DÉVELOPPEMENT EN FRACTIONS CONTINUES

1 Théorème de Dirichlet

Notation. Soit x un réel. $[x]$ désigne la partie entière de x, $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et $\|x\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Théorème 1 *Soit θ un réel et Q un entier ≥ 2. Alors il existe un entier q tel que*

$$0 < q < Q \text{ et } \|q\theta\| \leq \frac{1}{Q}.$$

Démonstration. Considérons les $Q+1$ nombres

$$0,\ 1,\ \{\theta\},\ \{2\theta\},\ ....\ ,\{(Q-1)\theta\}.$$

Il sont tous dans l'intervalle $[0,1]$. Un des Q intervalles $[\frac{k}{Q}, \frac{k+1}{Q}]$, $k = 0, ..., Q-1$, contient deux de ces nombres. Donc il existe des entiers a_1, a_2, b_1 et b_2 tels que

$$0 \leq a_1 \neq a_2 \leq Q \text{ et } |(a_1\theta - b_1) - (a_2\theta - b_2)| \leq \frac{1}{Q}.$$

Il suffit de prendre $q = |a_1 - a_1|$.□

Corollaire 1 *Soit θ un réel et Q un entier ≥ 2. Alors il existe un rationnel p/q tel que*

$$0 < q < Q \text{ et } \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

2 Définition du développement

Définition 1 *Soit θ un réel. On dit qu'une fraction p/q, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, est une meilleure approximation de θ si*

$$\|q\theta\| = |q\theta - p| \text{ et } \forall k \in \{1, ..., q-1\},\ \|k\theta\| > \|q\theta\|.$$

Exemples. 1. Si p est l'entier le plus proche de θ alors la fraction $p/1$ est une meilleure approximation de θ.
2. $22/7$ est une meilleure approximation de π.

Remarque. L'ensemble des meilleures approximations d'un réel θ est fini ssi θ est rationnel.

Si p est l'entier le plus proche de θ alors $p/1$ est une meilleure approximation. Ainsi pour tout meilleure approximation p/q avec $q > 1$ on a $\|q\theta\| < \|\theta\| \leq \frac{1}{2}$, on en déduit que p est unique. On ordonne l'ensemble des dénominateurs des meilleures approximations par ordre croissant, on obtient une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_n$ finie ou infinie avec $q_0 = 1$. Choisissons p_0 tel que $\|\theta\| = |\theta - p_0|$ et pour chaque $n \geq 1$ appelons p_n l'unique entier tel que $\|q_n\theta\| = |q_n\theta - p_n|$. Par définition la suite $\|q_n\theta\|$ est strictement décroissante et l'intervalle $\{q_n+1, ..., q_{n+1}-1\}$ ne contient aucun dénominateurs de meilleures approximation..

Notations : $\varepsilon_n = q_n\theta - p_n$ et $r_n = |\varepsilon_n| = \|q_n\theta\|$.

Proposition 1 *Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*
1. *Pour tout $n \geq 0$, on a $q_{n+1}r_n \leq 1$.*
2. *La suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers θ.*

Démonstration. **1.** Utilisons le théorème de Dirichlet avec $Q = q_{n+1}$. Il existe $q \in \{1, ..., q_{n+1} - 1\}$ tel que $\|q\theta\| \leq 1/q_{n+1}$. Mais par définition des meilleures approximations

$$\|q_n\theta\| = \min_{k\in\{1,\dots,q_{n+1}-1\}} \|k\theta\| ,$$

d'où $\|q_n\theta\| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$.
2. On a

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n} |q_n\theta - p_n| = \frac{1}{q_n} r_n \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

et $q_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Lemme 1 *$q_n\theta - p_n$ et $q_{n+1}\theta - p_{n+1}$ ont des signes opposés.*

Démonstration. Sinon $|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$ et on aurait $|q\theta - p| < r_n$ avec $q = |q_{n+1} - q_n| < q_{n+1}$ ce qui contredit la définition de q_{n+1}.

Lemme 2 *Pour $n \geq 0$, $q_{n+1}p_n - q_np_{n+1} = \pm 1$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} q_{n+1}p_n - q_np_{n+1} &= q_{n+1}p_n - q_nq_{n+1}\theta + q_nq_{n+1}\theta - q_np_{n+1} \\ &= q_{n+1}(p_n - q_n\theta) + q_n(q_{n+1}\theta - p_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme les signes de $(p_n - q_n\theta)$ et $(p_{n+1} - q_{n+1}\theta)$ sont opposés, on a

$$|q_{n+1}p_n - q_np_{n+1}| = q_{n+1}r_n + q_nr_{n+1}.$$

Or $q_nr_{n+1} < q_{n+1}r_n \leq 1$, donc $|q_{n+1}p_n - q_np_{n+1}| < 2$. Finalement si q_{n+1} existe alors $r_n > 0$, par conséquent l'entier $|q_{n+1}p_n - q_np_{n+1}|$ ne peut valoir que 1.□

Corollaires de la démonstration :

Corollaire 2 *$q_{n+1}p_n - q_np_{n+1}$ a le signe opposé de $q_n\theta - p_n$.*

Corollaire 3 *$q_{n+1}p_n - q_np_{n+1} = -(q_np_{n-1} - q_{n-1}p_n)$.*

Corollaire 4 *$q_{n+1}r_n + q_nr_{n+1} = 1$.*

Notation. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = [\frac{q_n}{q_{n-1}}]$.

Lemme 3 *Pour $n \geq 1$ on a*
1. *$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$,*
2. *$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$,*
3. *$\varepsilon_{n+1} = a_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$,*
4. *$r_{n-1} = a_{n+1}r_n + r_{n+1}$.*

Démonstration. Comme $q_{n+1}p_n - q_np_{n+1} = -(q_np_{n-1} - q_{n-1}p_n)$, on a

$$p_n(q_{n+1} - q_{n-1}) = q_n(p_{n+1} - p_{n-1}).$$

Comme $q_{n+1}p_n - q_np_{n+1} = \pm 1$, p_n et q_n sont premiers entre eux, donc $q_{n+1} - q_{n-1}$ est un multiple de q_n : $q_{n+1} - q_{n-1} = aq_n$ avec $a \in \mathbb{N}$. D'où $p_n(aq_n) = q_n(p_{n+1} - p_{n-1})$ et $p_{n+1} - p_{n-1} = ap_n$.
Comme $q_n > q_{n-1}$ on a $a = [\frac{q_{n+1}}{q_n}]$. Multiplions la relation **1** par θ et ôtons lui **2** , on obtient

$$\varepsilon_{n+1} = a_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

Finalement, la relation **4** découle **3** et des signes. □

Corollaire 5 $a_{n+1} = [\frac{r_{n-1}}{r_n}]$.

Démonstration. On utilise **4** et l'inégalité $r_n > r_{n+1}$.□

Notations Pour $n \geq 1$, on pose $\theta_n = \frac{r_n}{r_{n-1}}$.

Lemme 4 *Pour $n \geq 1$ on a $a_{n+1} = [\frac{1}{\theta_n}]$ et $\theta_{n+1} = \{\frac{1}{\theta_n}\}$.*

Démonstration. On a

$$\theta_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{r_{n-1} - a_{n+1}r_n}{r_n} = \frac{1}{\theta_n} - a_{n+1},$$

et comme $\theta_{n+1} \in [0, 1[$, on obtient $\{\frac{1}{\theta_n}\} = \theta_{n+1}$ et $[\frac{1}{\theta_n}] = a_{n+1}$.□

D'après ce qui précède la connaissance pour $n \geq 1$ de θ_n, q_n, p_n, q_{n-1}, et p_{n-1} permet de déterminer θ_{n+1}, q_{n+1} et p_{n+1}. Isolons des relations qui permettent de passer de l'étape n à la suivante :

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1} &= \{\frac{1}{\theta_n}\}, \\
a_{n+1} &= [\frac{1}{\theta_n}], \\
q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \\
p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1}.
\end{aligned}$$

Examinons le cas $n = 0$.
Cas 1 : $\theta \in]a, a + \frac{1}{2}]$ où $a \in \mathbb{Z}$.
On a $q_0 = 1$, $p_0 = a$, $\varepsilon_0 = \theta - a > 0$. On voit facilement que $q_1 = [\frac{1}{\theta - a}] \geq 2$ et $p_1 = aq_1 + 1$. On obtient alors

$$a_1 = [\frac{q_1}{q_0}] = q_1 = [\frac{1}{\theta}],\ \varepsilon_1 = q_1(\theta - a) - 1 < 0 \text{ et } \theta_1 = \frac{r_1}{r_0} = \frac{1 - [\frac{1}{\theta - a}](\theta - a)}{\theta - a} = \{\frac{1}{\theta - a}\}.$$

Posons $q_{-1} = 0$, $p_{-1} = 1$ on a $\varepsilon_{-1} = -1$, $r_{-1} = 1$ et $\theta_0 = \frac{r_0}{r_{-1}} = \theta - a = \{\theta\}$ et les relations précédentes sont encore vraies pour $n = 0$.
Cas 2 : $\theta \in]a + \frac{1}{2}, a + 1[$ où $a \in \mathbb{Z}$.

$q_0 = 1,\ p_0 = a+1, \varepsilon_0 = \theta - (a+1) < 0$. On voit facilement que $q_1 = [\frac{1}{a+1-\theta}] \geq 2$ et $p_1 = (a+1)q_1 - 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned} a_1 &= [\frac{q_1}{q_0}] = q_1 = [\frac{1}{a+1-\theta}],\ \varepsilon_1 = q_1(\theta - a - 1) + 1 = q_1\varepsilon_0 + 1 > 0 \text{ et} \\ \theta_1 &= \frac{r_1}{r_0} = \frac{1 - [\frac{1}{a+1-\theta}]r_0}{r_0} = \{\frac{1}{a+1-\theta}\}. \end{aligned}$$

Partons des mêmes conditions initiales que dans les cas précédent : $q_{-1} = 0, p_{-1} = 1$, $q_0 = 1$ et $p_0 = a$. On obtient successivement

$$\varepsilon_{-1} = -1,\ \varepsilon_0 = \theta - a,\ \theta_0 = \frac{r_0}{r_{-1}}\theta - a = \{\theta\},\ a_0 = [\frac{1}{\theta - a}] = 1,$$

puis

$$q_1 = 1,\ p_1 = a+1,\ \varepsilon_1 = \theta - (a+1),\ \theta_1 = \{\frac{1}{\theta_0}\} = \frac{1}{\theta_0} - 1 = \frac{r_1}{r_0},$$

puis

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \{\frac{1}{\{\frac{1}{\theta_0}\}}\} = \{1 + \frac{1}{\{\frac{1}{\theta_0}\}}\} = \{\frac{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}}{\{\frac{1}{\theta_0}\}}\} = \{\frac{1}{\frac{\{\frac{1}{\theta_0}\}}{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}}}\} \\ &= \{\frac{1}{\frac{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}-1}{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}}}\} = \{\frac{1}{1 - \frac{1}{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}}}\} = \{\frac{1}{1-\theta_0}\} = \{\frac{1}{a+1-\theta}\} \end{aligned}$$

car $\theta_0 \in]\frac{1}{2}, 1[\Rightarrow \theta_0 = \frac{1}{1+\{\frac{1}{\theta_0}\}}$, de même

$$a_2 = [\frac{1}{\{\frac{1}{\theta_0}\}}] = [\frac{1}{1-\theta_0}] - 1,$$

et

$$\begin{aligned} q_2 &= ([\frac{1}{1-\theta_0}] - 1)q_1 + q_0 = [\frac{1}{1-\theta_0}] \\ p_2 &= ([\frac{1}{1-\theta_0}] - 1)p_1 + p_0 = [\frac{1}{1-\theta_0}](a+1) - 1. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient les mêmes suites (θ_n, p_n, q_n) décalées d'un indice. On peut donc pour tous les $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ partir du système de conditions initiales

$$q_{-1} = 0,\ p_{-1} = 1,\ q_0 = 1,\ p_0 = 0 \text{ et } \theta_0 = \{\theta\}.$$

Finalement on obtient

Théorème 2 *Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Posons*

$$q_{-1} = 0,\ p_{-1} = 1,$$

$$q_0 = 1,\ p_0 = [\theta] \text{ et } \theta_0 = \{\theta\}.$$

La suite des fractions (p_n/q_n) définie par les relations de récurrence pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \{\frac{1}{\theta_n}\}, \\ a_{n+1} &= [\frac{1}{\theta_n}], \\ q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \\ p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1} \end{aligned}$$

contient toutes les meilleures approximations de θ et p_n/q_n est meilleure approximation pour tous les $n \geq 1$.

En posant $a_0 = [\theta]$, on obtient le processus suivant

$$\theta = a_0 + \theta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \theta_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\theta_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\theta_3}}} \text{ etc...}$$

qui continue tant que θ_n n'est pas nul.
Vocabulaire : les fractions p_n/q_n s'appellent les réduites et les entiers a_n les coefficients ou les quotients partiels.

Définition 2 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs. On définit*

$$[x_0] = x_0, \ [x_0; x_1] = x_0 + \frac{1}{x_1},$$

et par récurrence sur $k \in \{1, ..., n\}$ on définit

$$[x_0; x_1, ..., x_k] = [x_0; x_1, ..., x_{k-1} + \frac{1}{x_k}] = [x_0; x_1, ..., [x_{k-1}, x_k]].$$

Proposition 2 *Soit θ un réel. Avec les notations du théorème précédent et $a_0 = [\theta]$, supposons que $\theta_0, ..., \theta_n$ soient définis alors ,*

$$\theta = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n + \theta_n] = \frac{p_{n-1}\theta_n + p_n}{q_{n-1}\theta_n + q_n} \ \text{et} \ \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n].$$

Démonstration.
On procède par récurrence.
On a bien $\theta = [a_0 + \theta_0]$ et pour tout n, $\theta_{n-1} = \frac{1}{a_n+\theta_n}$ donc

$$\theta = [a_0; a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1}+\theta_{n-1}] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}+\frac{1}{a_n + \theta_n}] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n+\theta_n].$$

De même

$$\theta = \frac{p_{n-2}\theta_{n-1} + p_{n-1}}{q_{n-2}\theta_{n-1} + q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}\frac{1}{a_n+\theta_n} + p_{n-1}}{q_{n-2}\frac{1}{a_n+\theta_n} + q_{n-1}} = \frac{p_{n-2} + p_{n-1}(a_n + \theta_n)}{q_{n-2} + q_{n-1}(a_n + \theta_n)} = \frac{p_{n-1}\theta_n + p_n}{q_{n-1}\theta_n + q_n}.\square$$

Proposition 3 *Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On a $\theta = \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, ..., a_n]$ où $a_0 = [\theta]$ et les a_n, $n \geq 1$, sont définis dans le théorème précédent. On écrit $\theta = [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$ et la suite des fractions $[a_0; a_1, ..., a_n]$ s'appelle le développement en fraction continue de x.*

Démonstration. $[a_0; a_1, ...a_n] = \frac{p_n}{q_n} \to \theta$. $\square$

Théorème 3 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $a_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors la suite (x_n) définie par $x_n = [a_0; a_1, ..., a_n]$ converge vers un irrationnel θ dont la suite des quotients partiels est la suite (a_n). De plus, si (b_n) est une autre suite d'entiers telle que $b_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ et telle que $\theta = \lim_{n\to\infty}[b_0; b_1, ..., b_n]$ alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration : cf. Hardy and Wright.

3 Cylindres

Considérons l'application $T :]0,1[\to [0,1[$ définie par $T(x) = \{\frac{1}{x}\}$ et la suite d'intervalles $I_1 =]\frac{1}{2}, 1[$, $I_2 =]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, ..., $I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, ... La suite d'intervalles $(I_n)_{n\geq 1}$ forme une partition $]0,1[$ et pour tout $\theta \in]0,1[$ le n-ième quotient partiel a_n si il existe, est déterminer par la relation $T^{n-1}(x) \in I_{a_n}$ ($T^0 = Id$). Posons $B =]0,1[\backslash\mathbb{Q}$. Comme pour $x \in]0,1[$ on a $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow T(x) \in \mathbb{Q}$, T est une surjection de B sur B.

Définition 3 *Soit $a_1, ..., a_n$ des entiers ≥ 1. On appelle $B(a_1, ..., a_n)$ l'ensemble des θ appartenant à B tels que $T^{k-1}(x) \in I_{a_k}$ pour $k = 1, ..., n$. $B(a_1, ..., a_n)$ s'appelle un cylindre de longueur n.*

Proposition 4 ***1.*** *$B(a_1, ..., a_n) \cap B(b_1, ..., b_n) \neq \emptyset \Longleftrightarrow a_k = b_k,\ k = 1, ..., n$.*
2. *$B(a_1, ..., a_n) = \cup_{a\in\mathbb{N}^*} B(a_1, ..., a_n, a)$.*
3. *Pour tout $n \geq 1$, et tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$, $B = T^n(B(a_1, ..., a_n))$.*
4. *Pour tout $n \geq 1$, et tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'application définie sur $[0,1]$ par $V(a_1, ..., a_n)(x) = \frac{p_{n-1}x+p_n}{q_{n-1}x+q_n}$ où les suites p_k et q_k sont définies par les relations de récurrences. On a $B(a_1, ..., a_n) = V(a_1, ..., a_n)([0,1])\backslash\mathbb{Q}$.*
5. *Pour tout $a_1, ..., a_n,\ a \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\frac{1}{4}|B(a)| \leq \frac{|B(a_1, a_2, ..., a_n, a)|}{|B(a_1, a_2, ..., a_n)|} \leq 4|B(a)|.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in B(a_1, ..., a_n) \cap B(b_1, ..., b_n) \neq \emptyset$ on a $T^{k-1}(x) \in I_{a_k} \cap I_{b_k}$. Comme les I_q sont disjoints on a $a_k = b_k$.
2. Evident.
3. Récurrence sur n. Pour $n = 1$ évident.. Supposons $B = T^n(B(a_2, ..., a_{n+1}))$ et montrons que $T^{n+1}(B(a_1, ..., a_{n+1})) = B$. Par définition $B(a_1, ..., a_{n+1}) = B(a_1) \cap T^{-1}(B(a_2, ..., a_{n+1}))$, donc

$$T(B(a_1, ..., a_{n+1})) = T(B(a_1)) \cap B(a_2, ..., a_{n+1}) = B \cap B(a_2, ..., a_{n+1}) = B(a_2, ..., a_{n+1})$$

d'où $T^{n+1}B(a_1, ..., a_{n+1}) = T^n(T(B(a_1, ..., a_{n+1}))) = T^n(B(a_2, ..., a_n)) = B$ par hypothèse de récurrence.
4. Soit $\theta \in B(a_1, ..., a_n)$ on a $\theta = \frac{p_{n-1}\theta_n+p_n}{q_{n-1}\theta_n+q_n}$ où $\theta_n \in [0,1]$, donc $\theta \in V(a_1, ..., a_n)([0,1])\backslash\mathbb{Q}$.

Par récurrence, on voit que $V(a_1)\circ V(a_2)\circ ...\circ V(a_n)=V(a_1,...,a_n)$ car, si $V(a_1)\circ V(a_2)\circ ...\circ V(a_{n-1})=V(a_1,...,a_{n-1})$ alors

$$\begin{aligned}V(a_1)\circ V(a_2)\circ ...\circ V(a_n)(x) &= V(a_1,...,a_{n-1})(V(a_n)(x))\\ &= \frac{p_{n-2}\frac{1}{a_n+x}+p_{n-1}}{q_{n-2}\frac{1}{a_n+x}+q_{n-1}}=V(a_1,...,a_n)(x).\end{aligned}$$

Soit $x_0\in B$ et $x_1\in[0,1]$ tels que $x_0=V(a_1)(x_1)$. On a alors $x_1\in B$, $Tx_0=_1 x$ et $x_0\in B(a_1)$. Soit $\theta\in V(a_1,...,a_n)([0,1])\backslash\mathbb{Q}$. Montrons par récurrence que $\theta\in B(a_1,...,a_n)$. On a $\theta=V(a_1,...,a_n)(x)$ avec $x\in[0,1]$. Posons $\theta_1=V(a_2,...,a_1)(x)$. On a $\theta=V(a_1)(\theta_1)$ et $\theta_1\in[0,1]$ donc $\theta_1\in B$, $\theta\in B(a_1)$ et $T\theta=\theta_1$. D'après l'hypothèsehypothése de récurrence $T\theta\in B(a_2,...,a_n)$ d'où $\theta\in B(a_1,...,a_n)$.
5. Soit $a\in\mathbb{N}^*$. On a

$$|B(a_1,...,a_n)|=\int_0^1|V'(a_1,...,a_n)(x)|\,dx=\int_0^1\frac{1}{(q_{n-1}x+q_n)^2}dx\in[\frac{1}{(q_{n-1}+q_n)^2},\frac{1}{q_n^2}].$$

D'après **4.**, $B(a_1,...,a_n,a)=V(a_1,...,a_n)(V(a)([0,1]))\backslash\mathbb{Q}=V(a_1,...,a_n)(V(a)([0,1])\backslash\mathbb{Q}))$ donc

$$|B(a_1,...,a_n,a)|=\int_{V(a)([0,1])}|V'(a_1,...,a_n)(x)|\,dx=\int_{V(a)([0,1])}\left|\frac{1}{q_{n-1}x+q_n}\right|^2dx.$$

Par conséquent

$$|V(a)([0,1])|\times\frac{1}{(q_{n-1}+q_n)^2}\leq|B(a_1,...,a_n,a)|\leq|V(a)([0,1])|\times\frac{1}{q_n^2}$$

et

$$|B(a)|\times\frac{1}{(q_{n-1}+q_n)^2}\leq|B(a_1,...,a_n,a)|\leq|B(a)|\times\frac{1}{q_n^2},$$

$$|B(a)|\times\frac{B(a_1,...,a_n)}{4}\leq|B(a_1,...,a_n,a)|\leq|B(a)|\times 4B(a_1,...,a_n).\square$$

Théorème 4 *de Borel-Bernstein. Soit α_n une suite d'entiers ≥ 1.*
1. *Si $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha_n}<+\infty$ alors pour presque tout $\theta\in B$ il existe un nombre fini de n tel que $a_n(\theta)\geq\alpha_n$.*
2. *Si $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha_n}=+\infty$ alors pour presque tout $\theta\in B$ il existe une infinité de n tel que $a_n(\theta)\geq\alpha_n$.*

Démonstration. 1. Soit $A_n=\{\theta\in B:a_n(\theta)\geq\alpha_n\}$. On a

$$A_n=\bigcup_{a_1,...,a_{n-1}}\bigcup_{a\geq\alpha_n}B(a_1,...,a_{n-1},a),$$

donc

$$\begin{aligned}|A_n| &\leq \sum_{a_1,...,a_{n-1}}\sum_{a\geq\alpha_n}|B(a_1,...,a_{n-1},a)|\leq 4\sum_{a_1,...,a_{n-1}}\sum_{a\geq\alpha_n}|B(a_1,...,a_{n-1})|\,|B(a)|\\ &= 4\sum_{a\geq\alpha_n}|B(a)|\leq 4\sum_{a\geq\alpha_n}\frac{1}{a^2}\leq C\frac{1}{\alpha_n},\end{aligned}$$

On conclut avec le lemme de Borel-Cantelli.
2. Posons $B_n = \{\theta \in B : a_n(\theta) < \alpha_n\}$. Il suffit de montrer que pour tout p, $\cap_{n\geq p} B_n$ est négligeable. Posons $B_{p,q} = \bigcap_{n=p}^{q} B_n$. On a

$$\begin{aligned}
|B_{p,q}| &= \sum_{a_1,\ldots a_{p-1}\in\mathbb{N}^*} \sum_{a_i<\alpha_i,\, i=p,\ldots,q} |B(a_1,...,a_q)| = \sum_{a_1,\ldots a_{p-1}\in\mathbb{N}^*} \sum_{a_i<\alpha_i,\, i<q} \sum_{a_q<\alpha_q} |B(a_1,...,a_q)| \\
&= \sum_{a_1,\ldots a_{p-1}\in\mathbb{N}^*} \sum_{a_i<\alpha_i,\, i<q} (|B(a_1,...,a_{q-1})| - \sum_{a_q\geq\alpha_q} |B(a_1,...,a_q)|) \\
&\leq \sum_{a_1,\ldots a_{p-1}\in\mathbb{N}^*} \sum_{a_i\leq\alpha_i,\, i<q} (|B(a_1,...,a_{q-1})| - \sum_{a_q\geq\alpha_q} \frac{1}{4} |B(a_1,...,a_{q-1})|\, |B(a_q)|) \\
&\leq \sum_{a_1,\ldots a_{p-1}\in\mathbb{N}^*} \sum_{a_i\leq\alpha_i,\, i<q} |B(a_1,...,a_{q-1})|\, (1-\frac{c}{\alpha_q}) \leq |B_{p,q-1}|\,(1-\frac{c}{\alpha_q}).
\end{aligned}$$

Or $\sum_n \frac{1}{\alpha_n} = +\infty \Rightarrow \prod_{n=p}^{\infty}(1-\frac{c}{\alpha_n}) = 0$, donc $|B_n| = 0$.$\square$