

SUBSTITUTIONS

Nicolas Chevallier 2011

1 Introduction : substitution de Fibonacci

Commençons par décrire une situation particulière où une substitution est naturellement associée à une translation du tore $\mathbf{T}^1$ et à un codage défini par cette translation.

Soit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2}$. α est solution de l'équation $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$. Soit $\tau : \mathbf{T}^1 \rightarrow \mathbf{T}^1$ définie par $\tau(x) = x + \alpha$. Identifions $\mathbf{T}^1$ à l'intervalle $[0, 1[$ et considérons la partition du tore $\mathbf{T}^1 = [0, 1 - \alpha[\cup [1 - \alpha, 1[= I_0 \cup I_1$. Sur I_0 , $\tau(x) = x + \alpha$ et sur I_1 , $\tau(x) = x + \alpha - 1$.

1. Déterminons l'application τ_1 de premier retour dans I_1 .

On a

$$J_0 = \tau^{-1}(I_1) \cap I_1 = \{x \in I_1 : \tau(x) \geq 1 - \alpha\} = [2 - 2\alpha, 1[.$$

Posons $J_1 = I_1 \setminus J_0 = [1 - \alpha, 2 - 2\alpha[$. On a

$$\tau(J_1) = [1 - \alpha + (\alpha - 1), 2 - 2\alpha + (\alpha - 1)[= I_0$$

et

$$\tau^2(J_1) = \tau(I_0) = [\alpha, 1[\subset I_1.$$

Par conséquent,

$$\tau_1(x) = \begin{cases} \tau^2(x) = x + 2\alpha - 1 & \text{si } x \in J_1 \\ \tau(x) = x + \alpha - 1 & \text{si } x \in J_0 \end{cases}.$$

2. Conjugaisons. Remarquons que

$$\frac{l(J_1)}{l(I_1)} = \frac{2 - 2\alpha - (1 - \alpha)}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \alpha$$

Cela suggère que τ et τ_1 sont conjuguées. Vérifions le. Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1[&\rightarrow I_1 \\ : x &\rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 - \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

φ est une bijection bi-mesurable. Pour $x \in I_0^0$,

$$\varphi(x) = 1 - \alpha x \in]1 - \alpha(1 - \alpha), 1[=]2 - 2\alpha, 1[= J_0^0,$$

donc

$$\tau_1 \circ \varphi(x) = \tau(1 - \alpha x) = 1 - \alpha x + \alpha - 1 = \alpha - \alpha x,$$

et

$$\begin{aligned} \tau_1 \circ \varphi(0) &= \tau_1(1 - \alpha) = \tau^2(1 - \alpha) \\ &= 1 - \alpha + \alpha - 1 + \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Pour $x \in I_1^0$,

$$\varphi(x) = 1 - \alpha x \in]1 - \alpha, 1 - \alpha(1 - \alpha)[=]1 - \alpha, 2 - 2\alpha[= J_1^0,$$

donc

$$\tau_1 \circ \varphi(x) = \varphi(x) + \alpha - 1 + \alpha = 2\alpha - \alpha x,$$

et

$$\tau_1 \circ \varphi(1 - \alpha) = \tau_1(2 - 2\alpha) = 2 - 2\alpha + \alpha - 1 = 1 - \alpha.$$

De même, pour $x \in I_0$,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \tau(x) &= \varphi(x + \alpha) = 1 - \alpha(x + \alpha) = \alpha - \alpha x \\ &= \tau_1 \circ \varphi(x), \end{aligned}$$

et pour $x \in I_1^0$,

$$\begin{aligned}\varphi \circ \tau(x) &= \varphi(x + \alpha - 1) = 1 - \alpha(x + \alpha - 1) \\ &= 1 + (\alpha - 1) + \alpha - \alpha x = 2\alpha - \alpha x \\ &= \tau_1 \circ \varphi(x),\end{aligned}$$

enfin,

$$\varphi \circ \tau(1 - \alpha) = \varphi(0) = 1 - \alpha = \tau_2 \circ \varphi(1 - \alpha).$$

3. Codages. Codons les éléments de $x \in [0, 1[$ par $\pi(x) = (a_i)_{i \geq 0}$ définie par

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau^i(x) \in I_0 \\ 1 & \text{si } \tau^i(x) \in I_1 \end{cases}$$

et les éléments $x \in I_1$ par $\pi'(x) = (a'_i)_{i \geq 0}$ définie par

$$a'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau_1^i(x) \in J_0 \\ 1 & \text{si } \tau_1^i(x) \in J_1 \end{cases}.$$

4. Substitutions. Il y a une relation simple entre $\pi(x)$ et $\pi'(x)$ pour $x \in I_1$. Appelons n_i le $i^{\text{ème}}$ temps de retour dans I_1 .

- Si $y = \tau_1^i(x) = \tau^{n_i}(x) \in J_1$ alors $y \in I_1$, $\tau(y) \in I_0$ et $\tau^2(y) \in I_1$, par conséquent $\tau^{n_i}(x) \in I_1$ et $\tau^{n_i+1}(x) \in I_0$. On a aussi $\tau^{n_i+2}(x) \in I_1$.

- Si $y = \tau_1^i(x) = \tau^{i_n}(x) \in J_0$ alors $y \in I_1$ et $\tau(y) \in I_1$.

Ainsi

$$\begin{aligned}a'_i = 1 &\Rightarrow a_{n_i} = 1 \text{ et } a_{n_i+1} = 0, \\ a'_i = 0 &\Rightarrow a_{n_i} = 1.\end{aligned}$$

Comme la suite n_i vérifie $n_{i+1} = n_i + 2$ si $a'_i = 1$ et $n_{i+1} = n_i + 1$ si $a'_i = 0$ on vérifie que la suite $\pi(x)$ est l'image de $\pi'(x)$ par la "substitution"

$$\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

définie par $\sigma(0) = 1$ et $\sigma(1) = 10$.

4. Points fixes. L'unique point fixe de φ est α , vérifions que son codage $\pi(\alpha)$ est l'unique point fixe de σ . En effet, comme $\varphi(I_i^0) = J_i^0$ un point x dont la trajectoire ne passe jamais par une extrémité des I_i a le même codage que le point $\varphi(x)$. Or pour tout $n \geq 1$, on a jamais $n\alpha = 0$ ou $-\alpha$ modulo 1 car α est irrationnel. Donc $\pi(\alpha) = \pi'(\varphi(\alpha)) = \pi'(\alpha) = \sigma(\pi(\alpha))$.

2 Généralités sur les substitutions

Notations et vocabulaire. 1. Dans toute la suite du chapitre $\mathcal{A}$ désigne un alphabet fini ayant au moins deux éléments.

2. $\mathcal{A}^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ est l'ensemble des mots de longueur finie. Par convention, l'unique élément de $\mathcal{A}^0$ est le mot vide ε .

3. $\mathcal{A}^+ = \cup_{n \geq 1} \mathcal{A}^n$ est l'ensemble des mots de longueur finie non nulle.

4. Si $w \in \mathcal{A}^n$, $n = |w|$ désigne la longueur du mot w .

5. **Concaténation.** Soit v et w deux mots $\in \mathcal{A}^*$. Le mot $u = vw$ est la concaténation de v et w (dans cet ordre!).

6. **Préfixe, suffixe.** Soit v et w deux mots $\in \mathcal{A}^*$. v est un préfixe (rep. un suffixe) de w si il existe un mot u tel que $w = vu$ (resp. $w = uv$).

7. **Facteur.** Soit v et w deux mots $\in \mathcal{A}^*$. v est un facteur (un sous-mot) de w si il existe des mots u et u' tels que $w = uvu'$.

Définition 1 Une substitution ζ sur $\mathcal{A}$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^+$.

Prologement. Une substitution $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^+$ se prolonge à $\mathcal{A}^*$ par concaténation :

$$\begin{aligned}\zeta(\varepsilon) &= \varepsilon, \\ \zeta(w_1 \dots w_n) &= \zeta(w_1) \dots \zeta(w_n)\end{aligned}$$

pour tout $w_1 \dots w_n \in \mathcal{A}^+$. Le prolongement obtenu $\zeta : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ est un morphisme du monoïde $(\mathcal{A}^*, \text{concaténation})$.

Remarque. Un morphisme du monoïde $\mathcal{A}^*$ est entièrement défini par l'image des éléments de $\mathcal{A}$. Si les images des éléments de $\mathcal{A}$ ne sont jamais le mot vide alors ce morphisme est défini par une substitution.

ζ se prolonge à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de la même manière par

$$\zeta(w_0 \dots w_n \dots) = \zeta(w_0) \dots \zeta(w_n) \dots$$

Langage et sous-décalage. Le langage de la substitution ζ est l'ensemble :

$$\mathcal{L}_\zeta = \{\text{facteurs de } \zeta^n(\alpha) : n \geq 0, \alpha \in \mathcal{A}\}$$

et le sous-décalage associé à ζ est la restriction du décalage S à

$$X_\zeta = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}_\zeta\}.$$

Lemme 1 Soit ζ une substitution sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$. Si α est un préfixe de $\zeta(\alpha)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta^n(\alpha)$ est un préfixe de $\zeta^{n+1}(\alpha)$.

Démonstration. Si $\zeta^n(\alpha) = \zeta^{n-1}(\alpha)w$ alors $\zeta^{n+1}(\alpha) = \zeta(\zeta^n(\alpha)w) = \zeta^n(\alpha)\zeta(w)$ et le lemme en découle par récurrence. $\square$

Proposition 1 Si ζ est une substitution sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, alors il existe un mot infini $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et un entier $k \geq 1$ tels que $\zeta^k(u) = u$ (u est un point périodique).

Si l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta^n(\alpha)| = \infty$ est valable pour toute lettre $\alpha \in \mathcal{A}$, alors il existe un point périodique $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de la forme

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^{kn}(\beta)$$

où $\beta \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est fini, il existe des entiers $q > p \geq 1$ tels que $\zeta^p(\alpha)$ et $\zeta^q(\alpha)$ débutent par la même lettre β . Soit $k = q - p$. Si $\zeta^k(\beta) = \beta$ alors $u = \beta\beta\dots\beta\dots$ vérifie $\zeta^k(u) = u$. Si $|\zeta^k(\beta)| \geq 2$, alors $|\zeta^{kn}(\beta)| \geq n + 1 \rightarrow \infty$. De plus, le lemme précédent montre que $\zeta^{kn}(\beta)$ est un préfixe de $\zeta^{k(n+1)}(\beta)$. Cela permet de définir un mot $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par u_i la i -ème lettre de $\zeta^{kn}(\beta)$ pour tout n tel que $|\zeta^{kn}(\beta)| \geq i + 1$. Par construction $\zeta^k(u) = u$. $\square$

Hypothèses

- (i) $\forall \alpha \in \mathcal{A}, \lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta^n(\alpha)| = \infty$,
- (ii) $\exists \alpha_0 \in \mathcal{A}, \zeta(\alpha_0) = \alpha_0 \dots$

Remarques. 1. Généralement, on se ramène à l'hypothèse (ii) en considérant une puissance de ζ .

2. Attention on n'a pas toujours $\mathcal{L}_{\zeta^k} = \mathcal{L}_\zeta$. Exemple : $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ et $\zeta(0) = 1, \zeta(1) = 2, \zeta(2) = 22$.

Notation. Lorsqu'une lettre α est telle que $\zeta(\alpha)$ débute par α , on note $\zeta^\infty(\alpha)$ le point fixe défini par les itérés de $\zeta^n(\alpha)$.

Exemple. $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, $\zeta(0) = 01$ et $\zeta(1) = 10$ admet deux points fixes

$$\begin{aligned}\zeta^\infty(0) &= 0110101001\dots \\ \zeta^\infty(1) &= 1001010110\dots\end{aligned}$$

La suite $u = \zeta^\infty(0)$ s'appelle la suite de Thue-Morse. Cette suite n'est pas périodique, ni à partir d'un certain rang car :

$$u = \zeta(u_0)\zeta(u_1)\dots\zeta(u_k) = (u_0u_1)(u_2u_3)\dots(u_{2k}u_{2k+1})$$

et donc $u_{2k} = u_k$ et $u_{2k+1} \neq u_k$ pour tout k . Si $p \geq 2$ était une période, on aurait avec $k = p - 1$, $u_k = u_{k+p} = u_{2k+1}$ mais cela contredit $u_{2k+1} \neq u_k$. Pour la périodicité à partir d'un certain rang, il suffit de prendre une période p plus grande que le rang à partir duquel la suite est périodique.

3 Minimalité des substitutions primitives

Proposition 2 *Soit ζ une substitution vérifiant (i) et (ii). Le système dynamique $(X = \overline{\mathcal{O}(u = \zeta^\infty(\alpha_0))}, S)$ est minimal ssi pour toute lettre α apparaissant dans u , il existe $k \geq 1$ tel que $\zeta^k(\alpha)$ contienne la lettre α_0 .*

Démonstration. Si le système est minimal la suite u est uniformément récurrente, par conséquent tout facteur w de u est un facteur de tout facteur de u de longueur assez grande. Si α est une lettre de u alors $\zeta^k(\alpha)$ est un facteur de u et comme $\lim_{k \rightarrow \infty} |\zeta^k(\alpha)| = \infty$, pour k assez grand w est un facteur de $\zeta^k(\alpha)$. Ce qui montre que $w = \alpha_0$ apparaît dans $\zeta^k(\alpha)$ lorsque k est assez grand. Réciproquement, supposons que pour toute lettre α apparaissant dans u , il existe $k \geq 1$ tel que $\zeta^k(\alpha)$ contienne la lettre α_0 . Si $\zeta^k(\alpha) = v\alpha_0w$ alors $\zeta^{k+1}(\alpha) = \zeta(v)\zeta(\alpha_0)\zeta(w)$ contient aussi α_0 . Par conséquent, on peut trouver un entier k_0 tel que $\zeta^{k_0}(\alpha)$ contienne α_0 pour tout lettre α de u . Cela montre que tout facteur de u de longueur $\geq N = 2 \times \max\{|\zeta^{k_0}(\alpha)| : \alpha \in \mathcal{A}\}$ contient α_0 . Si w est facteur quelconque, il existe n_0 tel que w soit un facteur de $\zeta^{n_0}(\alpha_0)$. Maintenant si $u = m_1m_2\dots$ où chaque m_i est un mot contenant α_0 et de longueur $\leq N$ alors $u = \zeta^{n_0}(m_1)\zeta^{n_0}(m_2)\dots$ et chaque facteur $\zeta^{n_0}(m_i)$ contient w et a une longueur majorée indépendamment de i . $\square$

Définition 2 1. Une substitution ζ sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ est irréductible si pour toute couple de lettre (α, β) , il existe un entier $k \geq 1$ tel que β soit une lettre de $\zeta^k(\alpha)$.
2. ζ est primitive si il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout couple de lettre (α, β) , β soit une lettre de $\zeta^k(\alpha)$.

Observons que la condition (i) est automatiquement satisfaite par une substitution primitive ($\text{card } \mathcal{A} \geq 2$) et que la condition (ii) est satisfaite par une puissance de la substitution.

Lemme 2 *Soit ζ une substitution sur un alphabet fini $\mathcal{A}$.*

1. Si ζ est primitive, alors il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout couple de lettre (α, β) , β soit une lettre de $\zeta^k(\alpha)$.
2. Supposons que ζ vérifie (ii). Alors ζ irréductible $\Rightarrow \zeta$ primitive.

Démonstration. 1. Supposons ζ primitive. Soit k_0 tel que pour tout couple de lettre (α, β) , β soit une lettre de $\zeta^{k_0}(\alpha)$. Si $k \geq k_0$, $\zeta^k(\alpha) = \zeta^{k_0}(w)$ où le mot $w = \zeta^{k-k_0}(\alpha)$ contient au moins une lettre, son image par ζ^{k_0} contient donc β .
2. Soit $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tel que α_0 soit un préfixe de $\zeta(\alpha_0)$. Supposons ζ irréductible. Pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe $n_\alpha \geq 1$ tel que α soit un facteur $\zeta^{n_\alpha}(\alpha_0)$. Comme les $\zeta^n(\alpha_0)$ se prolongent mutuellement, les mots $\zeta^n(\alpha_0)$ où $n \geq m = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} n_\alpha$, contiennent tous, toutes les lettres de $\mathcal{A}$. De plus pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe k_α tel que α_0 soit un facteur de $\zeta^{k_\alpha}(\alpha)$. Prenons $k = m + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} k_\alpha$. Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Comme $n = k - k_\alpha \geq m$, le mot $\zeta^k(\alpha) = \zeta^n(\zeta^{k_\alpha}(\alpha))$ contient toutes les lettres de $\mathcal{A}$. $\square$

Proposition 3 *Si ζ est une substitution primitive sur un alphabet $\mathcal{A}$ alors pour tout entier $n \geq 1$, $X_\zeta = X_{\zeta^n}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{L}_\zeta = \mathcal{L}_{\zeta^n}$. Par définition, $\mathcal{L}_{\zeta^n} \subset \mathcal{L}_\zeta$. Inversement soit $w \in \mathcal{L}_\zeta$. Par définition w est un facteur de $\zeta^k(\alpha_w)$ pour un certain entier $k \geq 1$ et une certaine lettre α_w . Comme ζ est primitive, il existe un entier $p \geq 1$ tel que α_w soit un facteur de $\zeta^p(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $q \geq p$. w est donc un facteur $\zeta^{k+q}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $q \geq p$. Ainsi w est un facteur de $\zeta^{nm}(\alpha)$ pour m assez grand. $\square$

Proposition 4 *Si ζ est une substitution primitive sur un alphabet $\mathcal{A}$, alors $\overline{\mathcal{O}(u)} = X_\zeta$ pour tout point fixe $u \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ de ζ .*

Démonstration. Comme X_ζ est fermé et comme $u \in X_\zeta$, $\overline{\mathcal{O}(u)} \subset X_\zeta$. Inversement, soit $v \in X_\zeta$ et w un préfixe de v . w un facteur $\zeta^n(\alpha)$ pour un certain n et une certaine lettre α . On sait que α est une lettre de $\zeta^k(\alpha_0)$ où α_0 est la première lettre de u , donc w est un facteur de $\zeta^{n+k}(\alpha_0)$. Par conséquent w est un facteur de u et donc $S^m u \in [w]$ pour un certain entier m . $\square$

Proposition 5 *Soit ζ une substitution vérifiant (i) et (ii). Supposons $\mathcal{A} \subset \cup_{n \geq 1} \mathcal{L}(\zeta^n(\alpha_0))$. Le système dynamique (X_ζ, S) est minimal ssi ζ est primitive.*

Démonstration. Supposons ζ primitive. D'après la proposition précédente, $X_\zeta = \overline{\mathcal{O}(u = \zeta^\infty(\alpha_0))}$. De plus par définition de la primitivité, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe n tel que α_0 soit une lettre de $\zeta^n(\alpha)$. Comme ζ vérifie (i) et (ii), d'après la première proposition du paragraphe, (X_ζ, S) est minimal. Réciproquement, si (X_ζ, S) est minimal alors $\overline{\mathcal{O}(u)} = X_\zeta$. Par hypothèse $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(u)$, donc pour tout lettre $\beta \in \mathcal{A}$, il existe k_β tel que $\beta \in \mathcal{L}(\zeta^{k_\beta}(\alpha_0))$. Pour chaque lettre β , $\beta \in \mathcal{L}(\zeta^{k_\beta+1}(\alpha_0))$ car α_0 apparaît dans $\zeta(\alpha_0)$. Donc, $\beta \in \mathcal{L}(\zeta^n(\alpha_0))$ pour tout $n \geq k_\beta$. Donc il existe N tel que pour tout $\beta \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{L}(\zeta^N(\alpha_0))$. Enfin par minimalité, il existe l tel que α_0 soit un facteur de tout facteur w de u de longueur $\geq l$. D'après (i), il existe M tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, la longueur de $\zeta^M(\alpha)$ soit $\geq l$. On en déduit que toute lettre β apparaît dans $\zeta^{N+M}(\alpha)$ quelque soit la lettre α . $\square$

4 Matrice d'une substitution

Notation. Pour un mot w de $\mathcal{A}^*$ et α une lettre, $|m|_\alpha$ désigne le nombre d'occurrences de α dans w et $L(w)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^{\mathcal{A}}$ dont les composantes sont les $|m|_\alpha$.

Définition 3 Soit ζ une substitution sur $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$. La matrice de $M = M(\zeta) \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ est définie par

$$M_{ij} = |\zeta(j)|_i$$

Proposition 6 Soit ζ une substitution sur $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$ de matrice $M = M(\zeta)$. Pour un mot $w \in \mathcal{A}^*$, on a

$$L(\zeta(w)) = ML(w).$$

Remarque. La matrice M est "l'abélianisée" de la substitution ζ .

La matrice d'une substitution est définie pour n'importe quel alphabet fini en numérotant les éléments de l'alphabet. Il est clair que si ζ et ζ' sont deux substitutions sur un même alphabet, alors $M(\zeta \circ \zeta') = M(\zeta)M(\zeta')$.

Définition 4 Soit matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ à coefficients positifs.

1. On dit que M est irréductible si pour tout i et j , il existe $k \geq 1$ tel que $m_{ij}^{(k)} > 0$ où les $m_{ij}^{(k)}$ sont les coefficients de la matrice M^k .
2. On dit que M est primitive si il existe k tel que pour tout i et j , $m_{ij}^{(k)} > 0$.

On vérifie facilement que M irréductible $\Leftrightarrow \zeta$ irréductible et que M primitive $\Leftrightarrow \zeta$ primitive.

Notation. Pour $X \in \mathbf{R}^d$, $|X|$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^d$ dont les composantes sont les valeurs absolues de celles de X . Une inégalité $X \geq Y$ ou $X > Y$ signifie que les composantes de X sont $\geq$ ou $>$ à celles de Y .

Théorème 1 (Perron-Frobenius). Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients positifs. Supposons M primitive. Alors il existe une valeur propre $\theta \geq 0$ telle que

- toutes les autres valeurs propres de M ont un module $< \theta$ (θ est dominante),
- θ est simple (la multiplicité de θ dans le polynôme caractéristique est 1),
- il existe un vecteur propre X_θ à composantes > 0 associé à la valeur propre θ .
- pour tout $Y \in \mathbf{R}^d$, $Y \geq 0$ et $MY \geq \theta Y \Rightarrow MY = \theta Y$.

Démonstration. 1. Fixons n_0 tel que tous les coefficients $m_{ij}^{(n_0)}$ de M^{n_0} soient > 0 . Soit $\theta = \sup\{\lambda \geq 0 : \exists X \in \mathbf{R}_{\geq 0}^d, X \neq 0, MX \geq \lambda X\}$. $\theta > 0$ car si $X \neq 0$ a ses composantes ≥ 0 alors $MM^{n_0}X > 0$ et donc $MM^{n_0}X > \varepsilon M^{n_0}X$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On peut normaliser les X non nuls de $\mathbf{R}_{\geq 0}^d$ par la somme de leurs composantes = 1. Soit (X_n) et (λ_n) tels que $\lambda_n \rightarrow \theta$ et $M_n X_n \geq \lambda_n X_n$ pour tout n . A extraction près, on peut supposer que $X_n \rightarrow X_\theta$. On a alors $MX_\theta \geq X_\theta$.

2. Montrons que si Y est vecteur non nul dont les composantes sont ≥ 0 , alors l'inégalité $MY \geq \theta Y$ entraîne $MY = \theta Y$. Supposons que l'une des composantes de $Z = MY - \theta Y$ soit > 0 . Comme tous les coefficients de M^{n_0} sont > 0 , on a $M^{n_0}Z \geq \varepsilon M^{n_0}Y$ où $\varepsilon > 0$. Par conséquent,

$$MM^{n_0}Y = M^{n_0}MY = M^{n_0}(\theta Y + Z) \geq (\theta + \varepsilon)M^{n_0}Y$$

ce qui contredit la définition de θ .

3. Par conséquent, $MX_\theta = \theta X_\theta$. De plus, comme $M^{n_0}X_\theta = \theta^{n_0}X_\theta$, les composantes de X_θ sont > 0 .

4. Montrons que $\dim(\ker M - \theta I) = 1$. Sinon il existe un vecteur propre X associé à θ indépendant de X_θ . Pour un bon choix de $t > 0$ et s on peut supposer que les coordonnées de $Y = tX_\theta + sX$ sont ≥ 0 et qu'au moins l'une d'entre elles est nulle. Cela contredit le fait que toutes les coordonnées de $\theta^{n_0}Y = M^{n_0}Y$ sont > 0 .

5. Soit $X = (x_i)_{i=1,\dots,d}$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbf{C}$. On suppose $\lambda \neq \theta$. Si $|\lambda| \geq \theta$, alors $M|X| \geq |MX| = |\lambda X| = |\lambda||X| \geq \theta|X|$ donc $|X|$ est X_θ sont proportionnels et $M|X| = \theta|X|$. Maintenant, X n'est pas proportionnel à $|X|$ car X et X_θ sont linéairement indépendants. Par conséquent, pour un i quelconque,

$$|\lambda^{n_0}x_i| = \left| \sum_{j=1}^d m_{ij}^{(n_0)} x_j \right| < \sum_{j=1}^d m_{ij}^{(n_0)} |x_j| = \theta^{n_0} |x_i|$$

ce qui contredit $|\lambda| \geq \theta$.

6. Supposons $(\ker M - \theta I)^2 \neq (\ker M - \theta I)$. Soit $Y \in (\ker M - \theta I)^2 \setminus (\ker M - \theta I)$. $X = MY - \theta Y \in \ker(M - \theta I) \setminus \{0\}$. Une récurrence facile montre que

$$M^n Y = \theta^n Y + n\theta^{n-1} X.$$

Pour n assez grand, $n|X| \geq 3\theta|Y|$ car $X = aX_\theta$ et les composantes de X_θ sont > 0 . On en déduit que

$$M^n |Y| \geq \theta^{n-1}(n|X| - \theta|Y|) \geq 2\theta^n |Y|.$$

En appliquant les points 1 et 2 à M^n , on en déduit que M^n a une valeur propre de module $\geq 2\theta^n$. Or les valeurs propres de M^n ont toutes un module $\leq \theta^n$ (il existe une base dans laquelle M est triangulaire), d'où une contradiction. $\square$

Corollaire 1 Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients positifs. Supposons M primitive. Appelons θ la valeur propre dominante de M , $X_d > 0$ un vecteur propre à droite de M et $X_g > 0$ un vecteur propre à gauche tel que $X_g^t X_d = 1$. Alors pour tout vecteur $X \in \mathbf{R}^d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta^n} M^n X = (X_g^t X) X_d.$$

De plus la vitesse de convergence de la suite est géométrique.

Démonstration. Comme la multiplicité de θ est 1, le polynôme caractéristique de M est de la forme $\varkappa(\lambda) = (-1)^d(\lambda - \theta)Q(\lambda)$ où $Q(\theta) \neq 0$. Appelons μ le maximum des modules des racines de Q . D'après le théorème précédent $\mu < \theta$. Il existe des polynômes A et B tels que $A(\lambda - \theta) + BQ = 1$. Considérons les matrices $R = A(M)(M - \theta I)$ et $P_\theta = B(M)Q(M)$. La relation $A(\lambda - \theta) + BQ = 1$ montre que $I = P_\theta + R$. Comme $\varkappa(M) = 0$, on a $MP_\theta = P_\theta$, donc $M^n = \theta^n P_\theta + M^n R$. Le sous espace $F = \text{Im } R$ est stable par M et le polynôme Q annule la restriction de M à F . Par conséquent, les valeurs propres de la restriction de M à F ont un module $\leq \mu$. La décomposition en diagonal + nilpotent, montre alors que pour tout $Y \in F$,

$$\|M^n Y\| \leq C_1 \mu^n n^d \|Y\|,$$

et donc pour tout $X \in \mathbf{R}^d$,

$$\|M^n R X\| \leq C_1 \mu^n n^d \|R X\| \leq C \mu^n n^d \|X\|$$

On en déduit que la suite de matrices $\frac{1}{\theta^n} M^n$ converge vers la matrice P_θ à une vitesse géométrique. Comme $\varkappa(M) = 0$, $(M - \theta I)P_\theta = 0$, donc pour tout $X \in \mathbf{R}^d$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $P_\theta X = aX_d$. Finalement,

$$\frac{1}{\theta^n} X_g^t M^n X = X_g^t X \rightarrow X_g^t (P_\theta X) = a X_g^t X_d = a,$$

donc $a = X_g^t X$ et $\frac{1}{\theta^n} M^n X \rightarrow P_\theta X = (X_g^t X) X_d$. $\square$

5 Unique ergodicité

Nous avons vu que l'unique ergodicité d'un système dynamique défini par une suite u de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est liée à la fréquence d'apparition des mots dans la suite u . Commençons par les mots réduits à une lettre.

5.1 Fréquence des lettres

Proposition 7 Soit ζ une substitution primitive sur $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$ ($d \geq 2$) de matrice M . Alors pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\zeta^n(\alpha))}{|\zeta^n(\alpha)|} = X_d, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta^n(\alpha)|}{\theta^n} = (X_g L(\alpha))$$

où X_d est un vecteur propre positif à droite associé à la valeur propre dominante de M dont la somme des composantes vaut 1 et X_g est un vecteur propre positif à gauche associé à la valeur propre dominante de M tel que $X_g^t X_d = 1$. De plus la vitesse de convergence est géométrique.

Démonstration. Par définition de la matrice M , $L(\zeta^n(\alpha)) = M^n L(\alpha)$. Comme M est primitive, grâce au corollaire précédent, on obtient, avec une vitesse de convergence géométrique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\zeta^n(\alpha))}{\theta^n} = (X_g^t L(\alpha)) X_d$$

où θ est la valeur propre dominante et X_g et X_d sont des vecteurs propres à gauche et à droite tels que $X_g^t X_d = 1$. On peut supposer que la somme des composantes de X_d est 1. Notons $\mathbf{1}$ le vecteur ligne de composantes 1, ..., 1. On a, avec une vitesse de convergence géométrique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta^n(\alpha)|}{\theta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{1} L(\zeta^n(\alpha))}{\theta^n} = (X_g^t L(\alpha)) \mathbf{1} X_d = (X_g^t L(\alpha)),$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\zeta^n(\alpha))}{|\zeta^n(\alpha)|} = X_d. \quad \square$$

On déduit de la démonstration :

Corollaire 2 Avec les mêmes hypothèses, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta^{n+1}(\alpha)|}{|\zeta^n(\alpha)|} = \theta.$$

où θ est la valeur propre dominante de la matrice de ζ .

Lemme 3 Soit ζ une substitution primitive sur $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$ ($d \geq 2$) de matrice M . Alors la valeur propre dominante θ de la matrice de ζ est > 1 .

Démonstration. Soit M la matrice de ζ . Comme ζ est primitive, il existe k tel que pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, $|\zeta^k(\alpha)| \geq 2$. Ainsi pour tout n , $|\zeta^{kn}(\alpha)| \geq 2^n$ donc d'après la proposition, $\theta^{kn} \geq c 2^n$ pour tout $n \geq 0$ ce qui montre que $\theta > 1$. $\square$

5.2 Fréquence des facteurs

Notation. Pour tout couple de mots $v, w \in \mathcal{A}^+$ on note $|v|_w$ le nombre d'occurrences de w dans v .

Proposition 8 Soit ζ une substitution primitive sur $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$ ($d \geq 2$) de matrice M et vérifiant (i) et (ii). Soit $m \in \mathcal{L}_\zeta$. Il existe un nombre $f_m \in]0, 1]$ tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta^n(\alpha)|_m}{|\zeta^n(\alpha)|} = f_m,$$

la vitesse de convergence étant géométrique.

Démonstration. 1. Soit $l = |m|$ et $\mathcal{A}_l$ l'ensemble des mots de longueurs l du langage $\mathcal{L}_\zeta$. On va utiliser le résultat sur la fréquence des lettres en introduisant une substitution ζ_l sur l'alphabet $\mathcal{A}_l$. Pour chaque entier $n \geq 0$, introduisons préalablement une application F_l de $\mathcal{L}_\zeta$ dans $\mathcal{A}_l^*$ définie par, si $N \geq l$

$$F_l(a_1 \dots a_N) = (a_1 \dots a_l)(a_{l+1} \dots a_{2l}) \dots (a_{N-l+1} \dots a_N),$$

et si $N < l$

$$F_l(a_1 \dots a_N) = \varepsilon$$

le mot vide. On définit de même F_l sur X_ζ . Pour un mot $w = w_1 \dots w_n$ et k un entier $\leq n$ notons $w_{\leq k} = w_1 \dots w_k$. Soit $w = w_1 \dots w_l \in \mathcal{A}_l$ et

$$v = v_1 \dots v_{|\zeta(w)|} = \zeta(w)$$

son image par ζ . Soit $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ une substitution telle que $\tau(\mathcal{L}_\zeta) \subset \mathcal{L}_\zeta$. On définit $\tau_l(w)$ par

$$\tau_l(w) = F_l(\tau(w)_{\leq |\tau(w_1)|+l-1}) = (v_1 \dots v_l)(v_{l+1} \dots v_{2l}) \dots (v_{|\tau(w_1)|+l-1} \dots v_{|\tau(w_1)|+l-1}).$$

On étend cette définition à $\mathcal{A}_l^*$ par concaténation. L'image de w par τ_l a donc le même nombre de lettre que $\tau(w_1)$.

Remarquons que pour tout mot $m \in \mathcal{L}_\zeta$, on a avec $M = F_l(m)$,

$$(1) \quad \tau_l(M) = F_l(\tau(m)_{\leq |\tau(m_{\leq |m|-l+1})|+l-1}).$$

2. Soit σ et τ deux substitutions laissant stable $\mathcal{L}_\zeta$. Montrons que $(\sigma \circ \tau)_l = \sigma_l \circ \tau_l$. Soit $w = w_1 \dots w_l \in \mathcal{A}_l$. Appliquons la formule précédente à τ et $\sigma \circ \tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \tau_l(w) &= F_l(\tau(w)_{\leq |\tau(w_1)|+l-1}) \\ (\sigma \circ \tau)_l(w) &= F_l(\tau(w)_{\leq |\sigma \circ \tau(w_1)|+l-1}), \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \sigma_l \circ \tau_l(w) &= \sigma_l(F_l(\tau(w)_{\leq |\tau(w_1)|+l-1})) \\ &= F_l(\sigma(\tau(w)_{\leq |\tau(w_1)|+l-1})_{\leq |\sigma(\tau(w_1))|+l-1}) \\ &= F_l(\sigma(\tau(w))_{\leq |\sigma(\tau(w_1))|+l-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent $(\sigma \circ \tau)_l = \sigma_l \circ \tau_l$.

3.

Lemme 4 Si $u = u_0 u_1 \dots$ est un point fixe de ζ alors la suite $U = F_l(u) = U_0 U_1 \dots$ est un point fixe de ζ_l .

Preuve du lemme. Comme $\zeta(u) = u$, $\zeta_l(U_0) = F_l(u_{0 \dots u_{|\zeta(u_0)|-1+l-1}})$, donc $\zeta_l(U_0)$ commence par la lettre U_0 . Cela montre que la suite $(\zeta_l)^n(U_0)$, $n \geq 0$, converge vers un point fixe V de ζ_l . Or d'après la formule (1) et l'égalité $(\zeta^n)_l = (\zeta_l)^n$,

$$(\zeta_l)^n(U_0) = (\zeta^n)_l(U_0) = F_l(\zeta^n(U_0)_{\leq |\zeta^n(u_0)|-1+l-1}) = F_l(u_{\leq |\zeta^n(u_0)|-1+l-1}) = U_{\leq |\zeta^n(u_0)|-1}.$$

Donc $U = V$. $\square$

4.

Lemme 5 Si ζ vérifie (i) et (ii), alors ζ primitive $\Rightarrow \zeta_l$ primitive

Démonstration. Comme ζ_l vérifie (ii), il suffit de prouver que ζ_l est irréductible. Soit w et $v \in \mathcal{A}_l$. Comme ζ est primitive, il existe n_0 tel que $\zeta^{n_0}(w)$ contienne la première lettre u_0 d'un point fixe u de ζ . Quitte à augmenter n_0 , on peut supposer que U_0 , la première lettre de $U = F_l(u)$, est un facteur de $\zeta^{n_0}(w)$ et donc une lettre de $\zeta_l^{n_0}(w)$. Comme $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{L}_\zeta = \mathcal{L}(u)$, $v \in \mathcal{L}(u)$. Par conséquent, v est une lettre de $F_l(u)$. Par conséquent, il existe n_1 tel que v soit une lettre de $\zeta_l^{n_1}(U_0)$. Finalement v est une lettre de $\zeta_l^{n_0+n_1}(w)$. $\square$

5.

Lemme 6 Si ζ primitive, alors pour tout $l \geq 2$, les matrices M et M_l de ζ et ζ_l ont la même valeur propre dominante.

Démonstration. D'après la proposition sur la fréquence des lettres,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta_l^{n+1}(w)|}{|\zeta_l^n(w)|} = \theta_l$$

pour tout $w \in \mathcal{A}_l$. Mais $|\zeta_l^n(w)| = |\zeta^n(w_1)|$, donc la même limite avec ζ , donne $\theta_l = \theta$. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition. D'après la proposition sur la fréquence des lettres, la suite $(\frac{L(\zeta_l^n(w))}{|\zeta_l^n(w)|})_n$ converge vers un vecteur strictement positif qui ne dépend pas de $w \in \mathcal{A}_l$. Or $\zeta_l^n(w) = F_l(\zeta^n(w)_{\leq |\zeta^n(w_1)|+l-1})$ donc pour tout $v \in \mathcal{A}_l$,

$$|\zeta^n(w_1)|_v \leq |\zeta_l^n(w)|_v \leq |\zeta^n(w_1)|_v + l.$$

Finalement, comme $|\zeta_l^n(w)| = |\zeta^n(w_1)|$, pour tout $v \in \mathcal{A}_l$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta_l^n(w)|_v}{|\zeta_l^n(w)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\zeta^n(w_1)|_v}{|\zeta^n(w_1)|} > 0$$

et ne dépend pas de w . $\square$

5.3 Unique ergodicité

Théorème 2 (P. Michel). Soit ζ une substitution sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ vérifiant (i) et (ii). Si ζ est primitive alors (X_ζ, S) est uniquement ergodique.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$ un point fixe de ζ . On sait que l'adhérence de orbite $\overline{\mathcal{O}(u)}$ sous l'action du décalage S est égale à X_ζ . Il suffit donc de vérifier que tout facteur w (de longueur fini) de u à une fréquence uniforme, i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} |u_j \dots u_{j+N}|_w = f_w$$

uniformément en j . Pour utiliser la proposition sur la fréquence limite des facteurs des mots de la forme $\zeta^n(\alpha)$, nous devons comparer les mots $u_j \dots u_{j+N}$ avec des mots de la forme $\zeta^n(\alpha)$.

Lemme 7 Soit ζ une substitution. Soit $v \in \mathcal{L}_\zeta$, $v \neq \varepsilon$, et $K = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} |\zeta(\alpha)|$. Il existe un entier $n \geq 0$ et $2n+1$ mots $v^0, \dots, v^n, w^{n-1}, \dots, w^0 \in \mathcal{A}^*$ (il n'y a pas de w^i lorsque $n=0$) tels que

$$v = v^0 \zeta(v^1) \dots \zeta^{n-1}(v^{n-1}) \zeta^n(v^n) \zeta^{n-1}(w^{n-1}) \dots \zeta(w^1) w^0,$$

$v_n \neq \varepsilon$ et $|v^i|, |w^i| \leq 2K$, $i = 0, \dots, n$.

Preuve du lemme. Par définition, pour chaque $v \in \mathcal{L}_\zeta$, il existe $\alpha \in \mathcal{A}$ et n tel que v soit un facteur de $\zeta^n(\alpha)$. Choisissons pour chaque v , α_v et n_v tels que n_v soit minimal. Prouvons le lemme par récurrence sur n_v . Si $|v| \leq 2K$, on prend $n=0$ et $v^0 = v$. Si $n_v \leq 1$ alors $|v| \leq K$ et le cas précédent s'applique. Supposons $n_v \geq 2$ et $|v| > 2K$. Il existe des mots u et w tels que

$$\begin{aligned} uvw &= \zeta^{n_v}(\alpha_v) = \zeta(\zeta^{n_v-1}(\alpha_v)) \\ &= \zeta(a_1 \dots a_m) = \zeta(a_1) \dots \zeta(a_m). \end{aligned}$$

Comme $|v| > 2K$, il existe i et j tels que $i+2 \leq j$ et le mot v soit un facteur $\zeta(a_i) \dots \zeta(a_j)$ mais ne soit un facteur ni de $\zeta(a_{i+1}) \dots \zeta(a_j)$ ni de $\zeta(a_i) \dots \zeta(a_{j-1})$. Par conséquent, il existe des mots v^0 et w^0 de longueur $\leq K$ et un facteur v' de $a_i \dots a_j$ contenant $a_{i+1} \dots a_{j-1}$, tels que

$$v = v^0 \zeta(v') w^0.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à v' car v' est facteur de $\zeta^{n_v-1}(\alpha_v)$. $\square$

Appliquons le lemme à $v = u_j \dots u_{j+N}$. On a

$$N + 1 = |v| = \sum_{i \leq n} |\zeta^i(v^i)| + \sum_{i < n} |\zeta^i(w^i)|.$$

Le facteur w peut apparaitre à l'intérieur des mots v^i ou w^i donc

$$|v|_w \geq \sum_{i \leq n} |\zeta^i(v^i)|_w + \sum_{i < n} |\zeta^i(w^i)|_w,$$

Le facteur w peut aussi débiter dans un v^i sans être un facteur de v^i , il y a au plus $|w|$ telles positions de w dans v^i , donc

$$|v|_w \leq \sum_{i \leq n} |\zeta^i(v^i)|_w + \sum_{i < n} |\zeta^i(w^i)|_w + (2n + 1) |w|.$$

La proposition sur la fréquence des facteurs dit que pour chaque lettre $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\left| \frac{|\zeta^i(\alpha)|_w}{|\zeta^i(\alpha)|} - f_w \right| \leq C \rho^i$$

où $\rho \in [0, 1[$ et donc $||\zeta^i(\alpha)|_w - f_w |\zeta^i(\alpha)|| \leq C \rho^i |\zeta^i(\alpha)|$. En sommant sur les lettres d'un mot, on obtient pour tout mot m , en tenant compte de l'apparition eventuelle de w dans $\zeta^i(m)$ sans être facteur de $\zeta^i(m_j)$,

$$||\zeta^i(m)|_w - f_w |\zeta^i(m)|| \leq C \rho^i |\zeta^i(m)| + |m| |w|.$$

En sommant, on obtient,

$$||v|_w - f_w(N + 1)| \leq C \left(\sum_{i \leq n} (\rho^i |\zeta^i(v^i)| + |v^i| |w|) + \sum_{i < n} (\rho^i |\zeta^i(w^i)| + |w| |w^i|) \right) + (2n + 1) |w|.$$

et donc

$$\left| \frac{1}{N + 1} |v|_w - f_w \right| \leq C \frac{1}{N + 1} \left(\sum_{i \leq n} \rho^i |\zeta^i(v^i)| + \sum_{i < n} \rho^i |\zeta^i(w^i)| + (2n + 1)(2K + 1) |w| \right).$$

Il nous suffit de montrer qu'il y a convergence vers 0 uniforme en les v^i et w^i . Soit θ la valeur propre dominante, comme ζ est primitive, $\theta > 1$. Comme $v_n \neq \varepsilon$,

$$(N + 1) \geq |\zeta^n(v_n)| \geq c \theta^n$$

où c ne dépend pas de v_n . De plus comme $|v^i| \leq 2K$, $|\zeta^i(v^i)| \leq A \theta^i$ où A ne dépend pas de v^i . Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n + 1} |v|_w - f_w \right| &\leq C \frac{1}{c \theta^n} \left(\sum_{i \leq n} \rho^i A \theta^i + \sum_{i < n} \rho^i A \theta^i + (2n + 1)(2K + 1) |w| \right) \\ &\leq \frac{CA}{c} \frac{2 \rho^{n+1} \theta^{n+1}}{\theta^n (\theta \rho - 1)} + \frac{C(2n + 1)(2K + 1) |w|}{c \theta^n} \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$