SYSTEMES FIBRÉS

1 Définitions de F. Schweiger

Définition 1 *Soit B un ensemble et T une application de B dans B. On dit que (B,T) est un système fibré si il existe un ensemble dénombrable I et une partition $B = \cup_{i\in I} B(i)$ tels que pour tout $i \in I$, la restriction de T à $B(i)$soit injective.*

Exemples. 1. $B = [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $T : x \in B \to \{\frac{1}{x}\} \in B$, $I = \mathbb{N}^*$ et $B(i) = [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}] \cap B$.
2. $E =]0,1[\times[0,1[^{d-1}$. Considérons l'application associée à l'algorithme de Jacobi-Perron

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad E \to [0,1[^d \\ &: \quad x \to (\{\frac{x_2}{x_1}\}, ..., \{\frac{x_d}{x_1}\}, \{\frac{1}{x_1}\}). \end{aligned}$$

Appelons $F = \{0\} \times [0,1[^{d-1}$. L'application T n'envoie pas E dans E mais $T(E\backslash \cup_{n\geq 1} T^{-n}F) \subset E\backslash \cup_{n\geq 1} T^{-n}F$, prenons donc $B = E\backslash \cup_{n\geq 1} T^{-n}F$. B est l'ensemble des x tels que $T^n x$ soit défini pour tout $n \geq 0$ (B diffère de E d'un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue). Posons

$$I_d = \{i \in \mathbb{N}^d : i_d \geq 1,\ i_1, ..., i_{d-1} \leq i_d\}$$

$$B(i) = \{x \in B : [\frac{x_2}{x_1}] = i_1, ..., [\frac{x_d}{x_1}] = i_{d-1} \text{ et } [\frac{1}{x_1}] = i_d\}.$$

Pour $x \in B(i)$ on a

$$T(x) = (\frac{x_2}{x_1} - i_1, ..., \frac{x_d}{x_1} - i_{d-1}, \frac{1}{x_1} - i_d).$$

On voit facilement que T restreinte à $B(i)$ est injective et que les $B(i)$, $i \in I_d$, forment une partition de B donc (B,T) est une système fibré.
3. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ une matrice ne comportant que de 0 est des 1. Considérons la partie B de $\{1,...,n\}^{\mathbb{N}}$ définie par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{x_n x_{n+1}} = 1$. Le décalage T défini par $(y_n) = T(x_n)$ avec $y_n = x_{n+1}$ et une application de B dans B. Le système (B,T) est fibré par rapport à la partition $B(i) = \{x_n) \in B : x_0 = i\}$, $i \in I = \{1, ..., n\}$.

Définition 2 *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$ et T une application de B dans B. On dit que (B,T) est un algorithme de fraction continue multidimensionnel si (B,T) est un système fibré associé à une partition borélienne $B(k)$, $k \in I$, de B telle que la restriction de T à chaque $B(k)$ soit une homographie. i.e. pour chaque $k \in I$ il existe une matrice $A(k) = (a_{ij}) \in M_{d+1}(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul et telle que pour tout $x \in B(k)$ on ait*

$$T(x) = (\frac{\sum_{j=1}^d a_{1j}\, x_j + a_{1d+1}}{\sum_{j=1}^d a_{d+1j}\, x_j + a_{d+1d+1}}, ..., \frac{\sum_{j=1}^d a_{dj}\, x_j + a_{dd+1}}{\sum_{j=1}^d a_{d+1j}\, x_j + a_{d+1d+1}}).$$

Notation. Si (B,T) est un système fibré avec une partition $B(i)$, $i \in I$. On notera k l'application de B dans I définie par $k(x) = i$ ssi $x \in B(i)$.
Codage. On peut considérer l'application $\phi : B \to I^{\mathbb{N}^*}$ définie par $\phi(x) = (k(T^{n-1}x))_{n\geq 1}$. Si on appelle σ l'application de $I^{\mathbb{N}^*}$ dans lui même définie par $\sigma(x_n) = y_n$ avec $y_n = x_{n+1}$ on a $\phi \circ T = \sigma \circ \phi$.

Définition 3 *Soit (B,T) un système fibré associé à une partition $B(i)$, $i \in I$. Une suite $(k_n)_{n\geq 1} \in I^{\mathbb{N}^*}$ est admissible si il existe $x \in B$ tel que $(k_n)_{n\geq 1} = \phi(x)$.*

Exemple. $B = [0,1[$ $T : x \to 2x \bmod 1$, $I = \{0,1\}$, $B(0) = [0, \frac{1}{2}[$, $B(1) = [\frac{1}{2}, 1[$. La suite constante 1 n'est pas admissible. En effet, si $t \in [0,1[$ il existe $n \geq 1$ tel que $1 - 2^{n-1} \leq t < 1 - 2^n$ on a alors $2^{n-1}t \in [2^{n-1} - 1, 2^{n-1} - \frac{1}{2}[$ et donc $T^{n-1}t = 2^{n-1}t \bmod 1 \in B(0)$. Les suites constantes égales à 1 à partir d'un certain rang ne sont donc pas admissibles. En fait, si x est un élément de B la suite $\phi(x)$ correspond au développement propre en base 2. L'application ϕ est injective.

2 Cylindres

Définition 4 *Soit (B,T) un système fibré associé à une partition $B(i)$, $i \in I$.*
Soit $n \in N^*$. Un cylindre de rang n est une partie de B de la forme

$$B(k_1,...,k_n) = B(k_1) \cap T^{-1}B(k_2) \cap ... \cap T^{-(n-1)}B(k_n)$$

où $k_1,...,k_n \in I$. Par convention on dit que B est un cylindre de rang 0.

Proposition 1 *Soit (B,T) un système fibré associé à une partition $B(i)$, $i \in I$.*
1. $\bigcup_{a \in I} B(k_1,...,k_n,a) = B(k_1,...,k_n)$.
2. $T^{-1}B(k_1,...,k_n) = \bigcup_{a \in I} B(a,k_1,...,k_n)$.
3. *Si $B(k_1,...,k_n) \cap B(j_1,...,j_m) \neq \emptyset$ alors l'une des deux suites $(k_1,...,k_n)$ est le début de l'autre et l'un des cylindres contient l'autre.*

La démonstration de cette proposition est évidente.

Définition 5 *Soit (B,T) un système fibré associé à une partition $B(i)$, $i \in I$. Un cylindre $B(a_1,...,a_n)$ est plein (ou propre) si $T^nB(a_1,...,a_n) = B$.*

Exemples. 1. Fraction continues : tous les cylindres sont pleins
2. Jacobi-Perron. Soit $k = (k_1,...,k_d) \in I_d$. Si $k_d > k_1,...,k_{d-1}$ alors le cylindre $B(k)$ est plein. En effet, soit $x \in B$. Alors $\psi_k(x) \in]0,1[\times[0,1[^{d-1}$ et $T\psi_k(x) = x$. Donc $\psi_k(x) \in T^{-1}B \subset B$. On a évidemment $\psi_k(x) \in B(k)$ donc $x \in TB(k)$. Réciproquement si $k_d = k_{i_0}$ avec $i_0 < d$ alors pour tout $x \in B(k)$

$$Tx = (\frac{x_2}{x_1} - k_1, ..., \frac{x_{i_0+1}}{x_1} - k_{i_0}, ..., \frac{x_d}{x_1} - k_{d-1}, \frac{1}{x_1} - k_d)$$

appartient à $\{y \in B : y_{i_0-1} \leq y_d\}$ qui n'est pas égal à B.

Proposition 2 *Soit (B,T) un système fibré associé à une partition $B(i)$, $i \in I$.*
1. *Si $B(a_1,...,a_n)$ est plein alors pour tout $i \in \{1,...,n\}$ le cylindre $B(a_i,...,a_n)$ est plein et $TB(a_i,...,a_n) = TB(a_{i+1},...,a_n)$ pour $i < n$ et $TB(a_n) = B$.*
2. *Si tous les cylindres de rang* 1 *sont pleins alors tous les cylindres sont pleins.*

Démonstration : Exercice (utiliser le lemme $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ alors $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$).

Propriété de Markov : Le système fibré (B,T) de partition $B(i)$, $i \in I$ est dit markovien si pour tout $a \in I$ il existe $J(a) \subset I$ tel que $TB(a) = \cup_{i \in J(a)} B(i)$.
Apériodicité. Le système fibré (B,T) de partition $B(i)$, $i \in I$ est dit apériodique si pour tout $a \in I$ il existe $n \geq 1$ tel que $T^nB(a) = B$.
Exemple. Reprenons l'exemple associé à une matrice $A = (a_{ij})$ de 0 et de 1. Le décalage T est markovien et il est apériodique ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la matrice A^n soit strictement positive.

3 Branches inverses

Notation. Soit (B,T) un système fibré et $B(i)$, $i \in I$ la partition associée. Pour chaque $i \in I$ on note $V(i)$ la réciproque de l'application $T : B(i) \to TB(i)$.
Exemple. Jacobi-Perron : $V(k)$ est la restriction de ψ_k à B.

Proposition 3 *Soit (B,T) un système fibré et $B(i)$, $i \in I$ la partition associée. Pour chaque $(a_1,...,a_n) \in I^n$, T^n est injective sur $B(a_1,...,a_n)$ et $V(a_1) \circ V(a_2) \circ ... \circ V(a_n)(T^n(x)) = x$ pour tout x de $B(a_1,...,a_n)$.*

Démonstration. Faisons une récurrence sur n.
Pour $n = 1$ T est injective sur $B(a_1)$ car (B,T) est un système fibré et pour $x \in B(a_1)$, $V(a_1)(Tx) = x$ par définition de $V(a_1)$.

Passage de n à $n+1$. Soit $x \in B(a_1, ..., a_{n+1})$ le point $y = Tx \in B(a_2, ..., a_n)$ donc par hypothèse de récurrence $y = V(a_2) \circ ... \circ V(a_{n+1})(T^n y)$. D'autre part $B(a_1, ..., a_n) \subset B(a_1)$ donc

$$x = V(a_1)(Tx) = V(a_1)(y) = V(a_1) \circ ... \circ V(a_{n+1})(T^n y) = V(a_1) \circ ... \circ V(a_{n+1})(T^{n+1}x).$$

L'injectivité découle de la relation précédente car

$$T^{n+1}x = T^{n+1}x' \Rightarrow x = V(a_1) \circ ... \circ V(a_{n+1})(T^{n+1}x) = V(a_1) \circ ... \circ V(a_{n+1})(T^{n+1}x') = x'. \square$$

Notation Soit (B,T) un système fibré et $B(i)$, $i \in I$ la partition associée. Pour chaque $(i_1, ..., i_n) \in I^n$ on note $V(i_1, ..., i_n)$ la réciproque de l'application $T^n : B(i_1, ..., i_n) \to T^n B(i_1, ..., i_n)$.

4 Systèmes fibrés mesurés

Définition 6 *Soit (B,T) un système fibré, $\mathcal{A}$ une tribu de B et λ une mesure positive définie sur $\mathcal{A}$.*
1. *On dit que $(B,T,\mathcal{A})$ un système fibré mesurable si T est mesurable et si pour tout $i \in I$, $B(i) \in \mathcal{A}$.*
2. *On dit que $(B,T,\mathcal{A},\lambda)$ est un système fibré mesuré si T est mesurable et si T préserve les ensembles de mesure nulle ((B,T,λ) est probabilisé si $\lambda(B) = 1$).*

Exemple. Jacobi-Perron : $\mathcal{A}$ =boréliens de B et λ est la mesure de Lebesgue restreinte à B. (B,T,λ) est un système fibré mesuré. Plus généralement tout algorithme multidimensionnelle est un système fibré mesuré.

Définition 7 *Soit (B,T,λ) un système fibré mesuré associé à la partition $B(i)$, $i \in I$. Pour $(a_1, ..., a_n) \in I^n$ on appelle jacobien de $V(a_1, ..., a_n)$ la densité $\omega(a_1, ..., a_n)$ par rapport à λ, de l'image par T^n de la mesure λ restreinte à $B(a_1, ..., a_n)$. Pour tout $E \in \mathcal{A}$*

$$\lambda(T^{-n}E \cap B(a_1, ..., a_n)) = \int_E \omega(a_1, ..., a_n)(x)\, d\lambda(x).$$

Lemme 1 *Soit (B,T,λ) un système fibré mesuré associé à la partition $B(i)$, $i \in I$ et $(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m) \in I^{n+m}$. Pour tout presque tout $x \in B$ on a*

$$\begin{aligned} &\omega(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)(x) \\ = &\begin{cases} \omega(a_1, ..., a_n)(V(k_1) \circ ... \circ V(k_m)(x)) \times \omega(k_1, ..., k_n)(x) \ \textit{si}\ x \in T^m B(k_1, ..., k_m)) \\ \qquad = 0 \ \textit{si}\ x \notin T^m B(k_1, ..., k_m) \end{cases} . \end{aligned}$$

Démonstration. Soit E un borélien de B. Posons $E_1 = E \cap T^m B(k_1, ..., k_m)$ et $E_2 = E \backslash E_1$. On doit montrer que

$$\begin{aligned} &\lambda(T^{-(n+m)}E \cap B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)) \\ = &\int_{E_1} \omega(a_1, ..., a_n)(V(k_1) \circ ... \circ V(k_m)(x)) \times \omega(k_1, ..., k_m)(x)\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

On a $T^{-m}E_2 \cap B(k_1, ..., k_m) = \emptyset$ et comme $T^n B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m) \subset B(k_1, ..., k_m)$, $T^{-n}T^{-m}E_2$ ne rencontre pas $B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)$ et $\lambda(T^{-(n+n)}E_2 \cap B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)) = 0$. Calculons maintenant $\lambda(T^{-(n+m)}E_1 \cap B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m))$. Par définition

$$\lambda(T^{-(n+m)}E_1 \cap B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)) = \int 1_{E_1} \circ T^{n+m} \times 1_{B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)} d\lambda$$

or $B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m) = B(a_1, ..., a_n) \cap T^{-n}B(k_1, ..., k_m)$ donc

$$\lambda(T^{-(n+m)}E_1 \cap B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m))$$

$$
\begin{aligned}
&= \int 1_{E_1} \circ T^{n+m} \times 1_{B(a_1,...,a_n)} \times 1_{B(k_1,...,k_m)} \circ T^n d\lambda \\
&= \int_{B(a_1,...,a_n)} (1_{E_1} \circ T^m \times 1_{B(k_1,...,k_m)}) \circ T^n d\lambda \\
&= \int_B (1_{E_1} \circ T^m \times 1_{B(k_1,...,k_m)}) \omega(a_1, ..., a_n)\, d\lambda \\
&= \int_{B(k_1,...,k_m)} 1_{E_1} \circ T^m \times \omega(a_1, ..., a_n)\, d\lambda \\
&= \int_{B(k_1,...,k_m)} 1_{E_1} \circ T^m \times \omega(a_1, ..., a_n) \circ V(k_1) \circ ... \circ V(k_m) \circ T^m d\lambda \\
&= \int_B 1_{E_1} \times \omega(a_1, ..., a_n) \circ V(k_1) \circ ... \circ V(k_m) \times \omega(k_1, ..., k_m)\, d\lambda. \square
\end{aligned}
$$

Proposition 4 *Soit (B,T) un algorithme de fraction continue multidimensionnel et λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $(a_1, ..., a_n) \in I^n$ appelons $\beta = (\beta_{ij}) \in M_{d+1}(\mathbb{Z})$ la matrice $V(a_1, ..., a_n)$. Pour $y \in B$ on a*

$$\omega(a_1, ..., a_n)(y) = \frac{|\det \beta|}{\left|\sum_{i=1}^d \beta_{i,d+1} y_i + \beta_{d+1,d+1}\right|^{d+1}} \times 1_{T^n B(a_1,...,a_n)}(y).$$

Démonstration : exercice.

5 Mesures invariantes

Théorème 1 ***(Rényi)*** *Soit (B, T, λ) un système fibré probabilisé associé à la partition $B(i)$, $i \in I$. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute partie mesurable E on ait*

$$\frac{1}{C}\lambda(E) \leq \lambda(T^{-n}E) \leq C\lambda(E).$$

Alors il existe une probabilité T-invariante μ telle que pour toute partie mesurable E,

$$\frac{1}{C}\lambda(E) \leq \mu(E) \leq C\lambda(E).$$

Démonstration. Utilisons le théorème de Hahn-Banach pour obtenir le résultat suivant :
Il existe une forme linéaire L sur $l^\infty(\mathbb{N})$ tel que
- L envoie les suites positives sur des réels positifs,
- L envoie la suite constante 1 sur le réel 1
- L envoie les suites de limite nulle sur le réel 0.
Pour cela on considère l'espace vectoriel $l^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme sup et V le sous-espace vectoriel de $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites ayant une limite. Pour tout $u \in V$ on pose $L(u) = \lim_{n\to\infty} u$. L est une forme linéaire sur V et pour tout $u \in V$ on a $|L(u)| \leq \|u\|_\infty$. Donc d'après le théorème de Hahn-Banach Lse prolonge à $l^\infty(\mathbb{N})$ en une forme linéaire telle que $|L(u)| \leq \|u\|_\infty$ pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{N})$. La seule chose à prouver est la positivité de L. Or si u est suite positive bornée alors la suite v définie par $v_n = \|u\|_\infty - u_n$ est de norme inférieure à celle de u donc $L(v) = L(\|u\|_\infty) - L(u) \leq \|u\|_\infty$ et comme $L(1) = 1$ on obtient $L(u) \geq 0$.

Considérons les applications

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \;&:\; l^\infty \to l^\infty \\
&:\; (x_n) \to (\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x_n)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\sigma \;&:\; l^\infty \to l^\infty \\
&:\; (x_n)_{n\geq 0} \to (y_n)_{n\geq 0} \text{ définie par } y_n = x_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Montrons que la forme linéaire $L' = L \circ \mathcal{C}$ vérifie :
- L' *envoie les suites positives sur des réels positifs,*
- L' *envoie la suite constante* 1 *sur* 1,
- L' *envoie les suites de limites nulles sur* 0.
- $L' \circ \sigma = L'$.

Les deux premiers points sont évidents et le troisième résulte du théorème de Césaro sur les suites. Pour le quatrième il suffit de remarquer que pour $u \in l^\infty(\mathbb{N})$,

$$\mathcal{C} \circ \sigma(u)_n - \mathcal{C}(u)_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_n = \frac{1}{n+1}(u_{n+1} - u_0)$$

tend vers 0 et donc $L \circ \mathcal{C}(\sigma(u) - u) = 0$.

Pour chaque E la suite $(\lambda(T^{-n}E))_{n\geq 0}$ est bornée, on peut donc poser

$$\mu(E) = L'((\lambda(T^{-n}E))_{n\geq 0}).$$

Montrons que μ est une probabilité invariante. L'invariance est facile car si E est mesurable $\mu(T^{-1}E) = L' \circ \sigma((\lambda(T^{-n}E))_{n\geq 0}) = L'((\lambda(T^{-n}E)_{n\geq 0}) = \mu(E)$. L'additivité finie découle de la linéarité, il reste à voir l'additivité dénombrable. Pour cela il suffit de vérifier la propriété suivante :

Si (E_n) *est un suite décroissante de parties mesurables de* B *d'intersection vide alors* $\mu(E_n)$ *tend vers* 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une probabilité, $\lambda(E_n)$ tend vers 0 et $\lambda(E_n) \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. De plus, par hypothèse $\lambda(T^{-k}E) \leq C\lambda(E)$ pour tout E donc pour tout $n \geq N$

$$\mu(E_n) = L'(\lambda(T^{-m}E_n)_m) \leq C\varepsilon$$

et μ est une probabilité. L'équivalence de μ et de λ découle simplement des inégalités $\frac{1}{C}\lambda(E) \leq \lambda(T^{-n}E) \leq C\lambda(E)$. $\square$

Théorème 2 ***(Rényi 1957)*** *Soit* $(B, T, \mathcal{A}, \lambda)$ *un système fibré probabilisé associé à la partition* $B(i)$, $i \in I$. *Supposons que*
- *tous les cylindres sont pleins,*
- *il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $(a_1, ..., a_n) \in I^n$ *on ait*

$$\sup_{x\in B} \omega(a_1, ..., a_n)(x) \leq C \inf_{x\in B} \omega(a_1, ..., a_n)(x),$$

- *la tribu* $\mathcal{A}$ *est engendré par les cylindres.*

Alors il existe une probabilité T*-invariante ergodique* μ *telle que pour tout* E *mesurable*

$$\frac{1}{C}\lambda(E) \leq \mu(E) \leq C\lambda(E).$$

Démonstration. Montrons que la condition du théorème précédent

$$\frac{1}{C}\lambda(E) \leq \lambda(T^{-n}E) \leq C\lambda(E),$$

est vérifiée. D'après le théorème de classe monotone, il suffit de vérifier cette condition pour les cylindres $E = B(k_1, ..., k_m)$. On a

$$T^{-n}E = \bigcup_{(a_1,...,a_n)\in I^n} B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)$$

$$\begin{aligned}\lambda(T^{-n}E) &= \sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} \lambda(B(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)) = \sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} \int_B \omega(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)\, d\lambda \\ &= \sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} \int_B \omega(a_1, ..., a_n) \circ V(k_1) \circ ... \circ V(k_m)\omega(k_1, ..., k_m)\, d\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} C\sup\omega(a_1,...,a_n)\int_B \omega(k_1,...,k_m)\,d\lambda = \\
&= \sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} C\sup\omega(a_1,...,a_n)\times\lambda(B(k_1,...,k_m)) \\
&\leq C\lambda(E)\sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n} C\,\inf\omega(a_1,...,a_n)\times\int_B d\lambda \\
&\leq C^2\lambda(E)\sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n}\int_B \omega(a_1,...,a_n)d\lambda = C^2\lambda(E)\sum_{(a_1,...,a_n)\in I^n}\lambda(B(a_1,...,a_n)) \\
&= C^2\lambda(E)\lambda(B) = C^2\lambda(E).
\end{aligned}$$

On démontre de même l'autre inégalité.
Le théorème précédent nous donne l'existence d'une probabilité μ T-invariante équivalente à λ. Il reste à voir l'ergodicité , vérifions la pour λ plutôt que pour μ. Appelons $\mathcal{A}_n$ la tribu engendré par les cylindres de longueur n. Soit E une partie mesurable T-invariante. Pour tout $(a_1,...,a_n)\in I^n$ et tout $x\in B(a_1,...,a_n)$

$$\begin{aligned}
E_\lambda(1_E|\mathcal{A}_n) &= \frac{1}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_E\,d\lambda \\
&= \frac{1}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\int_{B(a_1,...,a_n)} 1_E\circ T^n\,d\lambda \\
&= \frac{1}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\int_B 1_E\omega(a_1,...,a_n)\,d\lambda \\
&\geq \frac{1}{C}\frac{\inf\omega(a_1,...,a_n)}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\int_B 1_E\,d\lambda \\
&\geq \frac{1}{C^2}\frac{\sup\omega(a_1,...,a_n)}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\lambda(E) \\
&\geq \frac{1}{C^2}\frac{\int_B\omega(a_1,...,a_n)\,d\lambda}{\lambda(B(a_1,...,a_n))}\lambda(E) = \frac{1}{C^2}\lambda(E).
\end{aligned}$$

D'après le théorème des martingales, presque sûrement

$$1_E = \lim_n E_\lambda(1_E|\mathcal{A}_n) \geq \frac{1}{C^2}\lambda(E),$$

donc si $\lambda(E)>0$ alors $\lambda(E^c)=0$. $\square$

6 Transformation saut

Le théorème de Rényi s'applique à des systèmes fibrés probabilisés $(B,T,\mathcal{A},\lambda)$ dont tous les cylindres sont pleins ce qui n'est pas le cas de l'algorithme de Jacobi-Perron. Cependant, lorsqu'il y a suffisamment de cylindres pleins on peut introduire un système fibré auxiliaire au quel le théorème de Rényi s'applique et ainsi obtenir l'existence d'une mesure invariante.

Soit (B,T) un système fibré associé à la partition $B(i)$, $i\in I$ et $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble de tous les cylindres. On appliquera ce qui suit avec la classe $\mathcal{C}$ des cylindres pleins.

Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n &= \{B(a_1,...,a_n): \forall 1\leq s<n,\ B(a_1,..,a_s)\notin\mathcal{C},\ B(a_1,...,a_n)\in\mathcal{C}\}, \\
B_n &= \bigcup_{E\in\mathcal{B}_n} E, \\
\mathcal{D}_n &= \{B(a_1,...,a_n): \forall 1\leq s\leq n,\ B(a_1,...,a_n)\notin\mathcal{C}\}, \\
D_0 &= B,\ D_n = \bigcup_{E\in\mathcal{D}_n} E, \\
W &= \bigcap_{p\geq 0} D_p.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que
- $D_n = D_{n+1} \cup B_{n+1}$,
- $D_n \cap B_n = \emptyset$,
- $B_n \cap B_m = \emptyset$ pour $m \neq n$,
- la suite (D_n) est décroissante
- $B \backslash W = \bigcup_{n \geq 1} B_n$.

Définition 8 *Soit (B, T) un système fibré associé à la partition $B(i)$, $i \in I$ et $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble de tous les cylindres. Avec les notations précédentes on définit l'application*

$$T^* : \bigcup_{n \geq 1} B_n \to B$$

par

$$T^* x = T^n x \text{ pour } x \in B_n.$$

T^* s'appelle la transformation saut associée à $\mathcal{C}$

Proposition 5 *Soit (B, T) un système fibré associé à la partition $B(i)$, $i \in I$, $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble de tous les cylindres et T^* la transformation saut associé à $\mathcal{C}$. Posons $B^* = B \backslash \bigcup_{n \geq 0} T^{*-n} W$. Alors $T^* B^*$ est inclus dans B^* et (B^*, T^*) est un système fibré associé à la partition $B^*(a_1, ..., a_n) = B(a_1, ..., a_n) \cap B^*$, $n \geq 1$ et $B(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{B}_n$.*

Démonstration. Comme B^* est inclus dans $B \backslash W$, T^* est définie sur B^*, B^* est l'ensemble des points de $B \backslash W$ dont la trajectoire n'aboutit jamais dans W. Si $x \in B \backslash W$ et $T^* x \in \bigcup_{n \geq 0} T^{*-n} W$ alors $T^* x \in T^{*-n} W$ pour un certain $n \geq 0$ et $x \in T^{*-(n+1)} W$ donc $x \notin B^*$. Par conséquent $T^*(B^*) \subset B^*$.
Comme deux cylindres de (B, T) de même longueur sont disjoints et comme $B_n \cap B_m = \emptyset$ pour $m \neq n$, les parties $B^*(a_1, ..., a_n)$, $n \geq 1$ et $B(a_1, ..., a_n)$ appartenant à $\mathcal{B}_n$, sont deux à deux disjointes.
L'application T^n est injective sur tout cylindre $B(a_1, ..., a_n)$ donc T^* est injective sur tous les $B^*(a_1, ..., a_n)$, $n \geq 1$ et $B(a_1, ..., a_n)$ appartenant à $\mathcal{B}_n$. $\square$

Proposition 6 *Soit (B, T) un système fibré associé à la partition $B(i)$, $i \in I$, $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les cylindres pleins et T^* la transformation saut associée à $\mathcal{C}$. Alors tous les cylindres du système fibré (B^*, T^*) sont pleins.*

Démonstration. Soit $B^*(a_1, ..., a_n)$ un cylindre de rang 1. Par définition de $\mathcal{C}$, $B(a_1, ..., a_n)$ est un cylindre plein de (B, T) donc $T^n B(a_1, ..., a_n) = B$. Par définition, $B(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{B}_n$ et $T^* = T^n$ sur $B(a_1, ..., a_n)$, donc $T^* B(a_1, ..., a_n) = B$. Par conséquent si $y \in B^*$, il existe $x \in B(a_1, ..., a_n)$ tel que $T^* x = y$. Il reste à prouver que $x \in B^*$. Remarquons que $x \notin W$ car $x \in B_n \subset B \backslash W$. Si x appartient à $T^{*-m} W$ avec $m \geq 1$ alors $y \in T^{*-m+1} W$ et $y \notin B^*$ donc $x \notin \bigcup_{m \geq 1} T^{*-m} W$. Finalement $x \in B^*(a_1, ..., a_n)$ et le cylindre $B^*(a_1, ..., a_n)$ est plein. $\square$

Théorème 3 *Soit $(B, T, \mathcal{A}, \lambda)$ un système fibré probabilisé associé à la partition $B(i)$, $i \in I$, $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble de tous les cylindres et T^* la transformation saut associé à $\mathcal{C}$.*
***1.** Le système fibré (B^*, T^*) muni de la restriction de λ est un système fibré mesuré.*
***2.** Supposons que $\lambda(B \backslash B^*) = 0$. Alors*
- si (B^*, T^*) est ergodique alors T est ergodique,
- si (B^*, T^*) est conservative alors T est conservative.

Démonstration. 1. Soit E une partie négligeable de B^*. Comme T préserve les ensembles de mesure nulle et comme $T^{*-1} E \subset \bigcup_{n \geq 1} T^{-n} E$, $T^{*-n} E$ est négligeable.
2. Supposons T^* ergodique. Soit E une partie mesurable de B telle que $E = T^{-1} E$. On a

$$T^{*-1} E = \bigcup_{n \geq 1} B_n \cap T^{-n} E = \bigcup_{n \geq 1} B_n \cap E.$$

Comme $B^* \subset T^{*-1}B^*$, on a

$$\begin{aligned} B^* \cap T^{*-1}(E \cap B^*) &= B^* \cap (T^{*-1}E \cap T^{*-1}B^*) = T^{*-1}E \cap B^* \\ &= B^* \cap \bigcup_{n\geq 1} B_n \cap E \\ &= B^* \cap E, \end{aligned}$$

par conséquent $E\cap B^*$ est une partie T^*-invariante de B^*. Par ergodicité de (B^*, T^*), on en déduit que $E \cap B^*$ ou $B^*\backslash E$ est de mesure nulle et comme $B\backslash B^*$ est de mesure nulle, E ou $B\backslash E$ est de mesure nulle.
Conservativité : exercice. □

Théorème 4 *Soit $(B, T, \mathcal{A})$ un système fibré mesurable associé à la partition $B(i)$, $i \in I$, $\mathcal{C}$ une partie de l'ensemble de tous les cylindres et T^* la transformation saut associé à $\mathcal{C}$. Soit ν une mesure sur B^*. Prolongeons ν à B par $\nu(B\backslash B^*) = 0$. Si ν est une mesure T^*-invariante sur B^* alors la mesure μ définie sur B par*

$$E \in \mathcal{A} \rightarrow \mu(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(T^{-n}E \cap D_n)$$

est T-invariante. Si de plus, $\sum_{n\geq 0} \nu(D_n) < +\infty$ alors la mesure μ est finie.

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{A}$. Par définition,

$$\mu(T^{-1}E) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(T^{-n-1}E \cap D_n)$$

et comme $D_n = D_{n+1} \cup B_{n+1}$ on a

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}E) &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(T^{-n-1}E \cap B_{n+1}) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu(T^{-n-1}E \cap D_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(T^{*-1}E \cap B_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(T^{-n}E \cap D_n) \\ &= \nu(T^{*-1}E \cap \bigcup_{n\geq 1} B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(T^{-n}E \cap D_n). \end{aligned}$$

Or $B^* \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n$ donc $\nu(T^{*-1}E \cap \bigcup_{n\geq 1} B_n) = \nu(T^{*-1}E) = \nu(E)$ et

$$\mu(T^{-1}E) = \nu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(T^{-n}E \cap D_n) = \mu(E). \ \square$$