ALGORITHME DE JACOBI-PERRON

1 Présentation géométrique de l'algorithme des fractions continues

Considérons $x \in]0,1[$, $X = (x,1) \in \mathbb{R}^2$ et la demi-droite $D = \mathbb{R}^+ X$. Appelons e_1, e_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La demi-droite D est incluse dans le cône $\mathcal{C}^+(e_1,e_2) = \{x_1e_1 + x_2e_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2_+\}$. Cherchons un vecteur e_3 de $\mathbb{R}^2$ tel que
- $e_3 = e_1 + ae_2$ où $a \in \mathbb{Z}$,
- $D \subset \mathcal{C}^+(e_2,e_3)$,
- le cône $\mathcal{C}^+(e_2,e_3)$ est le plus étroit possible, c'est à dire tel que a soit grand possible.

Ainsi les génératrice du cône seront à pente rationnelle et auront un pente la "plus proche possible" de la pente de la demi-droite D qui est x.

On écrit $X = xe_1 + e_2 = x(e_1 + \frac{1}{x}e_2) = x(\{\frac{1}{x}\}e_2 + (e_1 + [\frac{1}{x}]e_2))$ et $e_3 = e_1 + [\frac{1}{x}]e_2$ est le vecteur cherché. On a $X = x(Tx\, e_2 + e_3)$ où $Tx = \{\frac{1}{x}\}$. On recommence à partir de $Tx\, e_2 + e_3$. On trouve ainsi une suite de base de $\mathbb{Z}^2$, $(e_n, e_{n+1})_{n\geq 1}$ telles que

$$X = x\, Tx ... T^{n-1}x\, (T^n x\, e_{n+1} + e_{n+2}).$$

Cherchons la matrice P_n de changement de base de (e_n, e_{n+1}) vers (e_{n+1}, e_{n+2}), par définition $e_{n+2} = e_n + [\frac{1}{T^{n-1}x}] \times e_{n+1}$ donc

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & [\frac{1}{T^{n-1}x}] \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} X &= x\, Tx ... T^{n-1}x\, (T^n x\, e_{n+1} + e_{n+2}) \\ &= x\, Tx ... T^{n-1}x\, P_1 ... P_n \begin{pmatrix} T^n x \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En écrivant $e_{n+2} = (p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$P_1 ... P_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} P_{n+1} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_{n-1} + [\frac{1}{T^n x}] p_n \\ q_{n+1} = q_{n-1} + [\frac{1}{T^n x}] q_n \end{cases}$$

et

$$x = \frac{p_{n-1}T^n x + p_n}{q_{n-1}T^n x + q_n}$$

et on retrouve les relations vérifiées par le développement en fraction continue.

2 Définition de l'algorithme de Jacobi Perron

Notation. Dans tout ce paragraphe on désignera par x_i, k_i,... la $i^{ème}$ coordonnée d'un élément x, k,... de $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{d+1}$ ou $\mathbb{N}^d$.

Soit d un entier ≥ 2. Considérons $x \in]0,1[\times [0,1[^{d-1}$. Posons $X = (x,1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ et $D = \mathbb{R}^+ X$. Appelons $e_1, ..., e_{d+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{d+1}$. Cherchons un vecteur e_{d+2} de $\mathbb{R}^{d+1}$ tel que
- $e_{d+2} = e_1 + \sum_{i=2}^{d+1} a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{N}$,
- $D \in \mathcal{C}^+(e_2, ..., e_{d+2})$,
- le cône $\mathcal{C}^+(e_2, ..., e_{d+2})$ est le "plus petit possible" (malheureusement il n'y a pas de notion canonique de plus petit cône).

Imitons les fractions continues :

$$\begin{aligned} X &= x_1e_1+...+x_de_d+e_{d+1} \\ &= x_1(e_1+\sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{x_1}e_i+\frac{1}{x_1}e_{d+1}) \\ &= x_1(\sum_{i=2}^{d}\{\frac{x_i}{x_1}\}e_i+\{\frac{1}{x_1}\}e_{d+1}+(e_1+\sum_{i=2}^{d}[\frac{x_i}{x_1}e_i]+[\frac{1}{x_{d+1}}]e_{d+1})), \end{aligned}$$

on choisit

$$e_{d+2}=e_1+\sum_{i=2}^{d}[\frac{x_i}{x_1}]e_i+[\frac{1}{x_{d+1}}]e_{d+1}$$

et on a

$$X=x_1(\sum_{i=2}^{d}\{\frac{x_i}{x_1}\}e_i+\{\frac{1}{x_1}\}e_{d+1}+e_{d+2}).$$

Posons

$$P(x)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & [\frac{x_2}{x_1}] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & [\frac{x_d}{x_1}] \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & [\frac{1}{x_1}] \end{pmatrix} \text{ et } Y=\begin{pmatrix} \{\frac{x_2}{x_1}\} \\ \vdots \\ \{\frac{x_d}{x_1}\} \\ \{\frac{1}{x_1}\} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$P(x)$ est la matrice de passage de la base $(e_1,...,e_{d+1})$ à la base $(e_2,...,e_{d+2})$ et la relation précédente devient

$$X=x_1P(x)Y.$$

En considérant l'application

$$\begin{aligned} T &:]0,1[\times[0,1[^d\to[0,1[^d \\ &: x\to(\{\frac{x_2}{x_1}\},...,\{\frac{x_d}{x_1}\},\{\frac{1}{x_1}\}), \end{aligned}$$

la relation précédente s'écrit

$$X=x_1P(x)\begin{pmatrix} Tx \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si la première coordonnée de Tx est non nulle on peut utiliser le même procédé avec $\begin{pmatrix} Tx \\ 1 \end{pmatrix}$ à la place de X. Ainsi de suite, tant que la première coordonnée de T^nx est non nulle, le calcul peut se poursuivre. On obtient ainsi une suite de bases $(e_{n+1},...,e_{n+d+1})_{n\geq 0}$ du réseau $\mathbb{Z}^{d+1}$. La matrice de passage de la base $(e_{n+1},...,e_{n+d+1})$ à la base $(e_{n+2},....,e_{n+d+2})$ est donnée par la matrice $P(T^nx)$ et on a

$$X=x_1...(T^{n-1}x)_1\,P(x)...P(T^{n-1}x)\begin{pmatrix} T^nx \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons

$$e_{n+d+1}=\begin{pmatrix} P_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

où $P_n=(p_{n,1},...,p_{n,d})\in\mathbb{Z}^d$ et $q_n\in\mathbb{N}$. Pour $n\geq 1$, on a

$$e_{n+d+1}=P(x)...P(T^{n-1}x)e_{d+1}.$$

Par analogie avec le développement unidimensionnelle, on choisit $\frac{1}{q_n}P_n$ comme approximation rationnelle de x.

Ecrivons de manière projective les relations précédentes. Introduisons quelques notations : Appelons $\pi:\mathbb{R}^{d+1}\backslash\{x_{d+1}=0\}\to\mathbb{R}^d$ l'application définie par $\pi(x)=\frac{1}{x_{d+1}}(x_1,...,x_d)$ et $i:\mathbb{R}^d\to$

$\mathbb{R}^{d+1}$ définie par $i(x) = (x, 1)$.
Abandonnons la notation $P(x)$au profit de la notation $P(k)$ définie pour $k \in \mathbb{N}^d$ par

$$P(k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & k_{d-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k_d \end{pmatrix}$$

et pour $x \in]0, 1[\times[0, 1[^d$ posons

$$k(x) = ([\frac{x_2}{x_1}], [\frac{x_3}{x_1}], ..., [\frac{x_d}{x_1}], [\frac{1}{x_1}]).$$

De la relation

$$X = x_1 P(k(x)) \begin{pmatrix} Tx \\ 1 \end{pmatrix}.$$

on tire

$$i(x) = x_1 P(k(x))\, i(Tx) \text{ et } x = \pi \circ i(x) = \pi(P(k(x))\, i(x)).$$

La fonction $y \in \mathbb{R}^d \to \pi(P(k)i(y)) \in \mathbb{R}^d$ est l'homographie donnée par

$$\psi_k(y_1, ..., y_d) = (\frac{1}{k_d + y_d}, \frac{k_1 + y_1}{k_d + y_d}, ..., \frac{k_{d-1} + y_{d-1}}{k_d + y_d}),$$

ψ_k est définie sur $\{y \in \mathbb{R}^d : y_d \neq k_d\}$. Pour tout $n \geq 1$ tel que $T^n x$ soit défini on a

$$T^{n-1}x = \psi_{k(T^{n-1}x)}(T^n x)$$

et

$$x = \psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ ... \circ \psi_{k(T^{n-1}x)}(T^n x).$$

La suite d'approximations rationnelles est données par

$$\frac{1}{q_n} P_n = \psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ ... \circ \psi_{k(T^{n-1}x)}(0).$$