

CONVERGENCE DE ALGORITHME DE JACOBI-PERRON

1 Distance de Hilbert dans un cône convexe

Définition 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ un cône convexe saillant (ne contenant pas de droite). Supposons que l'intersection de $\mathcal{C}$ avec tout plan vectoriel soit un fermé de ce plan. Pour x et $y \in \mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \{0\}$ définissons

$$\beta(x, y) = \begin{cases} \inf\{t > 0 : tx - y \in \mathcal{C}\} & \text{si } \{t > 0 : tx - y \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } \{t > 0 : tx - y \in \mathcal{C}\} = \emptyset \end{cases}$$

et

$$d_{\mathcal{C}}(x, y) = \ln \beta(x, y) \beta(y, x).$$

$d_{\mathcal{C}}$ s'appelle la distance de Hilbert du cône $\mathcal{C}$.

Proposition 1 Avec les notations précédentes on a :

1. $tx - y \in \mathcal{C}$ et $sy - x \in \mathcal{C} \Rightarrow ts \geq 1$
2. pour tout $x, y \in \mathcal{C}^*$ tels que $\beta(x, y) < \infty$, on a $\beta(x, y) > 0$ et $\beta(x, y)x - y \in \mathcal{C}$.
3. $d_{\mathcal{C}}(x, y) \in [0, \infty]$ pour tout $x, y \in \mathcal{C}$.
4. $d_{\mathcal{C}}$ vérifie l'inégalité triangulaire.
5. $d_{\mathcal{C}}(x, y) = 0$ ssi x et y sont colinéaires.
6. Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ alors $\forall x, y \in \mathcal{C}_1^*$, $d_{\mathcal{C}_1}(x, y) \leq d_{\mathcal{C}_2}(x, y)$.

Démonstration. 1. $tx - y \in \mathcal{C}$ et $sy - x \in \mathcal{C} \Rightarrow s(tx - y) + sy - x \in \mathcal{C} \Rightarrow stx - x \in \mathcal{C} \Rightarrow st \geq 1$.
2. Soit $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap (\mathbb{R}x + \mathbb{R}y)$. Par hypothèse $\mathcal{C}'$ est fermé. Donc l'ensemble $\{t \geq 0 : tx - y \in \mathcal{C}'\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^+$ et admet donc un minimum t_0 . Si $t_0 = 0$ alors $-y \in \mathcal{C}'$ et comme $\mathcal{C}$ est saillant on a $y = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $y \in \mathcal{C}^*$.
3. Soit $x, y \in \mathcal{C}^*$ tels que $\beta(x, y) < \infty$. D'après **2**, $t_0 = \min\{t \geq 0 : tx - y \in \mathcal{C}'\} > 0$ et pour tout t tel que $ty - x \in \mathcal{C}$ on a $tt_0 \geq 1$, donc $\beta(y, x)\beta(x, y) \geq 1$ et $d_{\mathcal{C}}(x, y) \in [0, \infty]$.
 Si $\beta(y, x) < \infty$ ou si $\beta(x, y) = \beta(y, x) = \infty$ on a de même $\beta(x, y)\beta(y, x) \geq 1$ et $d_{\mathcal{C}}(x, y) \in [0, \infty]$.
4. Soit $x, y, z \in \mathcal{C}^*$ tels que $d_{\mathcal{C}}(x, y)$ et $d_{\mathcal{C}}(y, z) < \infty$. Il existe $t, t', s, s' > 0$ tels que $tx - y \in \mathcal{C}'$ etc... On a $tx - y \in \mathcal{C}$ et $sy - z \in \mathcal{C}$ donc $stx - sy + sy - z \in \mathcal{C}$ par passage à "l'inf" on en déduit $\beta(x, z) \leq \beta(x, y)\beta(y, z)$ et l'inégalité triangulaire en résulte.
5. On voit facilement que si x et y sont colinéaires alors $d_{\mathcal{C}}(x, y) = 0$. Supposons x et y indépendants. Plaçons nous dans le plan P engendré par x, y . L'intersection $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ avec ce plan est fermé et $\mathcal{C}$ est saillant donc il existe une forme linéaire l sur P telle que $\mathcal{C}'^* \subset \{l > 0\}$. Soit t et s tels que $t = \min\{t \geq 0 : tx - y \in \mathcal{C}'\}$ et $s = \min\{s \geq 0 : sy - x \in \mathcal{C}'\}$. Comme x et y sont indépendants on a $tx - y$ et $sy - x \in \mathcal{C}^*$ donc $l(tx - y)$ et $l(sy - x) > 0$. Par conséquent $t > \frac{l(y)}{l(x)}$ et $s > \frac{l(x)}{l(y)}$ d'où $st > 1$ et $d_{\mathcal{C}}(x, y) > 0$.
6. Evident. $\square$

Théorème 1 Soit E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_1$ un cône convexe de E_1 , $\mathcal{C}_2$ un cône convexe de E_2 , et L une application linéaire de E_1 dans E_2 tel que $L(\mathcal{C}_1^*) \subset \mathcal{C}_2^*$. Supposons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ vérifient les hypothèses de la définition 1. Appelons Δ le diamètre de $L(\mathcal{C}_1^*)$ dans $\mathcal{C}_2^*$ muni de la distance de Hilbert $d_{\mathcal{C}_2}$. Si $\Delta < +\infty$ alors

$$\forall x, y \in \mathcal{C}_1^*, d_{\mathcal{C}_2}(L(x), L(y)) \leq \tanh \frac{\Delta}{4} d_{\mathcal{C}_1}(x, y).$$

Démonstration. Soit x et $y \in \mathcal{C}_1^*$ et $t, t' > 0$ tels que $z = tx - y$ et $z' = t'y - x \in \mathcal{C}_1$. Comme $\Delta < +\infty$, d'après le **2** de la proposition il existe $s, s' > 0$ tels que

$$sL(z) - L(z'), s'L(z') - L(z) \in \mathcal{C}_2^* \text{ et } \ln ss' = d_{\mathcal{C}_2}(L(z), L(z')) \leq \Delta.$$

En revenant à $L(x)$ et $L(y)$ on trouve

$$\begin{aligned} (st + 1)L(x) - (s + t')L(y) &\in \mathcal{C}_2^* \text{ et} \\ (s't' + 1)L(y) - (s' + t)L(x) &\in \mathcal{C}_2^*, \end{aligned}$$

d'où

$$d_{C_2}(L(x), L(y)) \leq \ln \left(\frac{st+1}{s+t'} \times \frac{s't'+1}{s'+t} \right) = \ln \left(\frac{ss'tt'+\gamma}{ss'+\gamma} \times \frac{1+\gamma}{tt'+\gamma} \right).$$

avec $\gamma = s't' > 0$. Posons $\alpha = ss'$,

$$\text{pour } u > 0, f(r) = \ln \left(\frac{\alpha u + \gamma}{\alpha + \gamma} \times \frac{1 + \gamma}{u + \gamma} \right)$$

et

$$\text{pour } v \in \mathbb{R}, g(v) = f \circ \exp v$$

Avec $u = \exp v$ on a

$$\begin{aligned} g'(v) &= u \times \left(\frac{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}{\frac{\alpha u + \gamma}{\alpha + \gamma}} - \frac{\frac{1}{1+\gamma}}{\frac{u + \gamma}{1 + \gamma}} \right) = \frac{\alpha u}{\alpha u + \gamma} - \frac{u}{u + \gamma} \\ &= \frac{\alpha u(u + \gamma) - u(\alpha u + \gamma)}{(\alpha u + \gamma)(u + \gamma)} = \frac{u\gamma(\alpha - 1)}{u\gamma(\alpha + 1) + \gamma^2 + \alpha u^2} \\ &= \frac{(\sqrt{\alpha} - 1)(\sqrt{\alpha} + 1)}{\alpha + 1 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\alpha u}{\gamma}} = \frac{(\sqrt{\alpha} - 1)(\sqrt{\alpha} + 1)}{(\sqrt{\alpha} + 1)^2 - 2\sqrt{\alpha} + \frac{\gamma}{u} + \frac{\alpha u}{\gamma}} \end{aligned}$$

Comme $\alpha = ss' \geq 1$ et

$$-2\sqrt{\alpha} + \frac{\gamma}{u} + \frac{\alpha u}{\gamma} = \left(\sqrt{\frac{\alpha u}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{u}} \right)^2 \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} g'(v) &\leq \frac{(\sqrt{\alpha} - 1)(\sqrt{\alpha} + 1)}{(\sqrt{\alpha} + 1)^2} = \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{ss'} - 1}{\sqrt{ss'} + 1} = \frac{\exp \frac{1}{2} \ln ss' - 1}{\exp \frac{1}{2} \ln ss' + 1} = \tanh \frac{1}{4} \ln ss' \leq \tanh \frac{1}{4} \Delta. \end{aligned}$$

En remarquant que $g(0) = 0$ on en déduit que

$$d_{C_2}(L(x), L(y)) \leq g(\ln tt') \leq \tan \frac{1}{4} \Delta \times \ln tt'$$

et en passant à l'inf on obtient

$$d_{C_2}(L(x), L(y)) \leq \tan \frac{1}{4} \Delta \times d_{C_1}(x, y). \quad \square$$

Lemme 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et x_1, x_2 deux éléments indépendants de E . Considérons le cône $\mathcal{C} = \mathbb{R}^+ x_1 + \mathbb{R}^+ x_2$. Soit a_1, a_2, b_1 et $b_2 \in \mathbb{R}^+, y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ et $z = b_1 x_1 + b_2 x_2$. Alors

$$d_{\mathcal{C}}(y, z) \leq 4 \times \frac{\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}{\min\{a_1, b_1, a_2, b_2\}}.$$

Démonstration. On a $ty - z \in \mathcal{C}$ ssi $ta_1 - b_1$ et $ta_2 - b_2 \geq 0$ donc $\beta(y, z) = \max\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\}$. De même $\beta(z, y) = \max\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\}$. Donc

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(y, z) &= \ln \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right\} + \ln \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\} \\ &\leq \left| \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right\} - 1 \right| + \left| \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\} - 1 \right| \\ &\leq \left| \frac{b_1}{a_1} - 1 \right| + \left| \frac{b_2}{a_2} - 1 \right| + \left| \frac{a_1}{b_1} - 1 \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} - 1 \right|. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ un cône vérifiant les hypothèses de la définition 1 et H un hyperplan de E ne contenant pas 0. Munissons H de sa topologie usuelle. Si K est un compact inclus dans l'intérieur de $H \cap \mathcal{C}$ alors la topologie induite par la distance de Hilbert et la topologie usuelle sont équivalentes sur K .

Démonstration. 1. Munissons H d'une norme $\|\cdot\|$. Par compacité, la distance d pour la norme $\|\cdot\|$, de K à $H \setminus \mathcal{C}$ est > 0 . Soit y et z deux points distincts de K et $\mathcal{D}$ la droite les contenant. Il existe deux points x_1 et $x_2 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ tels que $y, z \in [x_1, x_2]$ et $d(\{y, z\}, \{x_1, x_2\}) \geq \frac{1}{2}d$. Soit $a, b \in [0, 1]$ tels que $y = (1-a)x_1 + ax_2$ et $z = (1-b)x_1 + bx_2$. On a

$$\frac{d}{2} \leq \|y - x_1\| = \|a(x_2 - x_1)\|$$

donc $a \geq \frac{d}{2\|x_2 - x_1\|}$ de même $1-a, b$ et $1-b \geq \frac{d}{2\|x_2 - x_1\|}$. D'après le lemme précédent, on a alors

$$d_{\mathcal{C}}(x, y) \leq 4 \times \frac{2\|x_2 - x_1\|}{d} |a - b|.$$

Or $\|y - z\| = \|(1-a)x_1 + ax_2 - (1-b)x_1 - bx_2\| = |b-a| \|x_1 - x_2\|$ donc

$$d_{\mathcal{C}}(x, y) \leq \frac{8}{d} \|y - z\|.$$

2. D'après ce qui précède l'application identique de $(K, \|\cdot\|)$ dans $(K, d_{\mathcal{C}})$ est continue. Comme la topologie induite par $d_{\mathcal{C}}$ sur H est séparée, l'application identique de $(K, \|\cdot\|)$ dans $(K, d_{\mathcal{C}})$ est un homéomorphisme. $\square$

2 Convergence de l'algorithme de Jacobi-Perron

Théorème 3 Pour tout $x \in B$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ \dots \circ \psi_{k(T^n x)}(0) = x$.

Notations. 1. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^d$ appelons u_k l'application linéaire de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans lui même de matrice dans la base canonique

$$P(k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & k_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & k_{d-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & k_d \end{pmatrix}.$$

2. Pour une partie A de $\mathbb{R}^d$, appelons $\mathcal{C}(A)$ le cône de $\mathbb{R}^{d+1}$ de sommet 0 et de base $A \times \{1\}$, c-a-d

$$\mathcal{C}(A) = \{t(x, 1) : t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \in A\}.$$

3. Appelons $I_d = \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d : k_d \geq 1 \text{ et } k_d \geq \max_{i < d} k_i\}$.

Lemme 2 Il existe un ouvert borné convexe D de $\mathbb{R}^d$ contenant $[0, 1]^d$ et un compact $K \subset D$ tel que pour tout $k \in I_d$ on ait $\psi_k(\overline{D}) \subset K$.

Démonstration. Posons $D = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \in]-2^{-d+i-2}, 3^i[, i = 1, \dots, d\}$. Soit $x \in \overline{D}$, $k \in I_d$ et

$$y = \psi_k(x) = \left(\frac{1}{x_d + k_d}, \frac{x_1 + k_1}{x_d + k_d}, \dots, \frac{x_{d-1} + k_{d-1}}{x_d + k_d} \right).$$

On a

$$0 \leq y_1 \leq \frac{1}{1 - 2^{-2}} \leq 2 < 3$$

et pour $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} y_i &\geq \frac{-2^{-d+i-3}}{1 - 2^{-2}} \geq -\frac{4}{3} \times 2^{-d+i-3} = -\frac{2}{3} \times 2^{-d+i-2} > -2^{-d+i-2}, \\ y_i &\leq \frac{3^{i-1} + k_{i-1}}{-2^{-2} + k_d} \leq \frac{3^{i-1} + k_d}{-2^{-2} + k_d} \leq \frac{3^{i-1} + 1}{-2^{-2} + 1} < 3^i. \end{aligned}$$

En posant

$$K = \{z \in \mathbb{R}^d : z_i \in [-2^{-d+i-2}, \frac{3^{i-1} + 1}{-2^{-2} + 1}] \text{ pour } i > 1 \text{ et } z_1 \in [0, 2]\}$$

on voit que K est un compact inclus dans D contenant $\psi_k(\overline{D})$. $\square$

Démonstration du théorème.

D'après le lemme, pour chaque $k \in I_d$ on a $u_k(\mathcal{C}(\overline{D})) \subset \mathcal{C}(K)$. Appelons d la distance de Hilbert du cône $\mathcal{C}(\overline{D})$. Comme K est compact le diamètre Δ de $\mathcal{C}(K)$ pour la distance de Hilbert est fini. Par conséquent chaque u_k est une contraction pour la distance de Hilbert de rapport $\lambda = \tanh \frac{\Delta}{4} < 1$. On en déduit que pour tout $x \in B$ on a

$$d((\psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ \dots \circ \psi_{k(T^n x)}(0), 1), (\psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ \dots \circ \psi_{k(T^n x)}(T^n x), 1)) \leq \lambda^n \text{diam} \mathcal{C}([0, 1]^d),$$

donc

$$d((\psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ \dots \circ \psi_{k(T^n x)}(0), 1), (x, 1)) \leq \lambda^n \text{diam} \mathcal{C}([0, 1]^d).$$

Et comme la distance de Hilbert est équivalente sur $K \times \{1\}$ à la distance usuelle on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{k(x)} \circ \psi_{k(Tx)} \circ \dots \circ \psi_{k(T^n x)}(0) = x. \square$$

Corollaire 1 de la démonstration. Soit $(k^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite admissible. Alors le diamètre pour la distance usuelle de $B(k^{(1)}, \dots, k^{(n)})$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

3 Suite admissibles

Proposition 2 Soit $(k^{(m)})_{m \geq 1}$ une suite admissible pour l'algorithme de Jacobi-Perron, c-a-d une suite d'éléments de I_d tels qu'il existe $x \in B$ avec $k^{(m)} = k(T^{m-1}x)$. Alors elle vérifie la propriété suivante :

$$(*) \quad \begin{cases} \text{S'il existe } i \in \{1, \dots, d-1\}, s \in \{0, \dots, i-1\} \text{ et } n \geq 1 \text{ tels que} \\ k_i^{(n)} = k_d^{(n)}, \dots, k_{i-s}^{(n+s)} = k_{d-s}^{(n+s)} \text{ alors} \\ k_{i-s-1}^{(n+s+1)} \leq k_{d-s-1}^{(n+s+1)} \text{ si } i-s-1 \geq 1 \text{ et } k_{d-s-1}^{(n+s+1)} \geq 1 \text{ si } i-s = 1. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas $d = 2$, la condition $(*)$ signifie simplement que $k_1^{(n)} = k_2^{(n)} \Rightarrow k_1^{(n+1)} \geq 1$.

Démonstration. On peut supposer que $n = 1$. En effet, si $k^{(m)} = k(T^{m-1}x)$ alors la suite $k^{(m+n-1)} = k(T^{m-1}y)$ avec $y = T^{n-1}x$, est admissible.

Posons $C_{i,j} = \{x \in B : x_i \leq x_j\}$.

Lemme 3 Soit $k \in I_d$ et $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Si $k_d = k_i$ alors $TB(k) \subset C_{i,d}$.

Dem. $k_d = k_i \Rightarrow [\frac{1}{x_1}] = [\frac{x_{i+1}}{x_1}]$ pour $x \in B(k)$, donc $\frac{1}{x_1} - k_d \geq \frac{x_{i+1}}{x_d} - k_i$ et $(Tx)_d \geq (Tx)_i$. $\square$

Lemme 4 Soit $j \in \{2, \dots, d\}$ et $x \in C_{1,j}$. Alors $k_{j-1}(x) \geq 1$.

Dem. $x_j \geq x_1 \Rightarrow k_{j-1}(x) = [\frac{x_j}{x_1}] \geq 1$. $\square$

Lemme 5 Soit $i \in \{1, \dots, d-1\}$, $s \in \{0, \dots, i-1\}$ et $k^{(1)}, \dots, k^{(s+1)} \in I_d$. Si $k_i^{(1)} = k_d^{(1)}, \dots, k_{i-s}^{(s+1)} = k_{d-s}^{(s+1)}$ alors

$$T^{s+1}B(k^{(1)}, \dots, k^{(s+1)}) \subset C_{i-s, d-s}.$$

Dem. Faisons une récurrence sur s . Pour $s = 0$ il s'agit du premier lemme.

Passage de $s-1$ à s :

Soit $x \in B(k^{(1)}, \dots, k^{(s)})$. Par hypothèse de récurrence on a $y = T^s x \in C_{i-s+1, d-s+1}$ et par définition des cylindres $y \in B(k^{(s+1)})$. Comme $k_{i-s}^{(s+1)} = k_{d-s}^{(s+1)}$ et $y_{i-s+1} \leq y_{d-s+1}$, on a $(Ty)_{i-s} = \frac{y_{i-s+1}}{y_1} - k_{i-s}^{(s+1)} \leq (Ty)_{d-s} = \frac{y_{d-s+1}}{y_1} - k_{d-s}^{(s+1)}$ et donc $T^{s+1}x = Ty \in C_{i-s, d-s}$. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition. Soit $x \in B$ tel que $k^{(m)} = k(T^{m-1}x)$. Si $k_i^{(1)} = k_d^{(1)}, \dots, k_{i-s}^{(s+1)} = k_{d-s}^{(s+1)}$ alors d'après le lemme précédent on $T^{s+1}x \in C_{i-s, d-s}$.

Si $i - s = 1$ alors d'après le lemme 3, $k_{d-s-1}^{(s+2)} = k_{d-s-1}(T^{s+1}x) \geq 1$.

Si $i - s \geq 2$, alors par définition de $C_{i-s,d-s}$ on a $k(T^{s+1}x)_{i-s-1} \leq k(T^{s+1}x)_{d-s-1}$ et donc $k_{i-s}^{(s+2)} \leq k_{d-s}^{(s+2)}$. $\square$

Notre but est de démontrer la réciproque de la proposition précédente. Pour cela nous avons besoin d'un résultat intermédiaire dont la démonstration est élémentaire mais assez pénible. Nous ferons la démonstration uniquement en dimension $d = 2$.

Lemme 6 Soit $(k^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite de I_d vérifiant la condition (*). Notons

$$A_n = P(k^{(1)}) \dots P(k^{(n)}).$$

Alors pour tout $n \geq 1$, la matrice A_n est positive, sa dernière ligne est plus grande que les autres dès que $n \geq d$ et strictement plus grande que les autres dès que $n \geq 2d + 1$.

Démonstration. Comme les matrices $P(k)$ sont à coefficients positifs les matrices A_n sont aussi à coefficients positifs. D'autre part, la forme des matrices $P(k)$ montre que les d premières colonnes de $A_{n+1} = A_n P(k^{(n+1)})$ sont les d dernières colonnes de la matrice A_n . Les d premières colonnes de $P(k^{(1)})$ sont les vecteurs $e_2, \dots, e_{d+1}$ de la base canonique.. Appelons e_{d+1+n} le dernier vecteur colonne de la matrice A_n . D'après ce qui précède nous avons $A_n = (e_{n+1}, \dots, e_{n+d+1})$. Ces vecteurs vérifient la relation de récurrence pour $n \geq 1$,

$$e_{n+d+1} = e_n + \sum_{i=1}^d k_i^{(n)} e_{n+i}.$$

Montrons d'abord grâce à cette relation que la dernière ligne de A_n est supérieure ou égale aux autres pour $n \geq d$ puis que la dernière ligne de A_n est strictement supérieure aux autres pour $n \geq 2d + 1$. Cette relation de récurrence montre que si la dernière coordonnée de chacun des vecteurs $e_n, \dots, e_{n+d}$ est plus grande que les autres coordonnées alors le même résultat est vrai pour e_{n+d+1} et ainsi de suite pour $e_{n+d+2}, \dots$. Supposons maintenant que $d = 2$ et examinons les vecteurs e_3, e_4 et e_5 . On a

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

la propriété est donc vraie pour e_3 et e_4 . D'après la relation de récurrence

$$\begin{aligned} e_5 &= e_2 + k_1^{(2)} e_3 + k_2^{(2)} e_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^{(2)} \\ 1 + k_2^{(2)} k_1^{(1)} \\ k_1^{(2)} + k_2^{(2)} k_2^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme les $k^{(n)} \in I_d$, la dernière coordonnée de e_5 est plus grande que la première.

- Si $k_2^{(1)} > k_1^{(1)}$ alors $k_1^{(2)} + k_2^{(2)} k_2^{(1)} \geq 1 + k_2^{(2)} k_1^{(1)}$ car $k_2^{(2)} \geq 1$.

- Si $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$ alors d'après (*) on a $k_1^{(2)} \geq 1$ et donc $k_1^{(2)} + k_2^{(2)} k_2^{(1)} \geq 1 + k_2^{(2)} k_1^{(1)}$.

Ceci montre que la dernière coordonnée de e_5 est supérieure à la deuxième coordonnée de e_5 .

Montrons l'inégalité stricte en revenant au cas d quelconque. Considérons les vecteurs e_{2d+2} . On a $e_{2d+2} = e_{n+d+1}$ avec $n = d + 1$ donc

$$e_{2d+2} = e_{d+1} + \sum_{i=1}^d k_i^{(d+1)} e_{d+1+i}.$$

Or la dernière coordonnée de e_{d+1} est strictement plus grande que les autres, donc il en est de même pour e_{2d+2} . On a alors

$$e_{2d+3} = e_{d+2} + \sum_{i=1}^d k_i^{(d+2)} e_{d+2+i} = e_{d+2} + \sum_{i=1}^{d-1} k_i^{(d+2)} e_{d+2+i} + k_d^{(d+2)} e_{2d+2},$$

et comme $k_d^{(d+2)} \geq 1$, la dernière coordonnées de e_{2d+3} est strictement plus grande que les autres. Et ainsi de suite on montre que la dernière coordonnées de e_n est strictement plus grande que les autres pour tous les $n \geq 2d + 2$. $\square$

Théorème 4 *L'ensemble des suites admissibles pour l'algorithme de Jacobi-Perron est l'ensemble*

$$\mathcal{A}_d = \{(k^{(n)})_{n \geq 1} : k^{(n)} \in I_d \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et la suite } (k^{(n)})_{n \geq 1} \text{ vérifie } (*)\}.$$

Démonstration. Il reste à prouver qu'une suite $(k^{(n)})$ vérifiant $(*)$ est admissible. Soit $(k^{(n)})_{n \geq 1}$ une tel suite. Appelons u_n l'application linéaire de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans lui même, de matrice

$$A_n = P(k^{(1)}) \dots P(k^{(n)}).$$

D'après le lemme précédent, la matrice A_n est à coefficients ≥ 0 et pour $n \geq d$ sa dernière ligne est supérieure aux autres. Appelons $\psi^{(n)}$ l'homographie de $\mathbb{R}^d$ définie par $\psi^{(n)}(x) = \pi \circ u_n(x, 1)$. On a

$$\psi^{(n)} = \psi_{k^{(1)}} \circ \dots \circ \psi_{k^{(n)}}.$$

Utilisons les parties D et K définies au paragraphe précédent. Les ψ_k envoient $\overline{D}$ dans K et sont des contractions pour la distance de Hilbert qui est équivalente sur K à la distance usuelle. Il en résulte que la suite $(\psi^{(n)}(K))_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de compacts dont le diamètre tend vers 0. L'intersection de cette suite est donc un point x_0 de K et pour tout $x \in K$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{(n)}(x) = x_0$. D'après le lemme précédent $\psi^{(n)}$ envoie $[0, 1]^d$ dans $[0, 1]^d$ dès que $n \geq 2d + 2$ donc $\psi^{(n)}([0, 1]^d) \subset \psi^{(2d+2)}([0, 1]^d) \subset [0, 1]^d$ et $x_0 \in [0, 1]^d$. Montrons que $x_0 \in B$ et que $k^{(n)} = k(T^{n-1}x_0)$ pour tout $n \geq 1$.

On montre comme précédemment que pour tout $m \geq 0$ la suite de compacts

$$\psi_{k^{(m+1)}} \circ \dots \circ \psi_{k^{(n)}}(K)$$

décroît vers un compact réduit à un point $x_m \in [0, 1]^d$. Choisissons un point quelconque x appartenant à K , on a par continuité de ψ_k ,

$$\psi_{k^{(m)}}(x_m) = \psi_{k^{(m)}}(\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{k^{(m+1)}} \circ \dots \circ \psi_{k^{(n)}}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{k^{(m)}} \circ \dots \circ \psi_{k^{(n)}}(x) = x_{m-1}$$

pour tout $m \geq 1$.

Si $y \in [0, 1]^d$ et si $\psi_k(y) \in [0, 1]^d$ avec $k \in I_d$, alors $x = \psi_k(y) \in [0, 1]^d$, $k(x) = k$ et $Tx = y$. En effet,

$$x = (\frac{1}{y_d + k_d}, \frac{y_1 + k_1}{y_d + k_d}, \dots, \frac{y_{d-1} + k_{d-1}}{y_d + k_d})$$

donc $x_1 > 0$ et comme les $y_i \in [0, 1]$ on a $[\frac{1}{x_1}] = [y_d + k_d] = k_d$, $[\frac{x_2}{x_1}] = [y_1 + k_1] = k_1, \dots, [\frac{x_d}{x_1}] = [y_{d-1} + k_{d-1}] = k_{d-1}$. Par définition de T on a aussi $Tx = y$.

On peut appliquer ce qui précède à la suite (x_m) car $x_m \in [0, 1]^d$ et $x_m = \psi_{k^{(m+1)}}(x_{m+1})$ pour tout m . On en déduit que $x_0 \in B$, que pour tout $m \geq 1$ $T^m x_0 = x_m$ et que $k(T^{m-1}x_0) = k(x_{m-1}) = k(\psi_{k^{(m)}}(x_m)) = k^{(m)}$. $\square$

4 Mesure invariante

Théorème 5 *Soit $(B, T, \mathcal{A}, \lambda)$ le système fibré mesuré associé à l'algorithme de Jacobi-Perron où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors il existe une mesure T -invariante ergodique et équivalente à λ .*

Lemme 7 *Pour tout cylindre non vide $B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ on a pour tout $x \in T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$*

$$\sup_{x \in T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})} \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}) \leq (d+1)^{d+1} \inf_{x \in T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})} \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}).$$

Démonstration. La dernière ligne de la matrice $P(k^{(1)}) \dots P(k^{(m)})$ est donnée par $(q_{m-d}, q_{m-d+1}, \dots, q_m)$ où $q_{-d} = \dots q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ et q_n vérifie la relation de récurrence

$$q_{n+d+1} = q_n + \sum_{i=1}^d k_i^{(n)} q_{n+i}.$$

Comme $k_d^{(n)} \geq 1$ la suite q_n est croissante. Pour $x \in T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ on a

$$\omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})(x) = \frac{|\det P(k^{(1)}) \dots P(k^{(m)})|}{\left(\sum_{i=0}^{d-1} q_{m-d+i} x_{i+1} + q_m\right)^{d+1}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{d-1} q_{m-d+i} x_{i+1} + q_m\right)^{d+1}}$$

comme les $x_i \in [0, 1]$ on a

$$\frac{1}{((d+1)q_m)^{d+1}} \leq \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})(x) \leq \frac{1}{q_m^{d+1}}. \quad \square$$

Lemme 8 Soit $b = (1, 2, \dots, d)$. Alors pour tout cylindre non vide $B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ le cylindre $B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b)$ est plein et

$$\lambda(B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b)) \geq t \lambda(B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}))$$

où t est un réel strictement positif qui ne dépend pas du cylindre $B(k^{(1)}, \dots, k^{(n)})$.

Démonstration. Soit $y \in B$. Prolongeons la suite $k^{(1)}, \dots, k^{(m)}$ par $k^{(m+1)} = b$ et $k^{(n)} = k(T^{n-m-2}y)$ pour $n \geq m+2$. La suite $(k^{(n)})_{n \geq 1}$ est admissible car

$$\text{si } i \in \{1, \dots, d-1\}, s \in \{0, \dots, i-1\} \text{ et } n \geq 1 \text{ sont tels que} \\ k_i^{(n)} = k_d^{(n)}, \dots, k_{i-s}^{(n+s)} = k_{d-s}^{(n+s)}$$

alors d'après le choix de b on a soit $n+s \leq m$ soit $n \geq m+2$ et on voit que la suite $(k^{(n)})_{n \geq 1}$ est admissible. D'après le théorème sur les suites admissible il existe $x \in B$ tel que $k^{(n)} = k(T^{n-1}x)$ pour tout $n \geq 1$. Par définition $x \in B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b)$ et $k(T^{n-1}y) = k(T^{n-1}T^{m+1}x)$, donc d'après le théorème de convergence $y = T^{m+1}x$ et le cylindre $B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b)$ est plein.

On a

$$\begin{aligned} \lambda(B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b)) &= \int_B \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}, b) d\lambda = \int_B \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}) \circ V(b) \omega(b) d\lambda \\ &\geq \inf_{T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})} \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}) \int_B \omega(b) db \\ &\geq \frac{\lambda(B(b))}{(d+1)^{d+1}} \int_{T^m B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})} \omega(k^{(1)}, \dots, k^{(m)}) d\lambda \\ &= \frac{\lambda(B(b))}{(d+1)^{d+1}} \lambda(B(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})). \quad \square \end{aligned}$$

Appelons $\mathcal{C}$ la classe des cylindres pleins de l'algorithme de Jacobi-Perron. Reprenons les notations du chapitre précédent.

Lemme 9 $\lambda(\cup_{n \geq 0} T^{*-n}W) = 0$ et $\sum_{n \geq 0} \lambda(D_n) < +\infty$.

Démonstration. Comme $T|_{B(i)}$ est la restriction d'un difféomorphisme si $\lambda(W) = 0$ alors $\cup_{n \geq 0} T^{*-n}W$ est de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que $\lambda(W) = 0$. Pour cela calculons $\lambda(D_{n+1})$ en fonction de $\lambda(D_n)$. On a

$$\lambda(D_n) = \lambda(D_{n+1}) + \lambda(B_{n+1})$$

et

$$\begin{aligned} \lambda(B_{n+1}) &\geq \lambda\left(\bigcup_{B(a_1, \dots, a_n) \subset D_n} B(a_1, \dots, a_n, b)\right) = \sum_{B(a_1, \dots, a_n) \subset D_n} \lambda(B(a_1, \dots, a_n, b)) \\ &\geq t \sum_{B(a_1, \dots, a_n) \subset D_n} \lambda(B(a_1, \dots, a_n)) = \lambda(D_n) \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda(D_{n+1}) \leq (1-t)\lambda(D_n). \square$$

Démonstration du théorème. Appliquons le théorème de Rényi à (B^*, T^*) . Les cylindres de (B^*, T^*) sont pleins et les jacobiens du système (B^*, T^*) sont des restrictions à B^* de jacobien de (B, T) donc d'après le premier lemme la condition sur les jacobiens du théorème de Renyi est vérifiée. Les cylindres de rang n de (B^*, T^*) sont des cylindres de rang $\geq n$ de (B, T) , or le diamètre des cylindres de (B, T) tend vers 0 quand le rang tend vers l'infini, donc les cylindres de (B^*, T^*) engendrent la tribu borélienne de B^* . Par conséquent il existe une probabilité ν sur B^* , T^* -invariante, ergodique et équivalente à λ . D'après le lemme précédent et le théorème sur les transformations "saut" il existe une probabilité μ sur B , T -invariante, ergodique et équivalente à la mesure de Lebesgue. $\square$

Remarque. 1. Il n'est pas facile d'explicité la densité f de μ par rapport à λ .

2. μ est unique.

Démonstration. Soit μ' un mesure σ -finie T -invariante équivalente à λ . Soit E une partie mesurable. Appelons A l'ensemble des x de B tels que

$$\{x \in B : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1_E \circ T^k(x) = \frac{\mu(E)}{\mu(B)}\}$$

et A' l'ensemble des x de B tels que

$$\{x \in B : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1_E \circ T^k(x) = \frac{\mu'(E)}{\mu'(B)}\}$$

Les parties A et A' sont T -invariantes donc de λ -mesure 0 ou 1. D'après le théorème de Birkhoff on a $\mu(B \setminus A) = 0$ et $\mu'(B \setminus A') = 0$ donc $\lambda(A)$ et $\lambda(A') > 0$. Par conséquent $A \cap A'$ est non vide et $\mu(E) = \mu(E')$. $\square$