DECALAGES ET SYSTEMES DYNAMIQUES ASSOCIES AUX SUITES

Nicolas Chevallier 2011

1 Décalage

1.1 Généralités

Définition 1 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini.*
1. L'application $S_u : \mathcal{A}^{\mathbf{N}} \to \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ définie par $S_u \omega_n = \omega_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, s'appelle le décalage unilatéral sur $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$.
2. L'application $S_b : \mathcal{A}^{\mathbf{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ définie par $S_b \omega_n = \omega_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, s'appelle le décalage bilatéral sur $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$.

Notations et vocabulaire. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont des lettres et $\mathcal{A}$ est l'alphabet. $\mathcal{A}^n$ est l'ensemble des mots de longueurs n dans l'alphabet $\mathcal{A}$ et on désigne par $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{A}^n$ l'ensemble de tous les mots finis écrit avec les lettres de l'alaphabet $\mathcal{A}$ (le mot "vide" est l'unique élément de $\mathcal{A}^0$). $\mathcal{A}^+ = \cup_{n \geq 1} \mathcal{A}^n$ est ensemble de tous les mots de longueur > 0. Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est un facteur ou un (sous mot) d'un mot ω fini ou appartenant à $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ ou $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$, s'il existe un entier n avec $w = \omega_n \omega_{n+1} ... \omega_{n+k-1}$. Le nombre d'apparitions du facteur w est le nombre de tels entiers n.
$w \in \mathcal{A}^*$ est le préfixe d'un mot $u \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ si il existe un mot v tel qque $u = wv$.
$w \in \mathcal{A}^*$ est le suffixe d'un mot $u \in \mathcal{A}^*$ si il existe un mot v tel qque $u = vw$.
On désigne par $|w|$ la longueur d'un mot $w \in \mathcal{A}^*$.
Pour $a \in \mathcal{A}$, on désigne par $|w|_a$ le nombre d'occurences de la lettre a dans le mot $w \in \mathcal{A}^*$.

Topologie. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On munit les deux espaces $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ et $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ de la topologie produit, $\mathcal{A}$ étant muni de la toplogie discrète. Ces topologies sont métrisables. On peut prendre pour distances :

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} 2^{-|n|} d_{\mathcal{A}}(x(n), y(n)), \ d(x,y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{-|n|} d_{\mathcal{A}}(x(n), y(n))$$

où la distance $d_{\mathcal{A}}$ est définie sur $\mathcal{A}$ par $d_{\mathcal{A}}(a,b) = 1$ si $a \neq b$ et 0 si $a = b$. Les deux espaces topologiques $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ et $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ sont compacts.

Base de la topologie, cylindres :
1. Soit $i_1 < i_2 ... < i_k$ des entiers de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ et $a_1, ..., a_k$ des éléments de $\mathcal{A}$. Le cylindre $[i_1, a_1; ...; i_k, a_k]$ est la partie de Ω dont les éléments ω vérifient $\omega_{i_1} = a_{i_1}, ..., \omega_{i_k} = a_{i_k}$.
2. *Si* $w = w_1 ... w_k$ est mot de longueur k et $n \in \mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$, $[n, w]$ désigne le cylindre $[n, w_1; ...; n + k - 1, w_k]$ et $[w] = [0, w]$.

Lemme 1 *Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.*
1. Les cylindres sont ouverts et fermés.
2. Les cylindres $[w]$, $w \in \mathcal{A}^+$ forment une base de la topologie de $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$.
2. Deux cylindres $[w]$ et $[w']$ sont soit disjoints soit emboités (l'un contient l'autre).
3. Les décalages sont continus.

Topologie sur $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$. On ajoute une lettre à $\mathcal{A}$, on obtient un nouvel alphabet $\mathcal{A}'$ et les mots de $\mathcal{A}^*$ sont considérés comme des éléments de $\mathcal{A}'^{\mathbf{N}}$ en les complétants avec la nouvelle lettre. La toplogie sur $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ est induite par celle de $\mathcal{A}'^{\mathbf{N}}$.

Exercice 1. a. Montrer que l'ensemble des points périodiques des décalages unilatéral et bilatéral sont denses.
b. Montrer que les décalages unilatéral et bilatéral sont topologiquement transitifs. (Sont-ils minimaux ?)
c. Déterminer les ensembles des points non errants.

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini $w = w_1 ... w_k$ un mot de $\mathcal{A}^*$. Soit p un entier positif. Montrer que l'ensemble F des éléments ω de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ tels que le facteur w apparaisse au plus p fois dans ω est un fermé de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$.

1.2 Sous-décalages

Nous formulons les définitions dans le cas du décalage bilatéral. Le cas unilatéral est analogue : certaines égalités sont à remplacer par des inclusions.

Définition 2 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini et X une partie de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ (ou de $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$).*
1. L'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des facteurs des éléments s'appelle le langage de X et l'ensemble $\mathcal{L}_n(X)$ des facteurs de longueur n des éléments de X s'appelle le langage de longueur n de X.
2. Si X est fermé et si $S(X) = X$ on dit que X munit de la restriction de S est un sous décalage (unilatéral : $S(X) \subset X$).
3. Si $\mathcal{M}$ est une partie finie de l'ensemble des mots $\mathcal{A}^*$ et si X est l'ensemble des ω de Ω dont aucun facteur n'est dans $\mathcal{M}$, on dit que X est un sous décalage de type fini.

Remarques et notations 1. Un sous décalage de type fini est un fermé car c'est une intersection de fermé et clairement $S(X) = X$, par conséquent c'est un sous décalage.
2. Si tous les mots interdits ont même longueurs m, il revient au même de définir X en indiquant les mots de longueurs m qui sont permis. Si $\mathcal{M}$ est un ensemble de mots de même longueur, $X_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ dont tous les facteurs de longueur m sont dans $\mathcal{M}$.

Exercice Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini.
1. Montrer que si deux sous décalages X et Y de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ ont même langage alors il sont égaux.
2. Pour chaque entier $n \geq 1$, soit L_n une partie de $\mathcal{A}^n$. Montrer que si pour chaque $n \geq 1$, tout mot de L_n peut se prolonger à droite et à gauche en un mot de L_{n+1} et tout mot de L_{n+1} est le prolongement d'un mot de L_n alors il existe un sous décalage X de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ tel que $\mathcal{L}_n(X) = L_n$ pour tout n.

Définition 3 *Soit $\mathcal{A} = \{1, ..., k\}$ et $A = (A_{ij})$ une matrice carrée d'ordre k dont tous les coefficients valent 0 ou 1. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots ij de deux lettres dans l'alphabet $\mathcal{A}$ défini par $ij \in \mathcal{M}$ ssi $A_{ij} = 1$. La chaine de Markov topologique associé à la matrice A est l'ensemble X_A des $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ dont tous les facteurs de longueurs 2 sont dans $\mathcal{M}$, $X_A = X_{\mathcal{M}}$.*

Définition 4 *Soit $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ une matrice carrée à coefficients positifs ou nuls.*
1. On dit que A est irréductible si pour tout i, j, il existe un entier $l > 0$ tel que le coefficient A^l_{ij} de la matrice A^l soit strictement positif.
2. Soit $i \in \{1, ..., k\}$. La période de i est l'entier $p(i) = \mathrm{pgcd}\{l \geq 0 : A^l_{ii} > 0\}$.
3. On dit que A est apériodique si toutes les périodes $p(i)$ valent 1.

Exercice 1. Soit $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ une matrice carrée à coefficients entier positifs ou nuls. Montrer que si A est irréductible alors toutes les périodes de A sont égales.

Proposition 1 *Soit A est une matrice carrée de 0 et de 1. Si A est irréductible alors le décalage bilatéral S sur X_A est transitif.*

Dem. Le langage $\mathcal{L}(X_A)$ est dénombrable, ses éléments forment donc une suite $(w_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Pour chaque n, w_n est un mot fini appelons a_n sa première lettre et b_n sa dernière lettre. Comme A est irréductible il existe un mots m_n de $\mathcal{L}(X_A)$ tel que $b_n m_n a_{n+1} \in \mathcal{L}_{X_A}$. La suite

$$\omega^0 = ...w_{-n} m_{-n} w_{-n+1} m_{-n+1} ....m_{-1} w_0 m_0 ...m_{n-1} w_n ....$$

est un éléments de X_A. Montrons que son orbite est dense dans X_A. Soit ω un éléments de X_A et $V = [\omega_{-m}, ..., \omega_m]$ un voisinage de ω. Le mot $w = \omega_{-m}...\omega_m$ est l'un des w_n donc pour un bon choix de N, $S^N \omega^0 \in V$. $\square$

Proposition 2 *Soit A est une matrice carrée de 0 et de 1. Si A est irréductible et apériodique alors le décalage bilatéral S sur X_A est topologiquement mélangeant.*

Lemme 2 *Soit A est une matrice carrée de 0 et de 1. Si A est irréductible et apériodique alors il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, les coefficients de A^N sont tous strictement positifs.*

Dem du lemme : exercice.
1. Soit $l_1, ..., l_p$ des entiers positifs premiers entre eux. Montrer qu'il existe un entier N tel que $\mathbf{N}l_1 + ... + \mathbf{N}l_p$ contienne tous les entiers $\geq N$.
2. Soit A une matrice carrée de 0 et de 1.
a. Montrer que si $p(i) = 1$ alors il existe N tel que pour tout $l \geq N$, $A_{ii}^l > 0$.
b. Conclure.

Dem de la proposition. Il suffit de considérer deux ouverts non vides V et W qui sont des cylindres : $V = [i, v] \cap X_A$ et $W = [j, w] \cap X_A$ où $|v| = p$ et $|w| = q$, et de montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tout $k \geq N$, on ait $S^{-k}W \cap V \neq \emptyset$. Soit $N \geq 1$ donné par le lemme. Pour tout $k \geq N$, il existe un mot M_k de longueur $k-1$ tel que $v_p M_k w_1 \in \mathcal{L}_{k+1}(X_A)$. Il existe donc $\omega \in X_A$ tel que

$$\omega_i....\omega_{i+p+k+q-2} = v_1...v_p M_k w_1...w_q.$$

On a $\omega \in [i, v]$ et $\omega_{i+p+k-2+l} = w_l$, $l = 1, ..., q$. Donc pour $l = 1, ..., q$,

$$(S^{i-j+p+k-1}\omega)_{j+l-1} = \omega_{i+p+k-2+l} = w_l,$$

par conséquent, $S^{i-j+p+k-1}\omega \in [j, w]$ donc $\omega \in V \cap S^{-(i-j+p+k-1)}W$. $\square$

Exercice 1. Etudier la réciproque de la proposition précédente.
Exercice 2. Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et X l'ensemble des ω de $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ contenant au plus une fois le facteur 10.
a. Déterminer l'ensemble E des points errants du sous décalage X ainsi que l'ensemble des points errants du sous décalage $X_1 = X \backslash E$.
b. Si X est un espace métrique compact et T une application continue de X dans X on désigne par X_1 l'ensemble des points non errants de X et par X_2 l'ensemble des points non errants de la restriction de T à X_1 et ainsi de suite $X_3, ..., X_n, ...$ et $X_\infty = \cap_{n\geq 1} X_n$. Trouver un sous décalage tel que $X_\infty ... \subsetneq X_n \subsetneq ... X_2 \subsetneq X_1$.

1.3 Codage d'une application

Soit Y un espace métrique compact, $Y_1, ..., Y_k$ une partition de Y en k parties non vides et $\mathcal{A} = \{1, ..., k\}$. Soit $T : Y \to Y$ une application continue.

On code les points de Y à l'aide de T et de la partition. A chaque $y \in Y$ on associe la suite $\pi(y) = \omega \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ définie par $\omega_i = j$ si $T^i y \in Y_j$. Il est clair que $X = \pi(Y)$ est stable par S et on a

$$\pi \circ T = S \circ \pi.$$

Attention : l'application π n'est en général pas continue.
Par contre si les Y_i sont mesurables (et si T est mesurable), l'application π est mesurable.

Problèmes :
- Le codage (X, S) représente-t-il fidèlement le système d'origine ?
- X est-il fermé dans $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$? ($\overline{X}$ est stable par S mais pourrait être beaucoup plus gros)

Exemples.
1. Soit T une translation du tore $\mathbf{T}^1$ et I_1 et I_2 deux intervalles formant une partition de $\mathbf{T}^1$. On peut coder les éléments du tore à l'aide de cette partition.
2. Soit $T : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$, $x \to 2x$, $I_0 = [0, \frac{1}{2}[$, $I_1 = [\frac{1}{2}, 1[$. Pour tout $x \in \mathbf{T}^1$, $\pi(x)$ est le codage standart en binaire de x.

Codage de "type fini".
On suppose que pour chaque i, il existe $I_i \subset \{1, ..., k\}$ tel que $T(Y_i) = \cup_{j\in I_i} Y_j$. Soit $A \in M_k(\mathbf{R})$ la matrice de 0 et de 1 défini par $A_{ij} = 1$ ssi $j \in I_i$. Considérons $X_{u,A} = \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}} : \forall n \in \mathbf{N},\ A_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1\}$.
Exercice. Montrer que si les Y_i sont ouverts alors π est une surjection continue de Y sur $X_{u,A}$.
Solution. L'application π est clairement à valeur dans $X_{u,A}$. Il faut prouver que π est surjective et continue.
Soit $\omega \in X_{u,A}$ et $K_n = Y_{\omega_0} \cap T^{-1}Y_{\omega_1} \cap ... \cap T^{-n}Y_{\omega_n}$. Montrons par récurrence que $T^n K_n$ contient Y_{ω_n}. Pour $n = 0$, on a $T^0 K_0 = Y_{\omega_n}$. Supposons que $T^n K_n$ contienne Y_{ω_n}. Soit $y \in Y_{\omega_{n+1}}$. Il existe

$z \in Y_{\omega_n}$ tel que $T(z) = y$ car TY_{ω_n} contient $Y_{\omega_{n+1}}$. Par hypothèse de récurrence il existe $x \in K_n$ tel que $T^n x = z$. On a alors $T^{n+1}x = y$ et $x \in T^{-n}Y_{\omega_{n+1}}$. Ainsi $x \in K_{n+1}$. Par conséquent, pour tout n, K_n est non vide.
La suite K_n est une suite décroissante de compacts non vides donc son intersection K_ω est non vide et par définition pour tout x de K_ω, $\pi(x) = \omega$.
Soit x tel que $\pi(x) = \omega$. $x \in K_\omega$. Comme les Y_i sont des ouverts, les K_n sont des ouverts. Or l'image réciproque du cylindre $[\omega_0, ..., \omega_n]$ contient K_n donc c'est un voisinage x. Par conséquent π est continue. $\square$

2 Systèmes dynamiques définis par une suite

Proposition 3 *Soit $\mathcal{A}$ une alphabet fini, $u \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ et $X = \overline{\mathcal{O}(u)}$. Alors*
1. $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(u)$
2. $X = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}} : \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)\}$.

Demonstration. 1. Il suffit de prouver que $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{L}(u)$. Soit $x = \lim_{k\to\infty} S^{n_k}u \in X$. Si $w = x_m...x_n$ est un sous mot de x alors le cylindre $C = [m, w]$ est un voisinage de x donc $S^{n_k}u \in C$ pour k assez grand. Par conséquent, w est sous mot de $S^{n_k}u$ et donc de u.
2. D'après 1, il suffit de prouver l'inclusion, $\{x \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}} : \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)\} \subset X$. Si $\mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)$ alors pour tout k, il existe n_k tel que $x_0....x_k = u_{n_k}...u_{n_k+k}$. Par définition de la topologie $S^{n_k}u \to x$. $\square$

Proposition 4 *Le point u du sytème dynamique $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ est uniformément récurrent ssi pour tout mot $w \in \mathcal{L}(u)$, il existe un entier n tel que tout $v \in \mathcal{L}(u)$ de longueur $\geq n$, contienne w.*

Définition 5 *Une suite $u \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ est uniformément récurrente si pour tout mot $w \in \mathcal{L}(u)$, il existe un entier n tel que tout $v \in \mathcal{L}(u)$ de longueur $\geq n$, contienne w.*

Démonstration. Supposons u uniformément récurrent et soit $w \in \mathcal{L}(u)$. Il existe un mot m tel que $p = mw$ soit un préfixe de u. Soit W l'ensemble des mots x dont p est un préfixe, i.e. $W = [0, p]$. Comme le point u est uniformément récurrent, il existe une suite d'entier ≥ 1 $(n_k)_{k\geq 0}$, $n_0 = 0$, strictement croissante tel que $S^{n_k}x \in W$ et $n_{k+1} - n_k \leq N$ pour tout k. Cela signifie que pour chaque k, le mot p apparait dans u à la position n_k. Soit $v = v'v'' \in \mathcal{L}(u)$ où $|v| = N$ et longueur de $|v'| \geq |p|$. $v' = u_i...u_j$ et $v' = u_{j+1}...u_l$. Comme $j - i + 1 = N$, il existe k tel que $i \leq n_k \leq j$ et donc p est un sous mot de v.

Réciproquement. Soit W le voisinage de u défini par le préfixe w de u. Soit n associé à w. Alors pour tout k, le mot w apparait dans u entre les positions kn et $(k+1)n$, donc il existe $n_k \in [kn, (k+1)n]$ tel que $T^{n_k}u = w$. $\square$

Exemples.
1. Si u est périodique alors la suite est uniformément récurrente.
2. $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. $\mathcal{A}^+ = \cup_{n\geq 1}\mathcal{A}^n$ ensemble de tous les mots de longueur > 0. On numérote les mots de $\mathcal{A}^+$, $w_1, w_2, ...$ On définit la suite $u = w_1w_2...w_n...$ par concaténation de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$. Il est clair que chaque $w \in \mathcal{A}^+$ apparait une infinité de fois. Question : est-elle uniformément récurrente ? (réponse après la proposition suivante)
3. Si u est le codage de $x \in \mathbf{T}^1$ associé à une translation irrationnelle et une partition en nombre fini d'intervalles alors u est uniformément récurrente (**exercice**).

Proposition 5 *Le système dynamique $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ est minimal ssi la suite u est uniformément récurrente.*

Démonstration. On sait que si un système dynamique est minimal alors tout point est uniformément récurrent. Réciproquement, supposons u uniformément récurrent. Soit $x \in X$ et W un ouvert non vide de X. On peut supposer que $W = X \cap [0, w]$ où $w \in \mathcal{A}^*$. Comme $\mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)$, un préfixe v de x de longueur assez grande contient w. Par conséquent, $S^n x \in W$ pour au moins un $n \leq |v|$. $\square$

Réponse, exemple 2 : La suite $(S^n u)$ est dense dans $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ donc $X = \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ ainsi la suite constante $00...0... \in X$. Par conséquent (X, S) n'est pas minimal et u n'est pas uniformément récurrente.

Proposition 6 *Le système dynamique* $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ *est uniquement ergodique ssi pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ *et pour tout* $j \in \mathbf{N}$*, la limite*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^{n+j}(u)$$

existe, la convergence étant uniforme en j*.*

Démonstration. On sait que S est uniquement ergodique ssi $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n$ converge uniformément sur X vers une constante pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Comme $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^{n+j}(u) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n(S^j u)$, la convergence uniforme sur X implique la convergence uniforme en j. Il reste donc à prouver que la convergence uniforme en j est suffisante pour avoir l'unique ergodicité. Il suffit de montrer que $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n$ converge simplement vers une constante pour tout $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Remarquons d'abord que la limite ne dépend pas de j :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^{n+j}(u) &= \frac{N+j}{N}\Big(\frac{1}{N+j}\sum_{n=0}^{N+j-1} f \circ S^{n+j}(u) - \frac{1}{N+j}\sum_{n=0}^{j-1} f \circ S^n(u)\Big)\\ &\to \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n(u) = l_0.\end{aligned}$$

Soit $x \in X$. Par définition de X, il existe une suite $(n_k)_k$, d'entiers ≥ 0, telle que $x = \lim_{k\to\infty} S^{n_k} u$. Considérons la suite de fonctions $F_N : k \in \mathbf{N} \to \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^{n+n_k}(u)$. Par hypothèse, la suite $(F_N)_N$ converge uniformément sur $\mathbf{N}$ vers la fonction constante $F \equiv l_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} l_0 &= \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty} F_N(k)\\ &= \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty} F_N(k)\\ &= \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^{n+n_k}(u)\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n(x). \ \square\end{aligned}$$

Corollaire 1 *Le système* $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ *est uniquement ergodique ssi chaque facteur de u apparait dans u avec une fréquence uniforme :* $\forall w \in \mathcal{L}(u)$, $\forall j \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1_{[w]} \circ S^{k+j}(u)$$

converge uniformément en j *vers une limite* l_w *indépendante de* j*. Dans ce cas l'unique mesure probabilité est donnée par*

$$\mu([w]) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1_{[w]} \circ S^k(u).$$

Dem. Il suffit d'utiliser que l'ensemble des fonctions indicatrices de cylindres est total dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. $\square$

Remarque. Si la limite $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1_{[w]} \circ S^k(u)$ est strictement positive pour chaque mot $w \in \mathcal{L}(u)$ alors (X, S) est strictement ergodique.

Exercice 1. Soit $u \in \{1, ..., k\}^{\mathbf{N}}$ le codage d'un élément $x \in \mathbf{T}^1$ associée à une translation irrationnelle τ_α et à une partition en un nombre fini d'intervalles $I_1, ..., I_k$ non réduits à un point.
a. Soit $w = w_0...w_n \in \{1, ..., k\}^{\mathbf{N}}$ et $I_w = \cap_{i=0}^n \tau_\alpha^{-i} I_{w_i}$. Démontrer que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1_{[w]} \circ S^k(u) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1_{I_w} \circ \tau_\alpha^k(x) = |I_w|$$

où $|I_w|$ désigne la longueur de I_w.
b. En déduire que le système dynamique $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ est uniquement ergodique.

Exercice 2. Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ et u le mot de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ défini par : pour chaque $n \geq 0$, $u_i = 0$ si $i \in [s_n, s_n + n[$, $u_i = 1$ si $i \in [s_n + n, s_{n+1}[$.
a. Montrer que tout mot $w \in \mathcal{L}(u)$ a un fréquence dans u.
b. Montrer que $(X = \overline{\mathcal{O}(u)}, S)$ n'est ni minimal ni uniquement ergodique.