^m(U)$. Or cette réunion ne rencontre aucun des $T^n(U)$ avec $n < 0$, qui sont deux à deux disjoints donc $\{x_0, \dots, T^{n_0-1}(x_0)\}$ doit rencontrer chacun des $T^n(U)$, $n < 0$ ce qui est impossible.

Réciproquement, d'après la proposition précédente, il suffit de prouver que si U et V sont deux ouverts non vides de X il existe $n \geq 0$ tel que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. On sait qu'il existe $N \in \mathbf{Z}$ tel que $W = T^{-N}(U) \cap V \neq \emptyset$. On peut supposer que N est négatif. Comme $\Omega(T) = X$, il existe une infinité de $n \geq 0$ tel que $T^{-n}(W) \cap W \neq \emptyset$. Choisissons un n tel que $n + N \geq 0$. On a $T^{-n}(T^{-N}(U)) \cap V \supset T^{-n}W \cap W \neq \emptyset$. $\square$

Exercice. Trouver un homéomorphisme $T : X \rightarrow X$ transitif tel que $\Omega(T) \neq X$.

Théorème 3 Soit T une isométrie d'un espace métrique compact X . Si T est transitive alors T est minimale.

Dem. Soit x_0 tel que $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = X$ et $x \in X$. On veut montrer que x est aussi de trajectoire dense. Soit $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. Il existe des entiers p et q tel que $d(x, T^p(x_0))$ et $d(y, T^q(x_0)) \leq \varepsilon$. Comme T est une isométrie on a

$$\begin{aligned} d(T^{q-p}(x), y) &\leq d(T^{q-p}(x), T^q(x_0)) + d(T^q(x_0), y) \\ &= d(x, T^p(x_0)) + d(T^q(x_0), y) \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse T est une isométrie par l'hypothèse la famille $(T^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est équicontinue (**Exercice**).

1.5 Mélange topologique

Définition 10 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que T est topologiquement mélangeante si pour tout couple d'ouverts non vide U et V de X il existe un entier $N(U, V) \geq 0$ tel que $T^{-n}U \cap V$ soit non vide pour tout $n \geq N(U, V)$.

Exercice Soit $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ une matrice n'admettant pas de valeurs propres de module 1. Montrer que l'application $T : \mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ définie par $T(X + \mathbf{Z}^2) = AX + \mathbf{Z}^2$ est topologiquement mélangeante.

Remarque Pour un homéomorphisme la définition du mélange topologique est la même. On a d'ailleurs $T^{-n}U \cap V$ non vide ssi $U \cap T^nV$ non vide.

Proposition 9 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si T est topologiquement mélangeant alors T est topologiquement transitive.

Dem. C'est une conséquence directe des caractérisations de la transitivité.

Exercice Montrer qu'une isométrie d'un espace métrique non réduit à un point ne peut pas être topologiquement mélangeante.

1.6 Récurrence

Définition 11 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. Un point x de X est récurrent si pour tout voisinage V de x il existe un entier $n \geq 1$ tel que $T^n x \in V$.
2. Lorsque T est un homéomorphisme, on dit que x est positivement récurrent si pour tout voisinage V de x il existe un entier $n \geq 1$ tel que $T^n x \in V$ et on dit que x est négativement récurrent si pour tout voisinage V de x il existe un entier $n \geq 1$ tel que $T^{-n} x \in V$.

Remarques. 1. Si x est récurrent alors il existe une suite d'entiers $(n_k)_k$ tendant vers l'infini telle que $T^{n_k}x$ tende vers x lorsque k tend vers l'infini.

2. Si x est récurrent alors il est non errant. La réciproque est fautive :

Exemple. Soit $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ et $S : x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow x' = (x'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où $x'_n = x_{n+1}$. Aucun point de X n'est errant, mais le point $x = (0, 1, 1, 1, \dots)$ n'est pas récurrent.

3. Si T est une isométrie alors tous les points sont récurrents car si $T^{n_k}(x)$ converge alors $d(T^{n_{k+1}-n_k}(x), x) = d(T^{n_{k+1}}x, T^{n_k}x)$ tend vers 0.

Exercice. Soit $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ et $S : x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow x' = (x'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où $x'_n = x_{n+1}$. Montrer que $x \in X$ est récurrent ssi tout mot de x apparaît une seconde fois.

Définition 12 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Un point x de X est uniformément récurrent si pour tout voisinage V de x , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tel que pour tout k , $T^{n_k}x \in V$ et la suite $(n_{k+1} - n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition 10 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si T est minimale alors tous les points x de X sont uniformément récurrents.

Dem. Soit x un point de X et V un ouvert non vide de X . Il suffit de montrer que l'ensemble I des $n \in \mathbf{N}$ tels que $T^n x \in V$ est un ensemble infini tel que la distance entre deux éléments consécutifs soit bornée. Comme T est minimale la réunion $\cup_{n \geq 0} T^{-n}V$ recouvre X . Par compacité, il existe une partie finie I de $\mathbf{N}$ telle que $X = \cup_{i \in I} T^{-i}V$. Soit n un entier quelconque. $T^n x$ appartient à l'un des $T^{-i}V$, $i \in I$, donc $T^m x \in V$ pour au moins un m compris entre n et $n + \max I$. $\square$

1.7 Spectre discret

Définition 13 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. Une fonction propre de T est une application $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ continue non nulle pour laquelle il existe un nombre complexe λ tel que $f \circ T = \lambda f$. λ est la valeur propre associée à f .
2. Pour une valeur propre λ on définit le sous espace propre associé à λ par

$$E_\lambda = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{C}) : f \circ T = \lambda f\}.$$

Exemple. $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\theta \in X$, $T : x \in X \rightarrow x + \theta \in X$. Si $m \in \mathbf{Z}$ alors l'application $e_m : X \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $e_m(x) = \exp 2i\pi m x$ est une fonction propre associée à la valeur propre $\exp 2i\pi m \theta$.

Théorème 4 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application. Si T est surjective alors

1. Toutes les valeurs propres sont de module 1.
2. L'ensemble des valeurs propres pour lesquelles il existe des fonctions propres ne s'annulant pas, est fini ou dénombrable.

Dem. 1. Si f est une fonction propre associée à la valeur propre λ alors les maximums des applications $|f|$ et $|f \circ T| = |\lambda| |f|$ sont les mêmes car T est surjective. Comme f n'est pas la fonction nulle on doit avoir $|\lambda| = 1$.

2. Fixons $x \in X$. Comme $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ muni de la norme uniforme est séparable, il suffit de montrer que si f et g sont des fonctions propres associées à des valeurs propres λ et μ distinctes, ne s'annulant pas et valant 1 en x alors $\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{4}$. Comme $\lambda/\mu \neq 1$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\left|1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right| \geq \frac{1}{4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty &\geq |f \circ T^n(x) - g \circ T^n(x)| = |\lambda^n f(x) - \mu^n g(x)| \\ &= |\lambda^n - \mu^n| = |\lambda|^n \left|1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right| \geq \frac{1}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 5 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X . Si (X, T) est transitif alors :

1. Toutes les fonctions propres sont de module constant.
2. Toutes les sous espaces propres sont de dimension 1.
3. L'ensemble des valeurs propres est un sous-groupe de $\mathbf{S}^1$.

Dem. 1. Si f est une fonction propre associée à la valeur propre λ alors d'après le théorème précédente, $|\lambda| = 1$ et donc le module de f est constant sur les trajectoires. Comme $|f|$ est continue et qu'il existe une trajectoire dense, $|f|$ doit être constant.

2. Si f et g sont deux fonctions propres associées à la même valeur propre λ alors $(f/g) \circ T = (f \circ T)/(g \circ T) = \lambda f / \lambda g = f/g$ donc f/g est invariante et comme T est transitif f/g est constante.

3. Si f et g sont associées à λ et μ alors $(fg) \circ T = (f \circ T)(g \circ T) = \lambda f \mu g = (\lambda \mu)(fg)$. On vérifie comme précédemment que $1/f$ est associée à la valeur propre $1/\lambda$. Par conséquent, l'ensemble des valeurs propres est un sous-groupe de $\mathbf{S}^1$. $\square$

Exercice Enoncer et démontrer le résultat correspondant pour une application continue T qui n'est nécessairement pas un homéomorphisme.

Définition 14 Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X . On dit que T est à spectre topologique discret si l'ensemble des fonctions propres est total dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ pour la norme uniforme.

Théorème 6 (Halmos et von Neumann). Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. T est transitif et il existe une distance sur X telle que T soit une isométrie.
2. T est topologiquement conjugué à une translation minimale d'un groupe abélien compact métrisable.
3. T est minimal et T est à spectre topologique discret.
4. T est transitif et T est à spectre topologique discret.

Dem. $1 \Rightarrow 2$. Soit d une métrique sur X telle que T soit une isométrie et soit $x_0 \in X$ de trajectoire dense. Si x_0 est un point périodique de période m , alors T est clairement conjuguée à la translation $x \rightarrow x + 1$ de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Supposons que x_0 ne soit pas périodique. L'application $n \in \mathbf{Z} \rightarrow T^n x_0 \in \mathcal{O}(x_0)$ est donc bijective et on peut transporter l'addition de $\mathbf{Z}$ à $\mathcal{O}(x_0)$. Cela définit une l'application $*$ sur $\mathcal{O}(x_0) \times \mathcal{O}(x_0)$ par $T^n(x_0) * T^m(x_0) = T^{n+m}(x_0)$. L'orbite $\mathcal{O}(x)$ muni de la loi $*$ est un groupe. Montrons que cette loi de groupe se prolonge à X . L'application $*$ est uniformément continue car

$$\begin{aligned} d(T^n(x_0) * T^m(x_0), T^p(x_0) * T^q(x_0)) &= d(T^{n+m}(x_0), T^{p+q}(x_0)) \\ &\leq d(T^{n+m}(x_0), T^{p+m}(x_0)) + d(T^{p+m}(x_0), T^{p+q}(x_0)) \\ &= d(T^n(x_0), T^p(x_0)) + d(T^m(x_0), T^q(x_0)). \end{aligned}$$

Par conséquent $*$ s'étend de manière unique en une application continue de $X \times X$ dans X . Grâce à la densité et à la continuité on voit que l'élément neutre de $*$ est x_0 . De même l'application $i : T^n(x_0) \in \mathcal{O}(x_0) \rightarrow T^{-n}(x_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ est uniformément continue car $d(T^{-n}(x), T^{-m}(x)) = d(T^{n+m-n}(x), T^{n+m-m}(x)) = d(T^m(x), T^n(x))$. Par conséquent, i se prolonge à X et comme pour tout $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $i(x) * x = x_0$, x_0 est bien l'élément de la loi $*$ prolongée à X . $(X, *)$ est donc un groupe compact métrisable. Pour $x \in \mathcal{O}(x_0)$ on a $T(x) = T(x_0) * x$, par densité la même relation est valable pour tous les x de X .

$2 \Rightarrow 3$. Une translation d'un groupe abélien compact est à spectre topologique discret car les caractères sont des fonctions propres et l'ensemble des caractères est total $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ (utilise le théorème de Stone-Weierstrass).

$3 \Rightarrow 4$. Evident.

$4 \Rightarrow 1$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite totale de fonctions propres de T . Appelons λ_n la valeur propre associée à f_n . On peut supposer que les f_n sont linéairement indépendantes et de modules 1. Pour x et y appartenant à X , posons

$$D(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}.$$

Comme la suite (f_n) est totale, elle sépare les points donc si $x \neq y$ alors $D(x, y) > 0$. On vérifie facilement que D est une distance. Pour cette distance T est une isométrie car

$$\begin{aligned} D(T(x), T(y)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n(T(x)) - f_n(T(y))|}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda_n f_n(x) - \lambda_n f_n(y)|}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda_n| |f_n(x) - f_n(y)|}{2^n} \\ &= D(x, y). \end{aligned}$$

Il reste à voir que D induit la même topologie sur X . L'application $Id : (X, d) \rightarrow (X, D)$ est continue car si $(x_p)_p$ converge vers x pour la distance d alors pour chaque n $|f_n(x_p) - f_n(x)|$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini et $D(x_p, x)$ tend vers 0. X étant compact, l'identité est un homéomorphisme de (X, d) sur (X, D) . $\square$

Théorème 7 *Soit T_1 et T_2 des homéomorphismes des espaces compacts X_1 et X_2 . Si T_1 et T_2 sont minimaux, à spectre discret et ont les mêmes valeurs propres alors ils sont topologiquement conjugués.*

Dem. Grâce au théorème précédent on peut supposer que X_1 et X_2 sont des groupes abéliens compacts et que T_1 et T_2 sont des translations, $T_i(x) = a_i x$, $x \in X_i$. Les valeurs propres de T_i sont les $\gamma(a_i)$ où γ décrit les caractères du groupe X_i . En effet, si γ est un caractère alors γ est clairement une fonction propre associée à la valeur propre $\gamma(a_i)$. La réciproque est un peu plus subtile :

Soit f une fonction propre de T_i associée à la valeur propre λ . On peut supposer que f est de module 1 et que $f(e) = 1$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $f(a_i^n) = f(T_i^n(e)) = \lambda^n f(e) = \lambda^n$. Donc $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout les x, y appartenant à $\{a_i^n : n \in \mathbf{Z}\}$. La translation étant minimale, cet ensemble est dense donc $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous les $x, y \in X_i$.

L'égalité des spectres signifie que $\{\gamma(a_1) : \gamma \in \widehat{X_1}\} = \{\gamma(a_2) : \gamma \in \widehat{X_2}\} = S$. Les valeurs propres sont simples car T_i est minimale, par conséquent, les applications $\Gamma_i : \gamma \in \widehat{X_i} \rightarrow \gamma(a_i) \in S$ sont bijectives. On sait que S est un sous-groupe de $\mathbf{S}^1$ et on vérifie que Γ_i est un morphisme de groupe. L'application $\Gamma = \Gamma_2^{-1} \circ \Gamma_1$ est donc un isomorphisme de $\widehat{X_1}$ sur $\widehat{X_2}$. Comme l'application qui à $x \in X_i$ associe $\widehat{x} : \gamma \in \widehat{X_i} \rightarrow \gamma(x) \in \mathbf{S}^1$ est un isomorphisme de X_i sur le bidual $\widehat{\widehat{X_i}}$, l'application $\Phi : X_2 \rightarrow X_1$ définie par $\widehat{\Phi(x)} = \widehat{x} \circ \Gamma$ est un isomorphisme et $\Gamma(\gamma) = \gamma \circ \Phi$. Il reste maintenant à vérifier que $\Phi \circ T_2 = T_1 \circ \Phi$. Pour cela il suffit de vérifier que pour chaque $x \in X_2$ et chaque $\gamma \in \widehat{X_1}$ on a $\gamma(\Phi \circ T_2(x)) = \gamma(T_1 \circ \Phi(x))$. Or par définition de Γ , $\Gamma(\gamma)$ est le caractère de X_2 associé à la même valeur propre λ que γ donc

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi \circ T_2(x)) &= \gamma \circ \Phi \circ T_2(x) = \Gamma(\gamma)(T_2(x)) \\ &= \lambda \Gamma(\gamma)(x) = \lambda \gamma \circ \Phi(x) = \lambda \gamma(\Phi(x)) \\ &= \gamma(T_1(\Phi(x))) = \gamma(T_1 \circ \Phi(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Les théorèmes précédents sont à comparer aux théorèmes sur les systèmes dynamiques mesurés :

Théorème 8 *Soit $T : X \rightarrow X$ une application mesurable conservant la mesure d'un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Si T est ergodique alors :*

1. *Si f est fonction non nulle de $L^2(\mu)$ telle que $f \circ T = \lambda f$ μ -p.s. où $\lambda \in \mathbf{C}$, alors $|\lambda| = 1$ et $|f|$ est constant p.s. .*
2. *Des fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonales.*
3. *Les valeurs propres sont simples.*
4. *Les valeurs propres forment un sous-groupe de $\mathbf{S}^1$.*

Définition 15 *Soit $T : X \rightarrow X$ une application mesurable conservant la mesure d'un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On dit que T est à spectre discret si il existe une base orthonormée de vecteurs de l'opérateur $U_T : f \in L^2(\mu, \mathbf{C}) \rightarrow f \circ T \in L^2(\mu, \mathbf{C})$.*

Théorème 9 Soit $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, deux espaces probabilisés et $T_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2$, deux applications mesurables conservant la mesure et ergodiques. Si T_1 et T_2 sont à spectre discret alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. T_1 et T_2 sont spectralement isomorphes : il existe une isométrie bijective π de $L^2(\mu_1)$ sur $L^2(\mu_2)$ telle que $\pi \circ U_{T_1} = U_{T_2} \circ \pi$.
2. T_1 et T_2 ont les mêmes valeurs propres.
3. T_1 et T_2 sont conjuguées (attention il s'agit de la conjugaison des algèbres mesurées !).

2 Mesures invariantes

2.1 Préliminaires

Nous rappelons quelques résultats standard de la théorie de la mesure.

Notations. 1. Soit X et Y deux espaces topologiques. On désigne par $\mathcal{C}(X, Y)$ l'espace des applications continues de X dans Y .

2. Soit X un espace topologique. On désigne par $P(X)$ l'ensemble de toutes les probabilités définies sur la tribu borélienne de X .

3. Soit X un espace topologique et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On désigne par $P(X, T)$ l'ensemble des probabilités μ appartenant à $P(X)$ invariantes par T : pour tout borélien A

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A).$$

4. Soit X un espace métrique compact. On désigne par $M(X)$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ muni de la norme infini.

Théorème 10 (Théorème de Riesz pour les compacts) Soit X un espace métrique compact et $J : \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire positive, c'est-à-dire telle que $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), f \geq 0 \Rightarrow J(f) \geq 0$. Alors il existe une unique mesure positive μ définie sur la tribu des boréliens de X telle que pour tout f de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ on ait $J(f) = \int_X f d\mu$. De plus cette mesure est régulière : pour tout borélien A ,

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact}}} \mu(K) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ ouvert}}} \mu(U).$$

Corollaire 1 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité appartenant à $P(X)$. La probabilité μ est invariante ssi pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$,

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dem. Posons pour $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$,

$$I(f) = \int_X f d\mu \text{ et } J(f) = \int_X f \circ T d\mu,$$

et appelons ν la mesure définie par $\nu(A) = \mu(T^{-1}A)$ pour tout borélien A . Pour tout f continue on a

$$\int_X f d\nu = \int_X f \circ T d\mu = J(f).$$

Donc, $\mu = \nu$ entraîne $I = J$ et par l'unicité du théorème de Riesz, $I = J$ entraîne $\mu = \nu$. $\square$.

Théorème 11 Soit X un espace métrique compact et μ une probabilité sur X . Alors $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Soit X un espace métrique compact. La topologie faible sur $M(X)$ est la topologie engendrée par les parties

$$\begin{aligned} V(f_1, \dots, f_n, U_1, \dots, U_n) &= \{\mu \in M(X) : \mu(f_i) \in U_i, i = 1, \dots, n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n V(f_i, U_i) \end{aligned}$$

où f_i sont des éléments de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ et les U_i des ouverts de $\mathbf{R}$. Cette topologie est la moins fine rendant continue les applications $\mu \in M(X) \rightarrow \mu(f) \in \mathbf{R}, f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Comme les formes linéaires positives sur $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ sont continues, $P(X)$ est inclus dans $M(X)$.

Proposition 11 (Métrisabilité de la topologie faible) Soit X un espace métrique compact. La topologie faible sur $P(X)$ est métrisable.

Dem. L'espace $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ muni de la norme uniforme est séparable. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite dense d'éléments de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Pour des probabilités μ et ν , posons

$$D(\mu, \nu) = \sum_{n \geq 0} \frac{|\mu(f_n) - \nu(f_n)|}{2^n \|f_n\|_\infty}.$$

L'application D est une distance sur $P(X)$. Montrons que la topologie associée à cette distance est la topologie faible sur $P(X)$. Soit μ_0 un élément de $P(X)$. Soit r est un réel strictement positif. Il existe un entier N tel que $2^{-N+1} < r$. Pour tout couple de probabilités (μ, ν) , on a

$$\sum_{n > N} \frac{|\mu(f_n) - \nu(f_n)|}{2^n \|f_n\|_\infty} \leq \sum_{n > N} \frac{2 \|f_n\|_\infty}{2^n \|f_n\|_\infty} = 2^{-N},$$

donc le voisinage faible de μ_0

$$\cap_{i=0}^N V(f_i,]\mu_0(f_i) - \frac{r}{2^N}, \mu_0(f_i) + \frac{r}{2^N}[)$$

est inclus dans la boule $B_D(\mu_0, r)$. Réciproquement, soit W un voisinage de μ_0 pour la topologie faible. Il existe des fonctions continues $g_1, \dots, g_n$ et des ouverts $U_1, \dots, U_n$ tels que $\mu_0 \in V(g_1, \dots, g_n, U_1, \dots, U_n) \subset W$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'intervalle $]\mu_0(g_i) - \varepsilon, \mu_0(g_i) + \varepsilon[\subset U_i$. Par densité il existe des indices $k_1, \dots, k_n$ tels que $\|g_i - f_{k_i}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Appelons N le maximum des k_i , $i = 1, \dots, n$. Si $D(\mu_0, \mu) \leq \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$ alors pour chaque i ,

$$\begin{aligned} |\mu_0(g_i) - \mu(g_i)| &\leq |\mu_0(g_i) - \mu_0(f_{k_i})| + |\mu_0(f_{k_i}) - \mu(f_{k_i})| + |\mu(f_{k_i}) - \mu(g_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + 2^{k_i} D(\mu_0, \mu) + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \end{aligned}$$

donc $\mu(g_i) \in U_i$ et la boule $B_D(\mu_0, r)$ est incluse dans W . $\square$

Théorème 12 Soit X un espace compact. Alors $P(X)$ muni de la topologie faible est compact.

2.2 Existence de mesures invariantes

Notation. Soit $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $T : X \rightarrow Y$ une application mesurable et μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. On désigne par $\tilde{T}\mu$ la mesure définie par $\tilde{T}\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$.

Remarque. Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace métrique compact muni de sa tribu borélienne alors en tant que forme linéaire, $T\mu$ est la transposée de l'application $f \rightarrow f \circ T$.

Lemme 2 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et ν une probabilité sur X . Si μ est une valeur d'adhérence faible de la suite $(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tilde{T}^k \nu)_{n \in \mathbf{N}}$ alors μ est une probabilité invariante par T .

Dem. Il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendant vers l'infini telle que la suite $(\frac{1}{p_n+1} \sum_{k=0}^{p_n} \tilde{T}^k \nu)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers μ . Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Pour tout n ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_n+1} \sum_{k=0}^{p_n} \tilde{T}^k \nu(f \circ T) &= \frac{1}{p_n+1} \sum_{k=0}^{p_n} \nu(f \circ T^{k+1}) \\ &= \frac{1}{p_n+1} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \nu(f \circ T^k) - \nu(f) + \nu(f \circ T^{p_n+1}) \right) \\ &= \frac{1}{p_n+1} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \tilde{T}^k \nu(f) - \nu(f) + \nu(f \circ T^{p_n+1}) \right), \end{aligned}$$

donc

$$\mu(f \circ T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n+1} \sum_{k=0}^{p_n} \tilde{T}^k \nu(f \circ T) = \frac{1}{p_n+1} \sum_{k=0}^{p_n} \tilde{T}^k \nu(f) = \mu(f). \square$$

Corollaire 2 Soit X un espace métrique compact non vide, $T : X \rightarrow X$ une application continue. Alors il existe une probabilité T -invariante.

Théorème 13 Soit X un espace métrique compact non vide, $T : X \rightarrow X$ une application continue. L'ensemble $P(X, T)$ des probabilités T -invariantes est un compact convexe non vide de $M(X)$ muni de la topologie faible.

Dem. D'après le lemme précédent $P(X, T)$ est non vide. Il est clair que $P(X, T)$ est convexe et comme $P(X)$ est compact il suffit de vérifier que $P(X, T)$ est faiblement fermé. Or si $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de probabilités T -invariantes de limite faible μ , alors pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, $\mu(f \circ T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f \circ T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = \mu(f)$. $\square$

Proposition 12 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue. L'application $\tilde{T}$ de $M(X)$ dans $M(X)$ qui à une forme linéaire μ associe la forme linéaire $\tilde{T}\mu$ définie par $\tilde{T}\mu(f) = \mu(f \circ T)$ est linéaire et continue pour la topologie faible.

Dem. La linéarité est évidente. La continuité résulte du fait que l'application tT est fortement continue. On peut aussi le vérifier directement : $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} F : M(X) &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mu &\mapsto \tilde{T}\mu(f) = \mu(f \circ T) \end{aligned}$$

est continue. $\square$

2.3 Propriétés des mesures invariantes

Proposition 13 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue. Soit μ une probabilité T -invariante.

1. Appelons $R(T)$ l'ensemble des points récurrents. On a $\mu(R(T)) = 1$.
2. Appelons $\Omega(T)$ l'ensemble des points non errants. On a $\mu(\Omega(T)) = 1$.

Dem. 1. Soit U un ouvert. L'ensemble $J(U)$ des points de U qui ne reviennent jamais dans U est de mesure nulle d'après le théorème de récurrence de Poincaré. Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base d'ouverts de X . Si $x \in X$ n'est pas récurrent, alors il existe un ouvert U_n de la base contenant x tel que pour tout $k \geq 1$, $T^k x \notin U_n$. Donc $x \in J(U_n)$. Par conséquent $X \setminus R(T)$ est inclus dans $\cup_{n \in \mathbf{N}} J(U_n)$ qui est de mesure nulle.

2. $\Omega(T) \supset R(T)$. $\square$

Exercice Démontrer sans utiliser 1. que $\mu(\Omega(T)) = 1$.

Proposition 14 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si il existe μ une probabilité T -invariante ergodique qui charge tous les ouverts non vides alors

1. $\Omega(T) = X$,
2. si de plus μ est ergodique, T est transitive et l'ensemble des x de trajectoire dense est de mesure 1.

Dem. 1. Comme $\Omega(T)$ est un fermé, $X \setminus \Omega(T)$ est un ouvert de mesure nulle qui doit donc être vide.

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base de la topologie. L'ensemble A des x tels que pour tout n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{U_n} T^k(x) = \mu(U_n)$$

est de mesure 1 d'après le théorème de Birkhoff. Comme $\mu(U_n) > 0$ pour tout n , la trajectoire de tout x passe par tous les U_n . Par conséquent, chaque x de A est de trajectoire dense. $\square$

2.4 Mesures invariantes ergodiques

Proposition 15 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue, μ et ν des probabilités T -invariantes. Si μ est ergodique et si ν absolument continue par rapport à μ alors $\mu = \nu$.

Dem. Soit E une partie mesurable de X . Nous avons,

$$\mu(E \setminus T^{-1}E) = \mu(E) - \mu(E \cap T^{-1}E) = \mu(T^{-1}E) - \mu(E \cap T^{-1}E) = \mu(T^{-1}E \setminus E).$$

De même,

$$\nu(E \setminus T^{-1}E) = \nu(T^{-1}E \setminus E).$$

Appelons ϕ la densité de ν par rapport à μ et prenons $E = \{x \in X : \phi(x) < 1\}$. Par définition de ϕ ,

$$\int_{E \setminus T^{-1}E} \phi d\mu = \int_{E \setminus T^{-1}E} d\nu = \int_{T^{-1}E \setminus E} d\nu = \int_{T^{-1}E \setminus E} \phi d\mu$$

Donc si $\mu(E \setminus T^{-1}E) > 0$ alors

$$\int_{E \setminus T^{-1}E} \phi d\mu < \mu(E \setminus T^{-1}E)$$

et

$$\int_{T^{-1}E \setminus E} \phi d\mu \geq \mu(T^{-1}E \setminus E) = \mu(E \setminus T^{-1}E)$$

ce qui est impossible, donc $\mu(E \setminus T^{-1}E) = 0$. Mais comme μ est ergodique $\mu(E) = 0$ ou 1 . Si $\mu(E) = 1$ alors $\nu(X) = \int_E \phi d\mu < 1$ et ν n'est pas une probabilité donc $\mu(E) = 0$. Par le même raisonnement, on montre que $\mu(\{\phi > 1\}) = 0$, donc ϕ vaut presque sûrement 1 et par conséquent $\nu = \mu$. $\square$

Théorème 14 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. Une probabilité μ T -invariante est ergodique ssi c'est un point extrémal du compact convexe $P(X, T)$.
2. Si μ et ν sont deux probabilités T -invariantes ergodiques alors elles sont égales ou étrangères.

Dem. 1. Soit μ une probabilité T -invariante non ergodique. Alors il existe un borélien E de X tel que $T^{-1}E = E$ et $0 < \mu(E) < 1$. Posons pour tout Borélien B

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap E)}{\mu(E)}, \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(B \setminus E)}{\mu(X \setminus E)}.$$

On vérifie que μ_1 et μ_2 sont distinctes et T -invariantes et comme

$$\mu = \mu(E)\mu_1 + \mu(X \setminus E)\mu_2,$$

μ n'est pas un point extrémal de $P(X, T)$.

Réciproquement, soit μ une probabilité T -invariante ergodique et supposons que $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ où $\mu_1, \mu_2 \in P(X, T)$ et $t \in]0, 1[$. Clairement μ_1 et μ_2 sont absolument continue par rapport à μ donc d'après la proposition précédente elles sont égales à μ .

2. Supposons μ et ν ergodiques. On sait d'après le théorème de décomposition de Lebesgue qu'il existe un unique couple de mesures (μ_1, μ_2) tel que $\nu = \mu_1 + \mu_2$, μ_1 soit absolument continue par rapport à μ et μ_2 , μ soient étrangères. Il suffit de prouver que μ_1 et μ_2 sont T -invariantes. En effet, si μ_1 n'est pas nulle alors $\frac{1}{\mu_1(X)}\mu_1$ est une probabilité invariante absolument continue par rapport à μ et ν . D'après la proposition précédente, μ_1 est égale à μ et à ν , d'où $\mu = \nu$.

La mesure $\tilde{T}\mu_1$ est absolument continue par rapport à μ car $\mu(A) = 0$ entraîne $\mu(T^{-1}A) = \mu(A) = 0$ qui entraîne à son tour que $\tilde{T}\mu_1(A) = \mu_1(T^{-1}A) = 0$. Comme μ_2 et μ sont étrangères, il existe un borélien E tel que $\mu(E) = 0$ et $\mu_2(E) = \mu_2(X)$. On a $\mu(T^{-1}E) = \mu(E) = 0$. De plus, μ_1 est absolument continue par rapport à μ , donc $\mu_1(E) = \mu_1(T^{-1}E) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \tilde{T}\mu_2(E) &= \mu_2(T^{-1}E) = \mu_2(T^{-1}E) + \mu_1(T^{-1}E) = \nu(T^{-1}E) \\ &= \nu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) = \mu_2(E) = \mu_2(X) = \tilde{T}\mu_2(X). \end{aligned}$$

Il en résulte que μ et $\tilde{T}\mu_2$ sont étrangères. Finalement,

$$\nu = \tilde{T}\nu = \tilde{T}\mu_1 + \tilde{T}\mu_2$$

et l'unicité de la décomposition de ν montre que μ_1 et μ_2 sont T -invariantes. $\square$

Définition 16 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité T -invariante. On dit qu'un point x de X est générique pour μ si pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)) = \int_X f d\mu.$$

Proposition 16 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité T -invariante. Si μ est ergodique alors il existe un borélien Y de probabilité 1 tel que tout x appartenant à Y soit générique pour μ .

Dem. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. D'après le théorème de Birkhoff, pour chaque n , il existe un borélien Y_n de probabilité 1 tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)) = \int_X f d\mu$ pour tout x de Y_n . Soit $x \in \cap_{n \geq 0} Y_n$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $k \geq 0$ tel que $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon/3$ et un entier N tel que pour tout $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{n} (f_k(x) + f_k(Tx) + \dots + f_k(T^{n-1}x)) - \int_X f_k d\mu \right| \leq \varepsilon/3.$$

Pour $n \geq N$, $\left| \frac{1}{n} (f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{n-1}x)) - \int_X f d\mu \right|$ est majoré par la somme des trois termes

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} (f(x) + \dots + f(T^{n-1}x)) - \frac{1}{n} (f_k(x) + \dots + f_k(T^{n-1}x)) \right| \\ & + \left| \frac{1}{n} (f_k(x) + \dots + f_k(T^{n-1}x)) - \int_X f_k d\mu \right| \\ & + \left| \int_X f_k d\mu - \int_X f d\mu \right| \end{aligned}$$

qui est inférieure à ε . $\square$

Exercices 1. Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité T -invariante.

a. Montrer que μ est ergodique ssi $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \forall g \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f \circ T^k g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

b. Montrer que μ est mélangeante ssi $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \forall g \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \circ T^n g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

c. Montrer que μ est faiblement mélangeante ssi $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \forall g \in L^1(\mu)$, il existe une partie I de $\mathbf{N}$, de densité 1, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \circ T^n g d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

d. Montrer que μ est ergodique ssi $\forall \nu \in P(X)$, ν est absolument continue par rapport à μ entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{T}^k \nu = \mu.$$

e. Montrer que μ est mélangeante ssi $\forall \nu \in P(X)$, ν est absolument continue par rapport à μ entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}^n \nu = \mu.$$

f. Montrer que μ est faiblement mélangeante ssi il existe une partie I de $\mathbf{N}$, de densité 1, telle que $\forall \nu \in P(X)$, ν est absolument continue par rapport à μ entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} \tilde{T}^n \nu = \mu.$$

2. Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue et μ une probabilité T -invariante. Montrer que μ est ergodique ssi la suite $(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x})_{n \in \mathbf{N}}$ converge faible vers μ pour presque tout x .

2.5 Unique ergodicité

Définition 17 Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue. Si T admet une unique probabilité invariante, on dit que T est *uniquement ergodique*.

Exemple. Si T est une translation irrationnelle du tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ alors T admet la mesure de Lebesgue pour unique probabilité invariante. En effet, pour tout entier relatif non nul p ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \exp 2ip\pi T^k(x)$$

converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Par conséquent, si μ est une probabilité invariante on a pour tout entier relatif n non nul

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \exp 2ip\pi x d\mu(x) &= \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \exp 2ip\pi T^k(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \exp 2ip\pi T^k(x) d\mu(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que μ est la mesure de Lebesgue.

Théorème 15 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge uniformément vers une constante.
- ii. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge simplement vers une constante.
- iii. Il existe une probabilité invariante μ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ et tout $x \in X$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)$ converge vers $\int_X f d\mu$.
- iv. T est *uniquement ergodique*.

Dem. Clairement i $\Rightarrow$ ii.

Montrons que ii $\Rightarrow$ iii. Par hypothèse, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge simplement vers une constante, appelons $\mu(f)$ cette constante. On vérifie facilement que $\mu : \mathcal{C}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ est linéaire positive et que $\mu(1) = 1$. De plus pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$,

$$\mu(f \circ T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T \circ T^k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = \mu(f)$$

où x est un point quelconque de X . Par conséquent, μ est invariante et iii est vraie.

Montrons que iii $\Rightarrow$ iv. Soit ν une probabilité invariante ergodique. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$, d'après le théorème de Birkhoff, il existe au moins un x de X tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = \nu(f).$$

Par conséquent, $\nu(f) = \mu(f)$ et μ est l'unique probabilité invariante et ergodique. Le compact convexe $P(X, T)$ admet donc un unique point extrémal. Grâce au théorème de Krein-Milman on

en déduit que $P(X, T) = \{\mu\}$.

Montrons que iv $\Rightarrow$ i. Appelons μ l'unique probabilité invariante. Si il existe $g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ telle que la convergence de la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k$ vers la constante $\int_X g d\mu$ ne soit pas uniforme, alors il existe $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $(n_p)_{p \in \mathbf{N}}$ tendant vers l'infini et une suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de points de X tels que pour tout p ,

$$\left| \frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} g \circ T^k(x_p) - \int_X g d\mu \right| \geq \varepsilon.$$

La suite $(\nu_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de probabilité définie par $\nu_p(f) = \frac{1}{n_p} \sum_{k=0}^{n_p-1} f \circ T^k(x_p)$ admet une valeur d'adhérence faible ν . Cette probabilité est invariante et par définition de ν , $\nu(g) \neq \mu(g)$ ce qui contredit l'unique ergodicité. $\square$

Exercice. Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue.

1. Montrer que si T admet une unique probabilité invariante μ et si μ charge tous les ouverts alors T est minimale (on dit que T est strictement ergodique).
2. Montrer que si T est minimale et que si la suite $(T^n)_{n \geq 0}$ est équicontinue alors T est uniquement ergodique.

Théorème 16 Soit X un espace métrique compact et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On suppose que (X, T) est uniquement ergodique et μ est l'unique probabilité invariante. On dit qu'une application $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est Riemann intégrable si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Alors pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann intégrable, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge uniformément vers $\int_X f d\mu$.

Démonstration. Faisons la démonstration dans le cas où $f = 1_A$. On sait que 1_{A^c} est limite croissante d'une suite de fonctions continues positives $(f_n)_{n \geq 0}$ et que $1_{\bar{A}}$ est limite décroissante d'une suite de fonctions continues positives. L'hypothèse $\mu(\partial A) = 0$ montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$. Par conséquent pour $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $\int_X (g_{n_\varepsilon} - f_{n_\varepsilon}) d\mu \leq \varepsilon$ et d'après le théorème précédent, il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on ait $\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_{n_\varepsilon} \circ T^k - \int_X f_{n_\varepsilon} d\mu \right\|_\infty$ et $\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{n_\varepsilon} \circ T^k - \int_X g_{n_\varepsilon} d\mu \right\|_\infty \leq \varepsilon$. On obtient pour tout $x \in X$ et tout $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_{n_\varepsilon} \circ T^k(x) - \varepsilon &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_{n_\varepsilon} \circ T^k + \varepsilon \\ \int_X f_{n_\varepsilon} d\mu - 2\varepsilon &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq \int_X g_{n_\varepsilon} d\mu + 2\varepsilon \\ \int_X f d\mu - 3\varepsilon &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \leq \int_X f d\mu + 3\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

2.6 Cobords

Théorème 17 (Gottschalk-Hedlund [G, H]) Soit X un espace métrique compact, $T : X \rightarrow X$ une application continue ou un homéomorphisme et $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Si T est minimale alors f est le cobord d'une fonction continue, i.e. il existe $\psi \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ telle que $f = \psi - \psi \circ T$, ssi les sommes $\sum_{k=0}^n f \circ T^k$, $n \geq 0$, sont uniformément bornées sur X .

Dem. Si f est un cobord d'une fonction continue ψ alors les sommes $\sum_{k=0}^n f \circ T^k = \psi - \psi \circ T^{n+1}$ sont uniformément bornées. Démontrons la réciproque dans le cas où T est une application continue minimale. Si T est homéomorphisme il suffira d'utiliser que les seuls fermés invariants sont le vide et X alors que nous utiliserons que les seuls fermés stables sont le vide et X . Si les sommes $\sum_{k=0}^n f \circ T^k$, $n \geq 0$ sont uniformément bornées sur X alors la fonction $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=0}^n \sum_{k=0}^n f \circ T^k(x)$$

est bornée sur X et on a

$$\begin{aligned} \phi \circ T(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=0}^n \sum_{k=0}^n f \circ T^k(Tx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=0}^n (-f(x) + \sum_{k=0}^{n+1} f \circ T^k(x)) \\ &= -f(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=0}^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} f \circ T^k(x) = -f(x) + \phi(x). \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration il faudrait prouver que ϕ est continue. Malheureusement ce n'est pas évident et on aura besoin de fonctions auxiliaires.. Pour une fonction bornée $h : X \rightarrow \mathbf{R}$, notons h^+ la plus petite fonction semi-continue supérieurement (SCS) supérieure ou égale à h et h^- la plus grande fonction semi-continue inférieurement (SCI) inférieure ou égale à h . En fait, on a simplement

$$h^+(x) = \limsup_{y \rightarrow x} h(y), \text{ et } h^-(x) = \liminf_{y \rightarrow x} h(y).$$

Comme f est continue,

$$(\phi \circ T)^+ = (\phi - f)^+ = \phi^+ - f.$$

Or $\phi^+ \circ T$ est SCS et supérieure ou égale à $\phi \circ T$, donc $\phi^+ \circ T \geq (\phi \circ T)^+$ et

$$\phi^+ \circ T \geq \phi^+ - f.$$

De la même manière on montre que

$$\phi^- \circ T \leq \phi^- - f.$$

On en déduit que

$$(\phi^+ - \phi^-) \circ T \geq \phi^+ - \phi^-.$$

La fonction $\psi = \phi^+ - \phi^-$ est donc une fonction SCS vérifiant $\psi \circ T \geq \psi$. Pour $t \in \mathbf{R}$, considérons l'ensemble $F_t = \{x \in X : \psi(x) \geq t\}$. Comme ψ est SCS, F_t est fermé et comme pour tout x , $\psi(Tx) \geq \psi(x)$, le fermé F_t est stable. La minimalité de T entraîne que pour tout t , F_t est soit vide soit égale à X . Si il existe deux points x_1 et x_2 de X tels que $t_1 = \psi(x_1) < t_2 = \psi(x_2)$ alors pour $t \in]t_1, t_2[$, F_t n'est ni vide ni égale à X , donc l'application ψ est constante. On en déduit que $\phi^+ = \phi^- + c$ est à la fois SCS et SCI donc continue. On obtient ainsi

$$f \geq \phi^+ - \phi^+ \circ T = \phi^- - \phi^- \circ T \geq f. \square$$