

Groupes globalisants

Guido Ahumada, Bernard Brighi, Nicolas Chevallier et Augustin Fruchard

16 février 2018

Résumé

Un groupe de bijections G agissant sur un ensemble X est dit à *points fixes* (en abrégé, un GAF) si tout élément de G a au moins un point fixe. Le groupe G est dit à *point fixe global* (en abrégé, un GAG) s'il existe $x \in X$ fixé par tous les éléments de G . Le groupe G est dit *globalisant* si tout sous-groupe de G qui est un GAF est automatiquement un GAG. L'article explore quels sont les groupes globalisants. La situation dépend du groupe de bijections et de l'ensemble support X . Par exemple le groupe des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n est globalisant pour $n \leq 3$ mais ne l'est plus pour $n \geq 4$. Le cas des isométries des espaces elliptiques et hyperboliques est aussi considéré, ainsi que celui des isométries de certains ensembles discrets.

Mots-clés : groupe de bijections, point fixe, isométrie, inégalité de la médiane, arbre.

Classification MSC2010 : 51M04, 51M09, 57M60, 20F65.

1 Introduction

Il est facile de trouver un groupe de bijections ayant chacune un point fixe mais sans point fixe commun, par exemple le sous-groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, engendré par le cycle (123) et la double transposition $(12)(45)$, ou le groupe des rotations de la sphère de dimension deux, ou encore le groupe des homéomorphismes du disque unité. Un tel groupe sera dit *excentrique*. Quelle information supplémentaire faut-il ajouter à l'existence d'un point fixe pour chaque bijection du groupe, pour pouvoir conclure à l'existence d'un point fixe global ? Cette information supplémentaire peut être la conservation d'une structure géométrique, la commutativité du groupe ou une autre propriété algébrique, l'unicité du point fixe de chaque bijection différente de l'identité, ou encore une combinaison des informations précédentes.

La conservation d'une structure géométrique peut souvent se formuler par : le groupe de bijections est un sous-groupe d'un groupe de bijections plus grand G . Le fait que cette information suffise à conclure à l'existence d'un point fixe global peut se voir comme une propriété du grand groupe G . Nous dirons ainsi qu'un groupe G de bijections d'un ensemble X est *globalisant* s'il ne contient pas de sous-groupe excentrique.

À notre connaissance la notion de groupe de bijections globalisant n'a pas été le sujet de travaux ni même été définie antérieurement. Notons que cette notion n'est pas intrinsèque au groupe mais dépend de son action en tant que groupe de bijections. L'objet de cet article est d'explorer quels sont les groupes de bijections globalisants et, dans une moindre mesure, de trouver des conditions suffisantes pour qu'un groupe de bijections ait un point fixe global.

Concernant les groupes globalisants, nous verrons que la situation est très diverse suivant la nature et la dimension de l'ensemble X et suivant la nature des bijections. Nous avons en particulier étudié en détails les groupes d'isométries de certains espaces classiques.

Lorsque X est un espace métrique, nous notons $\text{Isom } X$ le groupe des isométries de X . Si de plus X est orientable, $\text{Isom}^+ X$ désigne le sous-groupe des isométries préservant l'orientation. Étant donné un entier $n \geq 1$, on note \mathbb{R}^n l'espace euclidien de dimension n , \mathbb{Z}^n le réseau des

points de \mathbb{R}^n à coordonnées entières, \mathbb{H}_n l'espace hyperbolique de dimension n , \mathbb{S}_n la sphère de dimension n , et $\mathbb{R}\mathbb{P}_n$ l'espace projectif de dimension n (nous avons choisi de ne mettre en exposant l'entier n que pour les produits cartésiens). Nos résultats concernant les groupes d'isométries de ces espaces classiques sont les suivants.

- ▷ Les groupes $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ et $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ sont globalisants si et seulement si $n \leq 3$.
- ▷ Les groupes $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ et $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_n$ sont globalisants si $n \leq 3$, et non globalisants si $n \geq 5$. Pour $n = 4$, la question est ouverte.

On pourrait croire que, pour chaque famille d'espaces $\mathbb{F}_n = \mathbb{R}^n, \mathbb{H}_n, \mathbb{S}_n$ ou \mathbb{Z}^n , il existe un nombre entier critique n_0 tel que le groupe des isométries de \mathbb{F}_n est globalisant si et seulement si $n \leq n_0$. C'est vrai pour \mathbb{R}^n (avec $n_0 = 3$) et \mathbb{H}_n (avec $n_0 = 3$ ou 4) mais faux pour \mathbb{S}_n et pour \mathbb{Z}^n :

- ▷ le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$ ou 3 ,
- ▷ le groupe $\text{Isom } \mathbb{Z}^n$ est globalisant pour tout $n \geq 1$, que \mathbb{Z}^n soit muni de la norme euclidienne ou de la norme 1.

Un ingrédient important pour l'existence de points fixes globaux est l'inégalité dite *de la médiane*, cf. formule (1) au début de la partie 4. Les espaces euclidiens et hyperboliques satisfont cette inégalité, mais pas les espaces sphériques, ni les espaces projectifs.

Cette inégalité a été introduite par F. Bruhat et J. Tits dans [5] et leur résultat est le suivant : si un espace métrique (E, d) est complet et satisfait l'inégalité de la médiane, alors tout groupe d'isométries ayant une orbite bornée a un point fixe global, cf. théorème 4.3 et corollaire 4.4.

Nous montrons par ailleurs qu'un groupe d'isométries G sur un espace métrique complet et vérifiant l'inégalité de la médiane est globalisant dès qu'il possède un sous-groupe distingué globalisant H tel que G/H est monogène, cf. corollaire 4.8. Ceci explique pourquoi $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ et $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ sont globalisants pour les mêmes valeurs de n ; il en est de même pour $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ et $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_n$. L'inégalité de la médiane est essentielle pour ce résultat : nous verrons que $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ est globalisant alors que $\text{Isom } \mathbb{S}_3$ ne l'est pas. Ainsi,

- ▷ le groupe $\text{Isom } \mathbb{S}_n$ n'est globalisant que pour $n = 1$.

Concernant l'espace projectif, nous obtenons :

- ▷ le groupe $\text{Isom } \mathbb{R}\mathbb{P}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$;
- ▷ le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbb{P}_n$ est globalisant si $n = 1$, et non globalisant si $n = 2$ ou $n \geq 4$. Nous ne savons pas si $\text{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbb{P}_3$ est globalisant ou non.

Un autre ingrédient important est l'existence de certains sous-groupes libres du groupe linéaire. Il sert à construire des sous-groupes excentriques. Un résultat très général d'A. Borel [4] assure cette existence, mais des résultats plus élémentaires fournissent des sous-groupes libres explicites qui sont suffisants pour nos besoins (cf. [16], chap.VIII-26 et [23], chap.5).

La structure de l'article est la suivante. Dans la partie 2 nous présentons les notations et quelques résultats préliminaires. La partie 3 concerne les groupes de transformations affines et la partie 4 plus spécifiquement les isométries. Les groupes d'isométries des espaces classiques sont étudiés en détails dans la partie 5, d'abord les espaces euclidiens, puis hyperboliques, puis elliptiques. La partie 6 présente nos résultats sur des ensembles discrets : d'abord le groupe symétrique et le groupe alterné, puis le groupe $\text{Isom } \mathbb{Z}^n$, et enfin des résultats concernant certains graphes et étendant un résultat de Serre sur les points fixes de groupes de type fini d'isométries d'un arbre, cf. [20]. La partie 7 propose des exercices ; les solutions sont données dans l'annexe 8.4. L'annexe 8.1 présente une petite introduction à la géométrie hyperbolique et les annexes 8.2 et 8.3 contiennent des détails de preuves.

Nous laissons plusieurs questions ouvertes à notre connaissance. Il est possible que certaines aient déjà leur réponse dans la littérature existante, ou que nos lecteurs trouvent des réponses. Dans ce cas, nous serions ravis d'en être informés !

2 Préliminaires

2.1 Notations

Groupes. Étant donné un groupe G , on note $H \leq G$ pour dire que H est un sous-groupe de G et $H \trianglelefteq G$ pour dire que c'est un sous-groupe distingué.

Si A est une partie d'un groupe G , on note $\langle A \rangle$ le sous-groupe de G engendré par A . Lorsque A contient un petit nombre d'éléments, on omettra les accolades. Ainsi on a

$$\langle f, g \rangle = \bigcap_{f, g \in H \leq G} H = \{ f^{i_1} g^{j_1} \dots f^{i_n} g^{j_n} ; n \in \mathbb{N}, i_k, j_k \in \mathbb{Z} \}.$$

Le *commutateur* de f et g est $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$.

Étant donné un ensemble X , on note $\text{Bij } X$ le groupe des bijections de X .

Espaces métriques. Étant donné un espace métrique (X, d) , une *isométrie* $f : X \rightarrow X$ est une *bijection* telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Comme mentionné dans l'introduction, $\text{Isom } X$ le groupe des isométries de X , et $\text{Isom}^+ X$ le sous-groupe de celles préservant cette orientation lorsque X est orientable.

Pour un élément $x \in X$ et un réel $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in X ; d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et $B'(x, r) = \{y \in X ; d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée de même rayon. Étant donnés deux points a et b de X on note $\text{Med}(a, b)$ le médiateur de a et b :

$$\text{Med}(a, b) = \{c \in X ; d(a, c) = d(b, c)\}.$$

Espaces affines et euclidiens. Étant donnée une bijection affine $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, \vec{f} désigne l'application linéaire associée, définie par $\vec{f}(x) = f(x) - f(0)$. L'application $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes. En particulier, on a $[\vec{f}, \vec{g}] = \vec{[f, g]}$.

De même, si F est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n , alors \vec{F} désigne le sous-espace vectoriel associé.

Étant donnée une partie $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $\text{Aff } A$ l'espace affine engendré par A , i.e. l'intersection de tous les sous-espaces affines de \mathbb{R}^n contenant A . De même que pour les groupes engendrés, si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, on écrira $\text{Aff}(a_1, \dots, a_n)$ au lieu de $\text{Aff}(\{a_1, \dots, a_n\})$.

Espaces hyperboliques. Nous utiliserons le modèle du demi-espace supérieur muni de la métrique de Poincaré, voir annexe 8.1.

2.2 GAF, GAG et groupe globalisant

Un *groupe de bijections* (X, G) est la donnée d'un ensemble X et d'un sous-groupe G de $\text{Bij } X$. Étant donnée une bijection $g : X \rightarrow X$, son ensemble de points fixes est

$$\text{Fix } g = \{x \in X ; g(x) = x\}.$$

Un groupe de bijections (X, G) est appelé un *groupe à points fixes* (en abrégé, un GAF) si $\text{Fix } g$ est non vide pour tout $g \in G$. On dit que (X, G) est un *groupe à points fixes globaux* (en abrégé, un GAG) si

$$\text{Fix } G := \bigcap_{g \in G} \text{Fix } g \neq \emptyset.$$

Un GAF qui n'est pas un GAG est dit *excentrique*. Avec le vocabulaire ci-dessus, on dit que (X, G) est *globalisant* si, pour tout sous-groupe $H \leq G$, on a

$$(X, H) \text{ GAF} \Leftrightarrow (X, H) \text{ GAG},$$

i.e. s'il ne contient pas de sous-groupe excentrique. Notons que tout sous-groupe d'un groupe globalisant est globalisant. Nous omettrons l'ensemble X lorsque le contexte sera clair. De la même manière nous dirons qu'une action ρ d'un groupe G sur un ensemble X est globalisante si $(X, \rho(G))$ est un groupe de bijections globalisant. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit f, g deux bijections sur un ensemble X .*

- a. *Si f et g commutent, alors $g(\text{Fix } f) = \text{Fix } f$.*
- b. *Si $\text{Fix } f$ est un singleton $\{x_0\}$, alors $x_0 \in \text{Fix } g$ pour tout g commutant avec f .*
- c. *Soit G un groupe de bijections sur X et soit $H \leq G$. Pour tout $g \in G$, on a $g(\text{Fix } H) = \text{Fix } H$.*

Preuve. a. Si $x \in \text{Fix } f$ alors $g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \text{Fix } f$. Ainsi $g(\text{Fix } f) \subseteq \text{Fix } f$. Par ailleurs g^{-1} commute aussi avec f , donc $g^{-1}(\text{Fix } f) \subseteq \text{Fix } f$. On obtient alors $\text{Fix } f = g(g^{-1}(\text{Fix } f)) \subseteq g(\text{Fix } f)$, d'où l'égalité.

b. Résulte de l'item a.

c. Soit $g \in G$. Il suffit de montrer que $g(x) \in \text{Fix } h$ pour tout $x \in \text{Fix } H$ et tout $h \in H$, ce qui entraînera $g(\text{Fix } H) \subseteq \text{Fix } H$. En l'appliquant à g^{-1} on aura l'égalité voulue. Pour un tel x et un tel h , on a $k = g^{-1}hg \in H$, donc $x \in \text{Fix } k$. On a donc $g(x) = g(k(x)) = h(g(x))$, d'où $g(x) \in \text{Fix } h$. \square

On déduit immédiatement de **b** une première condition suffisante pour qu'un groupe de bijections soit un GAG.

Proposition 2.2. *Soit G un groupe de bijections sur X . Si G est abélien et s'il existe $f_0 \in G$ ayant un point fixe unique, alors G est un GAG.*

Nous verrons dans la partie 3 que chacun des mots "abélien" et "unique" est nécessaire.

Terminons cette partie par des remarques de nature algébrique.

1. La notion "globalisant" est compatible avec le produit : si (X_1, G_1) et (X_2, G_2) sont deux groupes de bijections globalisants, on vérifie facilement que l'action du groupe produit $G_1 \times G_2$ sur $X_1 \times X_2$ est globalisante.
2. La notion "globalisant" n'est en revanche pas compatible avec l'induction de Frobenius [10]. Précisément, soit G un groupe, H un sous-groupe de G et R un système de représentants des classes modulo H . Une action de H sur un ensemble Y induit une action de G sur $X = R \times Y$ définie par $g(r, y) = (r', h(y))$ où $r' \in R$ et $h \in H$ sont déterminés de manière unique par $gr = r'h$.

La section 6.1 sur les groupes de permutations fournit un exemple où l'action (Y, H) est globalisante sans que l'action induite ne le soit. On considère le groupe G des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et H le sous-groupe des permutations fixant 5, vu comme agissant sur $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. On choisit comme système de représentants $r_i = (i\ 5)$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $r_5 = \text{id}$.

D'après la proposition 6.1, (Y, H) est globalisant. En revanche, (X, G) ne l'est pas : soit K le sous-groupe de G engendré par les permutations (123) et $(12)(45)$. On trouve

$$K = \{\text{id}, (123), (132), (12)(45), (13)(45), (23)(45)\},$$

$\text{Fix } (12)(45) = \{(r_3, 5)\}$, $\text{Fix } (13)(45) = \{(r_2, 5)\}$, $\text{Fix } (23)(45) = \{(r_1, 5)\}$, et $\text{Fix } (123) = \text{Fix } (132) = \{(r_4, 4), (r_4, 5), (r_5, 4), (r_5, 5)\}$. Ainsi K est un sous-groupe excentrique de (X, G) .

3. La notion "globalisant" dépend fortement de l'ensemble sur lequel le groupe agit. Dans l'exercice 7.2, nous introduisons une notion intrinsèque de globalisation : Un groupe est dit *super-globalisant* si, pour tout ensemble X et tout morphisme $\rho : G \rightarrow \text{Bij } X$, le couple $(X, \rho(G))$ est globalisant. Cette notion a finalement un intérêt assez limité : le résultat de l'exercice 7.2 est qu'un groupe est super-globalisant si et seulement s'il est monogène. En revanche, le groupe additif \mathbb{Q} est *finiment super-globalisant* au sens suivant : si X est un ensemble fini et $\rho : \mathbb{Q} \rightarrow \text{Bij } X$ un morphisme, alors $(X, \rho(\mathbb{Q}))$ est globalisant, cf. exercice 7.3.

3 Groupes de bijections affines

La structure affine est la plus fondamentale des structures géométriques ; il est donc naturel de débiter notre étude par les groupes de bijections affines de \mathbb{R}^n . Les résultats sont plutôt négatifs sauf en dimension 1.

Proposition 3.1. *Le groupe des bijections affines de \mathbb{R} est globalisant.*

Preuve. Soit H un groupe d'applications affines de \mathbb{R} qui est un GAF. Comme une bijection affine de \mathbb{R} différente de l'identité a au plus un point fixe, il suffit de montrer que H est abélien puis d'appliquer la proposition 2.2. Si f et g sont dans H alors le commutateur $[f, g]$, qui a aussi un point fixe, n'est pas une translation non triviale. Puisque le groupe linéaire est abélien, il ne peut s'agir que de l'identité. \square

La commutativité du groupe linéaire et l'unicité des points fixes sont les deux ingrédients de la proposition précédente. Ces deux ingrédients sont caractéristiques de la dimension 1. En dimension plus grande, ajouter une seule des hypothèses de commutativité ou d'unicité des points fixes ne suffit pas à prouver qu'un GAF est un GAG comme le montrent les exemples 3.2 et 3.3 ci-dessous.

Exemple 3.2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit f et g les transvections affines de \mathbb{R}^2 données par

$$f(x, y) = (x + y + 1, y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = (x + ay, y).$$

Alors le groupe $G = \langle f, g \rangle$ est abélien et excentrique.

Preuve. Il est évident que G est abélien. Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $f^m g^n(x, y) = (x + (m + na)y + m, y)$, donc $\text{Fix}(f^m g^n)$ est non vide : c'est la droite $D_{m,n}$ d'équation $y = \frac{-m}{m+na}$. Ainsi G est un GAF. On a aussi $D_{m,n} \cap D_{m',n'} = \emptyset$ dès que $mn' \neq m'n$, donc G n'est pas un GAG. \square

Remarques.

1. Si on munit \mathbb{R}^2 de la distance discrète, donnée par $d(a, b) = 1$ si $a \neq b$ et $d(a, a) = 0$, alors le groupe G de l'exemple précédent est un groupe abélien excentrique d'isométries. L'exemple 4.10 de la prochaine partie est un exemple de groupe abélien excentrique d'isométries dans un espace vectoriel de Hilbert de dimension infinie. Par contre, le théorème 4.9 montre qu'il n'existe pas de groupe abélien excentrique d'isométries de l'espace euclidien ou hyperbolique de dimension finie.

2. Ce qui précède montre que le groupe des bijections affines de \mathbb{R}^n (avec $n \geq 1$) est globalisant si et seulement si $n = 1$: pour $n \geq 3$, il suffit de compléter les applications f et g précédentes par l'identité sur les $n - 2$ dernières composantes, comme cela sera fait dans la preuve de la proposition 5.6.

Exemple 3.3. Soit $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et soit $f, g \in \text{Bij } \mathbb{R}^2$ les bijections affines

$$f : x \mapsto \vec{f}(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \vec{g}(x) + b,$$

où \vec{f} et \vec{g} sont les éléments de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ayant pour matrices :

$$\text{Mat}(\vec{f}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Mat}(\vec{g}) = B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors le groupe $G_1 = \langle f, g \rangle$ est excentrique. Plus précisément, tout élément de $G_1 \setminus \{\text{id}\}$ a un unique point fixe mais G_1 n'est pas un GAG.

On rappelle que $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers et de déterminant égal à 1. La preuve repose sur les deux résultats suivants.

Lemme 3.4. ([16] Chapitre VIII) *Soit G_0 le sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ engendré par les matrices A et B précédentes. Alors G_0 est libre et toute matrice $M \in G_0 \setminus \{I\}$ a une trace différente de 2.*

La preuve est dans l'annexe 8.2. On en déduit que 1 n'est pas valeur propre de M pour toute matrice $M \in G_0 \setminus \{I\}$, puisque $\det M = 1$.

Lemme 3.5. *Soit h une bijection affine sur \mathbb{R}^n telle que 1 n'est pas valeur propre de \vec{h} . Alors $\text{Fix } h$ est un singleton.*

Preuve. On a $h(x) = x \Leftrightarrow x - \vec{h}(x) = h(0) \Leftrightarrow x = (\mathbf{id} - \vec{h})^{-1}(h(0))$. □

Preuve de l'exemple 3.3. Soit $h \in G_1 \setminus \{\mathbf{id}\}$ et soit $\gamma_1, \gamma'_1, \dots, \gamma_r, \gamma'_r \in \mathbb{Z}$, tous non nuls sauf éventuellement γ_1 et γ'_r , tels que $h = f^{\gamma_1} g^{\gamma'_1} \dots g^{\gamma'_r}$. On a $\vec{h} = \vec{f}^{\gamma_1} \vec{g}^{\gamma'_1} \dots \vec{g}^{\gamma'_r} \neq \mathbf{id}$, donc \vec{h} n'a pas 1 comme valeur propre d'après le lemme 3.4, donc h a un unique point fixe d'après le lemme 3.5. Cependant il n'existe pas de point fixe commun à tous les éléments de G_1 puisque les points fixes de f et de g sont distincts. □

Pour finir cette section, rappelons deux résultats classiques sur l'existence de points fixes globaux pour des groupes ou ensembles d'applications affines. Le premier est le théorème de Markov-Kakutani et le second est le théorème de Kakutani, voir [13, 7, 18, 12]. Ces deux résultats nécessitent une hypothèse de compacité et une hypothèse additionnelle. L'exercice 7.12 présente une version en dimension finie de ces résultats. Elle est due à R. Antetomaso [1].

Théorème 3.6. (Markov-Kakutani, cf. par exemple [18], Theorem 5.23, p.140) *Soit K une partie convexe compacte non vide d'un espace vectoriel topologique séparé E et soit G un ensemble d'applications affines et continues qui commutent et qui laissent K stable. Alors $K \cap \text{Fix } G$ est non vide.*

Théorème 3.7. (Kakutani, cf. [18], Theorem 5.11, p.127) *Soit K une partie convexe compacte d'un espace vectoriel topologique localement convexe E et soit G un groupe équicontinu de bijections affines qui laissent K stable. Alors $K \cap \text{Fix } G$ est non vide.*

La littérature contient un grand nombre de travaux récents contenant des compléments et des extensions de ces résultats. Parmi ceux-ci, citons un complément au théorème 3.6 dû à Anzai et Ishikama [2] : sous les hypothèses du théorème 3.6, avec de plus E localement convexe, si G est un groupe finiment engendré, $G = \langle T_1, \dots, T_n \rangle$, alors, pour tous $\alpha_j \in]0, 1[$ vérifiant $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, on a $\text{Fix} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j T_j \right) = \text{Fix } G$.

Le théorème ci-dessous peut se déduire du théorème 3.7 mais nous avons choisi d'en donner une preuve indépendante.

Théorème 3.8. *Un groupe de bijections affines de \mathbb{R}^n possédant une orbite bornée est un GAG.*

Preuve. Soit G un tel groupe et soit x un élément de \mathbb{R}^n dont l'orbite $\mathcal{O}_x = \{f(x) ; f \in G\}$ est bornée. Soit K l'enveloppe convexe fermée de \mathcal{O}_x . Comme \mathcal{O}_x , K est invariant par toutes les applications $f \in G$. Soit $F = \text{Aff } K$, le sous-espace affine engendré par K . L'intérieur de K relativement à F est non vide, donc $\lambda_F(K) > 0$, où λ_F désigne une mesure de Lebesgue de F (dans le cas où K est un singleton, λ_F est la mesure de comptage). Puisque K est compact, on a aussi $\lambda_F(K) < +\infty$. Les applications $f \in G$ sont affines, donc envoient la mesure λ_F sur un multiple d'elle-même. Puisqu'elles envoient K sur K , elles conservent λ_F . Le barycentre de K relatif à la restriction de λ_F à K , défini par $\frac{1}{\lambda_F(K)} \int_K x d\lambda_F(x)$, est donc fixé par toutes les applications $f \in G$. □

4 Groupes d'isométries

4.1 L'inégalité de la médiane

Le théorème du point fixe de Bruhat-Tits [5] donne une condition suffisante pour qu'un groupe d'isométries sur un espace métrique soit un GAG : il suffit que l'espace vérifie l'inégalité de la médiane ci-dessous et que le groupe possède une orbite bornée.

Définition 4.1. On dit qu'un espace métrique (X, d) vérifie l'inégalité de la médiane si

$$\forall x, y \in X \exists m \in X \forall z \in X \quad d(z, m)^2 \leq \frac{1}{2}(d(z, x)^2 + d(z, y)^2) - \frac{1}{4}d(x, y)^2. \quad (1)$$

Il est facile de montrer que le point m est unique et que $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y)$, cf. exercice 7.4. On dit que m est le milieu de $\{x, y\}$ et on le note $m(x, y)$.

Lorsque X est un espace euclidien, ou plus généralement préhilbertien, (1) est en fait une égalité, appelée l'identité du parallélogramme, et m est le milieu usuel du segment $[x, y]$, cf. exercice 7.5 a. Réciproquement, il est connu qu'un espace vectoriel normé vérifiant (1) est nécessairement préhilbertien, cf. exercice 7.5 b.

Un arbre combinatoire muni de sa distance usuelle ne vérifie pas (1) (une arête n'a pas de milieu) mais sa réalisation comme espace métrique réel la vérifie. Les arbres sont d'ailleurs les seuls graphes avec cette propriété. Les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle négative, en particulier les espaces hyperboliques munis de leur distance usuelle, satisfont (1), cf. [5]. C'est une conséquence du théorème de comparaison de Rauch [8], cf. exercice 7.6.

L'inégalité de la médiane permet d'associer un unique centre à une partie bornée d'un espace métrique complet. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie bornée non vide de X . Pour chaque $x \in X$, soit

$$r(x, A) = \inf\{r > 0 ; A \subseteq B'(x, r)\} = \sup\{d(x, a) ; a \in A\}.$$

On définit le rayon de A par

$$r_A = \inf\{r(x, A) ; x \in X\}.$$

S'il existe $x_0 \in X$ tel que $r_A = r(x_0, A)$, on dira que x_0 est un centre de A . Dans ce cas, la boule fermée $B'(x_0, r_A)$ est une boule circonscrite à A .

Lemme 4.2. [5] Si (X, d) est un espace métrique complet vérifiant (1), alors toute partie bornée non vide de X admet un unique centre.

Preuve. Soit A une partie bornée non vide de X , soit $x, y \in X$ et soit m le milieu de $\{x, y\}$. En écrivant (1) pour tout $a \in A$, on obtient

$$\begin{aligned} d(m, a)^2 &\leq \frac{1}{2}(d(x, a)^2 + d(y, a)^2) - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(r(x, A)^2 + r(y, A)^2) - \frac{1}{4}d(x, y)^2, \end{aligned}$$

d'où on tire successivement

$$r_A^2 \leq r(m, A)^2 \leq \frac{1}{2}(r(x, A)^2 + r(y, A)^2) - \frac{1}{4}d(x, y)^2,$$

et

$$\frac{1}{2}d(x, y)^2 \leq r(x, A)^2 + r(y, A)^2 - 2r_A^2. \quad (2)$$

On en déduit l'unicité d'un éventuel centre : si x et y sont des centres de A alors $r(x, A) = r(y, A) = r_A$ et (2) entraîne $x = y$.

Pour démontrer l'existence, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $r(x_n, A) \rightarrow r_A$. En prenant $x = x_n$ et $y = x_{n+p}$ dans (2), on obtient

$$\frac{1}{2} d(x_n, x_{n+p})^2 \leq r(x_n, A)^2 + r(x_{n+p}, A)^2 - 2r_A^2 \rightarrow 0$$

uniformément en p lorsque n tend vers l'infini. Ainsi la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc a une limite ℓ vérifiant $r(\ell, A) = r_A$, donc ℓ est un centre de A . \square

Le théorème du point fixe de Bruhat-Tits s'énonce ainsi.

Théorème 4.3. [5] *Soit G un groupe d'isométries d'un espace métrique complet (X, d) vérifiant l'inégalité de la médiane (1). S'il existe une partie bornée non vide de X invariante par tous les éléments de G , alors G est un GAG.*

Preuve. Soit A une partie bornée non vide de X laissée invariante par tout $g \in G$ et soit a le centre de A . Alors, pour tout $g \in G$, $g(B'(a, r_A)) = B'(g(a), r_A)$ est la boule circonscrite à $g(A) = A$, donc par unicité du centre, $g(a) = a$. Ainsi $a \in \text{Fix } G$ donc G est un GAG. \square

On en déduit immédiatement le

Corollaire 4.4. *Soit G un groupe d'isométries d'un espace affine euclidien ou d'un espace hyperbolique. Si G admet une orbite bornée, alors G est un GAG.*

Certains des résultats qui suivent serviront dans la partie 6.

Définition 4.5. Soit (E, d) un espace métrique complet vérifiant (1). Une partie C de E est dite à *moitié convexe* si, pour tous $x, y \in C$, le milieu de $\{x, y\}$ est dans C .

On montre facilement qu'une partie fermée et à moitié convexe d'un espace vectoriel normé est convexe au sens usuel.

La proposition qui suit affirme l'existence et l'unicité d'une "projection orthogonale" sur l'ensemble de points fixes d'un groupe d'isométries. Nous l'avons scindée en trois énoncés qui ont leur propre intérêt. On rappelle que $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Proposition 4.6. *Soit (E, d) un espace métrique complet vérifiant (1).*

- a.** *Si $C \subset E$ est une partie fermée et à moitié convexe de E alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = d(x, y)$. On note ce point $y = \pi_C x$.*
- b.** *Si g est une isométrie de E , alors $\text{Fix } g$ est fermée et à moitié convexe.*
- c.** *Si G est un groupe d'isométries de E , alors $\text{Fix } G$ est fermée et à moitié convexe.*

Preuve. **a.** Posons $\delta = d(x, C)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in C$ tel que $d(x, y) < \delta + \varepsilon$. Si $z \in C$ satisfait aussi cette inégalité, puisque $d(x, m(y, z)) \geq \delta$, (1) donne alors

$$d(y, z)^2 \leq 8\delta\varepsilon + 4\varepsilon^2. \quad (3)$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $y_n \in C$ tel que $d(x, y_n) < \delta + \frac{1}{n}$. D'après ce qui précède, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est de Cauchy, donc converge vers un point $y \in C$ vérifiant $d(x, y) = \delta$, d'où l'existence. L'inégalité (3) montre aussi l'unicité.

b. et **c.** Vérification facile. \square

Théorème 4.7. *Soit (E, d) un espace métrique complet vérifiant (1), soit G un groupe d'isométries de E et soit $H \trianglelefteq G$ tel que G/H est monogène. Si G est un GAF et H un GAG, alors G est un GAG.*

Preuve. Soit $\varepsilon \in G$ tel que εH engendre G/H . Notons $F = \text{Fix } H$. Puisque H est distingué dans G , on a $g(F) = F$ pour tout $g \in G$ d'après la proposition 2.1.c, en particulier $\varepsilon(F) = F$.

Soit $x \in \text{Fix } \varepsilon$. Par unicité de la projection orthogonale et puisque ε est une isométrie, on a $\varepsilon(\pi_F x) = \pi_{\varepsilon(F)} \varepsilon(x) = \pi_F x$, donc $\pi_F x \in \text{Fix } \varepsilon$, or $G = \langle \varepsilon, H \rangle$, donc $\pi_F x \in \text{Fix } G$. \square

Corollaire 4.8. *Soit (E, d) métrique complet vérifiant (1) et soient $H \trianglelefteq G \leq \text{Isom } E$ tels que G/H est résoluble et fini. Si H est globalisant, alors G est globalisant. En particulier un groupe d'isométries de E est globalisant dès qu'il contient un sous-groupe globalisant d'indice 2.*

Preuve. On suppose d'abord que le quotient G/H est monogène. Soit $G_1 \leq G$ un GAF ; alors $H_1 = G_1 \cap H$ est un GAF, donc un GAG puisque H est globalisant. Par ailleurs G_1/H_1 est isomorphe à un sous-groupe de G/H , donc monogène, donc G_1 est un GAG d'après le théorème 4.7.

Comme les groupes abéliens finis sont produits de groupes monogènes, sous l'hypothèse G/H résoluble et fini, il existe une suite finie $H = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$ telle que, pour chaque $i = 1, \dots, n$, le quotient H_i/H_{i-1} est monogène. On applique alors successivement le résultat aux quotients monogènes.

Pour la dernière assertion, si H est un sous-groupe d'indice 2 de G , alors H est distingué dans G et G/H est cyclique d'ordre 2. \square

Remarques.

1. Notre preuve n'est pas valable si G/H est seulement supposé résoluble. La bonne notion dans notre contexte est G/H polycyclique [19], i.e. G/H admet une suite finie $\{e\} = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G/H$ avec H_i/H_{i-1} monogène. Nous ne savons pas ce qu'il en est lorsque G/H est seulement supposé résoluble et de type fini.

2. Le fait que l'espace ambiant vérifie (1) est essentiel : nous verrons dans la partie 5.3 que $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ est globalisant, alors que $\text{Isom } \mathbb{S}_3$ ne l'est pas.

4.2 Sous-groupes résolubles : les cas euclidien et hyperbolique

On fixe un entier $n \geq 0$. La notation \mathbb{F}_n désignera ou bien l'espace euclidien \mathbb{R}^n , ou bien l'espace hyperbolique \mathbb{H}_n . Nous utiliserons que \mathbb{F}_n vérifie (1).

Théorème 4.9. *Soit G un groupe abélien d'isométries de \mathbb{F}_n . Si G est un GAF, alors G est un GAG.*

Preuve. Elle se fait par récurrence sur la dimension n . Pour $n = 0$ le résultat est trivial. À présent, soit $n \geq 1$ et supposons la propriété vraie pour tout $k < n$.

Si $G = \{\text{id}\}$, on a fini. Sinon, soit $f \in G \setminus \{\text{id}\}$. Alors $F = \text{Fix } f$ est un sous-espace (affine ou hyperbolique) strict de \mathbb{F}_n , de dimension $k < n$. Soit $g \in G$. Comme f et g commutent, on a $g(F) = F$ d'après la proposition 2.1.a. Ainsi, pour tout $g \in G$, la restriction de g à F , notée $g|_F$, est bien définie de F dans F et c'est une isométrie de F qui est lui-même isométrique à \mathbb{F}_k .

Par hypothèse, $\text{Fix } g$ est non vide. Soit $x_g \in \text{Fix } g$ et soit $y_g = \pi_F x_g$. Puisque g est une isométrie et par unicité de la projection orthogonale, on a $g(y_g) = \pi_{g(F)} g(x_g) = \pi_F x_g = y_g$. Ainsi, pour tout $g \in G$, $g|_F$ a au moins un point fixe y_g .

Soit $G_F = \{g|_F ; g \in G\}$. Alors G_F est un GAF sur un espace de dimension $k < n$, donc est un GAG par hypothèse de récurrence. Comme $\text{Fix } G_F = F \cap \text{Fix } G$, on en déduit que $\text{Fix } G$ est non vide, donc G est un GAG. \square

L'exemple qui suit montre que la dimension finie est nécessaire.

Exemple 4.10. Soit $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'espace des suites réelles de carré sommable ; c'est un espace de Hilbert. Soit h_k la symétrie de centre 1 sur la k -ième composante, i.e. l'isométrie de E définie par

$$h_k(x_0, x_1, \dots) = (x_0, \dots, x_{k-1}, 2 - x_k, x_{k+1}, \dots).$$

Soit $G_n = \langle h_0, \dots, h_n \rangle$ et soit $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Il est immédiat que G est abélien. Notons $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de E et $s_n = \sum_{k=0}^n e_k$. On a $s_n \in \text{Fix } f$ pour tout $f \in G_n$, donc G est un GAF. Par l'absurde, si G était un GAG et si $x = (x_0, x_1, \dots) \in \text{Fix } G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aurait $x_n = 1$, mais la suite constante égale à 1 n'est pas dans E . Ainsi G est excentrique.

Le théorème 4.9 peut être généralisé en changeant le mot "abélien" en "résoluble".

Théorème 4.11. Soit G un groupe résoluble d'isométries de \mathbb{F}_n . Si G est un GAF, alors G est un GAG.

Preuve. Rappelons qu'un groupe G est dit *résoluble* s'il existe une suite finie et croissante de sous-groupes, $\{e_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_p = G$ (i.e. chacun distingué dans le suivant) tels que les quotients H_{k+1}/H_k sont tous abéliens. L'*indice de résolubilité* de G est le plus petit entier $p \geq 0$ vérifiant cette propriété. Cet entier est atteint par exemple en prenant la suite des groupes dérivés : on pose $G_0 = G$ puis, pour $k \geq 0$, $G_{k+1} = G'_k = [G_k, G_k]$, le groupe engendré par les commutateurs de G_k . Pour finir, on choisit $H_k = G_{p-k}$.

La preuve se fait par récurrence sur l'indice de résolubilité de G . La propriété est trivialement vraie pour $p = 0$. Supposons-la vraie pour tout groupe d'indice de résolubilité $p-1$ et montrons-la pour G .

Soit $G_1 = [G, G]$. Puisque G est un GAF, G_1 est un GAF, donc un GAG par hypothèse de récurrence, donc $F = \text{Fix } G_1$ est non vide. Puisque G_1 est distingué dans G , on vérifie que $g(F) = F$ pour tout $g \in G$.

Maintenant le groupe G/G_1 agit naturellement sur F : si $\bar{g} = \{gh ; h \in G_1\}$ est un élément de G/G_1 et si $x \in F$, alors $\bar{g}(x) := g(x)$ ne dépend pas du choix du représentant $g \in \bar{g}$ puisque $h(x) = x$ pour tout $h \in G_1$.

Nous affirmons que le couple $(F, G/G_1)$ est un GAF. En effet, puisque G est un GAF, si $g \in G$ et $x \in \text{Fix } g$ alors, comme dans la preuve du théorème 4.9, par unicité de la projection orthogonale, la projection $\pi_F x$ est aussi dans $\text{Fix } g$. Ainsi, $F \cap \text{Fix } g \neq \emptyset$, ce qui entraîne que $\text{Fix } \bar{g} \neq \emptyset$ pour tout $\bar{g} \in G/G_1$ vu comme isométrie de F .

Comme G/G_1 est un groupe abélien et que F est un espace (euclidien ou hyperbolique) de dimension finie, G/G_1 est un GAG d'après le théorème 4.9. Tout point fixe global $x \in F$ de G/G_1 est alors fixé par n'importe quel élément de G , donc G est lui-même est un GAG. \square

5 Groupes d'isométries des espaces classiques

Dans toute la partie 5, n désigne un entier strictement positif.

5.1 Le cas des espaces euclidiens

Rappelons que $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ est le groupe des isométries de \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne usuelle et que $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ est le sous-groupe de celles préservant l'orientation. Il est connu que les éléments de $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ sont des applications affines, cf. exercice 7.9. Dans cette partie 5.1, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 5.1. Le groupe $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ est globalisant si et seulement si $n \leq 3$.

Nous laissons en exercice 7.1 au lecteur le plaisir de montrer que $\text{Isom } \mathbb{R}^2$ est globalisant. Nous montrerons successivement que $\text{Isom } \mathbb{R}^3$ est globalisant, puis que $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ ne l'est pas, ce qui entraînera que $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ ne l'est pas pour $n \geq 4$.

Le cas de la dimension 3

Rappelons que les éléments $f \in \text{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ tels que $\text{Fix } f \neq \emptyset$ sont l'identité et les rotations autour d'un axe $\text{Fix } f$. Ceux ayant un ensemble de points fixes vide sont les translations et les vissages (un vissage est le produit commutatif d'une rotation r et d'une translation de vecteur non nul et parallèle à l'axe de r). Le lemme suivant est une étape clé pour prouver que $\text{Isom } \mathbb{R}^3$ est globalisant. On retrouve cette même étape pour prouver que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique de dimension 3 est globalisant, voir le lemme 5.13.

Lemme 5.2. *Si $f, g \in \text{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ sont tels que $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$, alors il existe $h \in \langle f, g \rangle$ tel que $\text{Fix } h = \emptyset$.*

Preuve. Si $\text{Fix } f$, $\text{Fix } g$ ou $\text{Fix } (f^{-1}g)$ est vide, on a fini. Sinon, soit $a \in \text{Fix } (f^{-1}g)$ et soit $b = f(a) = g(a)$. On a $b \neq a$ puisque $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$. Alors pour tout $c \in \text{Fix } f$ on a $d(a, c) = d(f(a), f(c)) = d(b, c)$. Ainsi $\text{Fix } f$ est dans $\text{Med}(a, b)$, le plan médiateur de a et b . Il en est de même de $\text{Fix } g$. Puisque $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$ c'est que $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ sont deux droites parallèles. Il s'ensuit que $\overrightarrow{[f, g]} = \text{id}$. Si f et g commutent, on aurait $f(\text{Fix } g) = \text{Fix } g$ d'après la proposition 2.1.a., en contradiction avec $f \neq \text{id}$. Ainsi $[f, g]$ est une translation non triviale, donc $\text{Fix } [f, g] = \emptyset$. \square

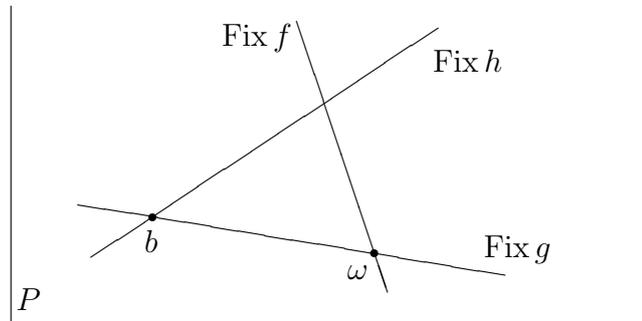
Proposition 5.3. *Le groupe $\text{Isom } \mathbb{R}^3$ est globalisant.*

Preuve. D'après le corollaire 4.8, il suffit de montrer que $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ est globalisant. Soit $G \leq \text{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ un GAF. On doit montrer que $\text{Fix } G \neq \emptyset$. Le lemme 5.2 implique déjà $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g \neq \emptyset$ pour tous $f, g \in G$.

On appelle *demi-tour* une symétrie par rapport à une droite appelée axe. Nous utiliserons le fait suivant : si le produit de deux demi-tours est un demi-tour, alors leurs axes sont orthogonaux et sécants.

Si $G \setminus \{\text{id}\}$ ne contient que des demi-tours alors, ou bien $G = \{\text{id}, f\}$ où f est un demi-tour, ou bien $G = \{\text{id}, f_1, f_2, f_3\}$ où f_1, f_2, f_3 sont trois demi-tours d'axes orthogonaux et sécants deux à deux, donc sécants tous les trois en un même point, donc G est un GAG.

On suppose maintenant qu'il existe $f \in G \setminus \{\text{id}\}$ qui ne soit pas un demi-tour. Si $\text{Fix } g = \text{Fix } f$ pour tout $g \in G \setminus \{\text{id}\}$, on a fini : $\text{Fix } G = \text{Fix } f \neq \emptyset$. On suppose à présent qu'il existe $g \in G \setminus \{\text{id}\}$ tel que $\text{Fix } g \neq \text{Fix } f$. Ainsi $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ sont deux droites sécantes en un point noté ω . Notons $P = \text{Aff}(\text{Fix } f \cup \text{Fix } g)$, le plan affine contenant $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$.



On aura fini en montrant que $\omega \in \text{Fix } G$. Par l'absurde, sinon, soit $h \in G$ tel que $\omega \notin \text{Fix } h$. Puisque $\text{Fix } f \cap \text{Fix } h$ et $\text{Fix } g \cap \text{Fix } h$ sont non vides, on a $\text{Fix } h \subset P$. Soit $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a) = b \in \text{Fix } g \cap \text{Fix } h$. On a $b \in P$ et $b \notin \text{Fix } f$, or f n'est pas un demi-tour, donc $a \notin P$. Soit $\tilde{g} = f^{-1}gf$. On a $\tilde{g}(a) = a$ et $\tilde{g}(\omega) = \omega$, donc $\text{Fix } \tilde{g} = \text{Aff}(a, \omega)$, qui est une droite disjointe de $\text{Fix } h$, une contradiction. \square

Remarque. On peut aussi prouver ce résultat en recopiant la preuve du lemme 5.14.

Le cas des dimensions supérieures

Proposition 5.4. *Le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ n'est pas globalisant. Par conséquent le groupe $\text{Isom} \mathbb{R}^4$ n'est pas globalisant.*

Preuve. Nous reproduisons ci-dessous la construction par Wagon [23] d'un sous-groupe libre de rang 2 dans SO_4 dont l'action sur la sphère \mathbb{S}_3 est sans point fixe. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta$ soit transcendant, par exemple $\theta = 1$, et soit σ et τ les éléments de SO_4 , de matrices respectivement

$$S_4 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_4 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Lemme 5.5. ([23], Theorem 5.2, p.53) *Le sous-groupe G_0 de SO_4 engendré par σ et τ est libre. De plus, 1 n'est valeur propre d'aucun élément de $G_0 \setminus \{\text{id}\}$.*

Pour le confort du lecteur, nous avons écrit la preuve dans l'annexe 8.3.

Choisissons à présent les rotations affines σ et $\tilde{\tau} : x \mapsto \tau x + a$ avec $a \neq 0$, par exemple $a = (1, 0, 0, 0)$. Soit $G = \langle \sigma, \tilde{\tau} \rangle$ le sous-groupe de $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ engendré par σ et $\tilde{\tau}$. Alors G est libre et $\text{Fix } g$ est un singleton pour tout $g \in G$. Comme $\text{Fix } \sigma \cap \text{Fix } \tau = \emptyset$, on en déduit que G est excentrique. \square

Remarque. L'existence de sous-groupes libres de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ et de SO_4 dont les éléments, hormis l'identité, n'admettent jamais 1 pour valeur propre, est l'ingrédient essentiel des constructions de sous-groupes excentriques d'applications affines ou d'isométries affines (exemple 3.3 et proposition 5.4). Nous avons utilisé des exemples explicites de tels sous-groupes. Ces sous-groupes, bien que parfois difficiles à exhiber, ne sont pas exceptionnels. En effet, on peut montrer grâce au théorème de Baire que, si G est un sous-groupe fermé de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, alors l'ensemble des couples d'éléments de G qui engendrent un groupe libre est soit vide, soit contient un G_δ dense, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts denses de $G \times G$. On obtient le même résultat en ajoutant la contrainte supplémentaire sur la valeur propre 1. Ajoutons qu'A. Borel a prouvé un résultat très général englobant les constructions que nous avons utilisées, cf. [4] :

Si G est un groupe algébrique linéaire semi-simple défini sur \mathbb{R} , alors l'ensemble des n -uplets de $G(\mathbb{R})^n$ engendrant un groupe libre contient un G_δ dense.

Proposition 5.6. *Pour tout entier $n \geq 4$, le groupe $\text{Isom} \mathbb{R}^n$ n'est pas globalisant.*

Preuve. Pour $n \geq 5$, il suffit de compléter par id_{n-4} sur les $n - 4$ dernières composantes : soit σ_n et τ_n les éléments de $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ de matrices

$$S_n = \begin{pmatrix} S_4 & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_n = \begin{pmatrix} T_4 & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-4} \end{pmatrix}$$

et soit $G = \langle \sigma_n, \tilde{\tau}_n \rangle$ le sous-groupe de $\text{Isom} \mathbb{R}^n$ engendré par σ_n et $\tilde{\tau}_n : x \mapsto \tau_n x + a$ avec $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On vérifie que G est libre et excentrique. \square

Cas des normes non euclidiennes.

Lorsque \mathbb{R}^n est muni d'une norme quelconque, d'après le théorème de Mazur-Ulam, les éléments du groupe G des isométries associées à cette norme sont des applications affines, cf. [14] ou exercice 7.11 et sa solution. Le groupe \vec{G} des parties linéaires des éléments de G est fermé et borné dans l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathbb{R}^n , donc \vec{G} est compact. Par

un argument classique, on peut construire un produit scalaire invariant par les éléments de \vec{G} . Ainsi G peut être vu comme un sous-groupe de $\text{Isom } \mathbb{R}^n$ et G est donc globalisant si $n \leq 3$. Lorsque $n \geq 4$, la proposition 5.6 ne permet pas de conclure et en effet il se peut que G soit globalisant pour certaines normes, comme le décrit l'énoncé suivant.

Proposition 5.7. *Soit N une norme sur \mathbb{R}^n et soit G le groupe des isométries associées à N . Si le groupe linéaire associé \vec{G} est fini, alors G est globalisant. En particulier, si N est l'une des normes N_p usuelles avec $p \in [1, +\infty] \setminus \{2\}$, alors G est globalisant.*

Preuve. Soit H un sous-groupe GAF de G . Comme la seule translation dans H est id , le morphisme $\varphi : H \rightarrow \vec{G}, f \mapsto \vec{f}$ est injectif, donc H est fini. On vérifie que le point $\omega = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(\vec{0})$ est fixé par tous les éléments de H , donc H est un GAG.

Si $N = N_p$ alors \vec{G} contient toutes les permutations des axes, donc un produit scalaire invariant par les éléments de \vec{G} est nécessairement proportionnel au produit scalaire euclidien usuel. La sphère euclidienne unité touche la boule unité pour N_p exactement aux sommets de l'hyper-octaèdre $E = \{\pm \vec{e}_1, \dots, \pm \vec{e}_n\}$. L'ensemble E est invariant par \vec{G} , donc \vec{G} est fini. \square

5.2 Le cas des espaces hyperboliques

Nous utilisons le modèle du demi-espace de Poincaré : $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni de la métrique de Poincaré donnée par $ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2$, cf. l'annexe 8.1 pour les détails.

Théorème 5.8. *Si $n \leq 3$, alors $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ est globalisant. Si $n \geq 5$, alors $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ n'est pas globalisant.*

Nous conjecturons que le groupe $\text{Isom } \mathbb{H}_4$ n'est pas globalisant.

Nous montrerons tout d'abord que $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ n'est pas globalisant si $n \geq 5$, puis que $\text{Isom } \mathbb{H}_2$ et $\text{Isom } \mathbb{H}_3$ sont globalisants. Le cas $n = 1$ est évident.

Le cas des dimensions supérieures à 5

Proposition 5.9. *Pour $n \geq 5$, le groupe $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ n'est pas globalisant.*

Preuve. À chaque isométrie de l'espace euclidien de dimension $n - 1$, on associe une isométrie de l'espace hyperbolique de dimension n de la manière suivante : si f est une isométrie de \mathbb{R}^{n-1} alors l'application $F : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$ définie par $F(x, t) = (f(x), t)$ est une isométrie de \mathbb{H}_n . L'application $f \in \text{Isom } \mathbb{R}^{n-1} \mapsto F \in \text{Isom } \mathbb{H}_n$ est un morphisme de groupes et on a $\text{Fix } F = \text{Fix } f \times \mathbb{R}_{>0}$. Par conséquent l'image par ce morphisme d'un sous-groupe excentrique de $\text{Isom } \mathbb{R}^{n-1}$ est un sous-groupe excentrique de $\text{Isom } \mathbb{H}_n$. Puisque, pour $n \geq 5$, $\text{Isom } \mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas globalisant, $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ ne l'est pas non plus. \square

Le cas de la dimension 2

Bien que ce cas puisse se déduire de celui de la dimension 3 (cf. exercice 7.8) nous avons choisi de présenter des preuves spécifiques à la dimension 2, car elles sont plus élémentaires et sont une bonne entrée en matière dans la géométrie hyperbolique. On utilise le modèle du demi-plan complexe $\mathbb{H}_2 = \{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z > 0\}$. Les isométries positives de \mathbb{H}_2 sont les homographies

$$h_{a,b,c,d} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Les autres isométries de \mathbb{H}_2 , dites *negatives*, sont les homographies composées avec la symétrie $z \mapsto -\bar{z}$. Le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ des isométries positives s'appelle le *groupe de Möbius*. On rappelle que l'application

$$\Phi : \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}), \quad h_{a,b,c,d} \mapsto \{M, -M\} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes. Les *matrices associées à une isométrie h* sont les éléments de $\Phi(h)$. On définit la *trace* d'une isométrie h par $\text{tr } h = |\text{tr } M|$ où $M \in \Phi(h)$. On utilisera le résultat suivant, dont la preuve se trouve dans l'annexe 8.1.4.

Lemme 5.10. *Soit $h \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2 \setminus \{\text{id}\}$.*

- a. *On a $\text{Fix } h \neq \emptyset$ si et seulement si $\text{tr } h < 2$. De plus, dans ce cas, $\text{Fix } h$ est un singleton.*
- b. *Dans le cas où $\text{Fix } h = \{i\}$, les matrices associées M et $-M \in \Phi(h)$ sont des matrices de rotation $R(\frac{\theta}{2}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ et $R(\frac{\theta}{2} + \pi)$. On dira que h est une rotation de centre i et d'angle $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, et on notera $h = r_\theta$.*
- c. *Dans le cas général, si $\text{Fix } h = \{z_0\}$ et si $\varphi \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ est telle que $\varphi(i) = z_0$, alors $\varphi^{-1}h\varphi$ fixe i , donc est une rotation r_θ , et l'angle θ ne dépend pas du choix de φ . On dira que h est une rotation de centre a et d'angle θ .*
- d. *Pour tout $x > 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, la rotation de centre ix et d'angle θ a pour matrices associées $\pm \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -x \sin \frac{\theta}{2} \\ x^{-1} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.*

Un élément $h \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ est dit *elliptique* si $\text{tr } h < 2$, *parabolique* si $\text{tr } h = 2$, et *hyperbolique* si $\text{tr } h > 2$.

Nous avons divisé par 2 l'angle dans les matrices pour que l'angle défini dans l'énoncé précédent corresponde bien à la notion usuelle d'angle : la rotation $r_\theta : z \mapsto \frac{cz-s}{sz+c}$ avec $c = \cos \frac{\theta}{2}$ et $s = \sin \frac{\theta}{2}$ tourne approximativement les points très proches de son centre i d'un angle θ et non $\frac{\theta}{2}$.

Par ailleurs, nous utiliserons que deux segments de \mathbb{H}_2 de même longueur sont positivement isométriques : si $x, y, x', y' \in \mathbb{H}_2$ sont tels que $d(x, y) = d(x', y')$, alors il existe $f \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ tel que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$; voir section 8.1.4 pour la preuve.

En préliminaire, nous montrons le résultat suivant.

Lemme 5.11. *Si $f, g \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ sont tels que $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$, alors il existe $h \in \langle f, g \rangle$ tel que $\text{Fix } h = \emptyset$.*

Preuve. Si $\text{Fix } f$ ou $\text{Fix } g$ est vide, on a fini. On suppose à présent $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ non vides. Ainsi f et g sont deux rotations de centres a et b respectivement, avec $a \neq b$. Nous allons montrer que $\text{tr } [f, g] > 2$, ce qui entraînera $\text{Fix } [f, g] = \emptyset$ d'après le lemme 5.10.a.

Commençons par envoyer a et $g(a)$ dans $i\mathbb{R}$: soit $\varphi \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ et $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ tels que $\varphi(a) = i$ et $\varphi(g(a)) = ix$. Soit $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ et $\tilde{g} = \varphi g \varphi^{-1}$. On a $[f, g] = \varphi^{-1}[\tilde{f}, \tilde{g}]\varphi$, donc $\text{tr } [f, g] = \text{tr } [\tilde{f}, \tilde{g}]$.

On écrit à présent le commutateur de \tilde{f} et \tilde{g} sous la forme $[\tilde{f}, \tilde{g}] = \tilde{f}h$, avec $h = \tilde{g}\tilde{f}^{-1}\tilde{g}^{-1}$. L'isométrie \tilde{f} est la rotation de centre i et d'angle non nul θ ; elle est associée aux matrices $\pm \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ avec $t = \frac{\theta}{2} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. L'isométrie h est conjuguée à \tilde{f}^{-1} , donc a pour angle $-\theta$, et a pour point fixe ix ; elle a donc pour matrices associées $\pm \begin{pmatrix} \cos t & x \sin t \\ -x^{-1} \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ d'après

le lemme 5.10.d. Ainsi la composée $\tilde{f}h$ a pour matrices associées

$$\pm \begin{pmatrix} \cos^2 t + x^{-1} \sin^2 t & (x-1) \cos t \sin t \\ (1-x^{-1}) \cos t \sin t & x \sin^2 t + \cos^2 t \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\text{tr}[f, g] = \text{tr} \tilde{f}h = 2 \cos^2 t + (x + x^{-1}) \sin^2 t > 2. \quad \square$$

La preuve du lemme 5.11 est basée sur un calcul de trace. On peut aussi en donner une preuve géométrique en adaptant la preuve du lemme 5.13 ci-après.

Proposition 5.12. *Le groupe $\text{Isom} \mathbb{H}_2$ est globalisant.*

Preuve. D'après le corollaire 4.8, il suffit de montrer que $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ est globalisant. Soit $G \leq \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ un GAF; on doit montrer que G est un GAG. Si $G = \{\text{id}\}$, le résultat est évident. On suppose à présent $G \neq \{\text{id}\}$. D'après le lemme 5.11, tous les éléments de $G \setminus \{\text{id}\}$ sont des rotations de même centre, donc G est un GAG. \square

Remarques.

1. Ironiquement, le groupe de Möbius agissant sur $\widehat{\mathbb{R}}$ au lieu de \mathbb{H}_2 n'est pas globalisant, alors que la dimension est moindre, cf. exercice 7.7.
2. Comme annoncé au début de cette partie, on peut aussi déduire la proposition 5.12 du corollaire 5.15 dans la suite de l'article, cf. exercice 7.8.

Le cas de la dimension 3

Nous commençons par l'analogie hyperbolique du lemme 5.2 sur $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^3$.

Lemme 5.13. *Soit $f, g \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$. Si $\text{Fix} f \cap \text{Fix} g = \emptyset$, alors il existe $h \in \langle f, g \rangle$ tel que $\text{Fix} h = \emptyset$.*

Preuve. La démonstration se fait en plusieurs étapes en montrant que l'une des isométries f , g , $f^{-1}g$, $gfg^{-1}f^{-1}$ ou $gfgf^{-1}$ n'a pas de point fixe.

Soit $h = f^{-1}g$. Si $\text{Fix} f$, $\text{Fix} g$ ou $\text{Fix} h$ est vide, on a fini, sinon soit $x_0 \in \text{Fix} h$. On a $f(x_0) = g(x_0)$ et, comme $\text{Fix} f \cap \text{Fix} g$ est vide, on a $f(x_0) = g(x_0) \neq x_0$. Soit $P_0 = \text{Med}(x_0, f(x_0))$; c'est un plan hyperbolique d'après le lemme 8.6. Comme f et g sont des isométries, $\text{Fix} f$ et $\text{Fix} g$ sont inclus dans P_0 .

Nous affirmons que $\text{Fix} g \cap f(\text{Fix} g)$ est vide. Sinon, soit $x_1 \in \text{Fix} g$ tel que $y_1 = f(x_1) \in \text{Fix} g$. D'après le lemme 8.10, les ensembles de points fixes des éléments de $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ sont des droites hyperboliques lorsqu'ils ne sont pas vides. Par conséquent, d'après le lemme 8.8 sur les projections, il existe un unique point $z_1 = \pi_{\text{Fix} f} x_1$ réalisant la distance de x_1 à $\text{Fix} f$. Les trois points x_1, y_1 et z_1 sont distincts puisque $\text{Fix} f \cap \text{Fix} g$ est vide.

Notons γ la géodésique passant par x_1 et z_1 . Comme x_1 et $\text{Fix} f$ sont dans le plan P_0 , γ est une droite hyperbolique du plan P_0 , orthogonale à $\text{Fix} f$ en z_1 d'après le lemme 8.8. Comme $f(x_1) \in \text{Fix} g \subset P_0$, le plan P_0 est stable par f . Par conséquent $f(\gamma)$ est une droite hyperbolique de P_0 . Elle est aussi orthogonale à $\text{Fix} f$ en z_1 car f conserve les angles. Il en résulte que $f(\gamma) = \gamma$ et que la restriction de f à γ est une symétrie par rapport à z_1 . Comme $y_1 = f(x_1) \in f(\gamma) = \gamma$, y_1 est le symétrique sur γ de x_1 par rapport à z_1 . Il s'ensuit que $\gamma = \text{Fix} g$, et donc que z_1 appartient à $\text{Fix} g$ et $\text{Fix} f$, en contradiction avec $\text{Fix} f \cap \text{Fix} g$ vide.

Soit $\tilde{g} = gfg^{-1}$; c'est une rotation hyperbolique de même angle θ que g au signe près (l'angle n'est défini qu'au signe près). On a $\text{Fix} \tilde{g} = f(\text{Fix} g)$ donc $\text{Fix} \tilde{g} \cap \text{Fix} g = \emptyset$ d'après ce qui précède. De même que précédemment, si $\text{Fix}(g\tilde{g}^{-1})$ est vide on a fini; sinon, avec $x_1 \in \text{Fix}(g\tilde{g}^{-1})$, le plan $P = \text{Med}(x_1, g(x_1))$ contient $\text{Fix} g$ et $\text{Fix} \tilde{g}$.

Nous allons montrer que $\text{Fix}(g\tilde{g})$ ou $\text{Fix}(g\tilde{g}^{-1})$ est vide.

Soit σ_P la réflexion par rapport au plan P . D'après le lemme 8.12, il existe un plan hyperbolique S contenant la droite $\text{Fix } g$ et faisant un angle $\pm\frac{\theta}{2}$ avec P tel que $g = \sigma_S\sigma_P$.

Comme $\text{Fix } \tilde{g}$ est aussi inclus dans P , on peut trouver deux plans hyperboliques \tilde{S} et \tilde{S}' , contenant $\text{Fix } \tilde{g}$ et faisant les angles $\pm\frac{\theta}{2}$ avec le plan P . D'après le lemme 8.12, \tilde{g} ou $\tilde{g}^{-1} = \sigma_P\sigma_{\tilde{S}}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\tilde{g} = \sigma_P\sigma_{\tilde{S}}$; on a alors $\tilde{g}^{-1} = \sigma_P\sigma_{\tilde{S}}$.

Nous clavons que l'une au moins des intersections $S \cap \tilde{S}$ ou $S \cap \tilde{S}'$ est vide. En effet, quitte à conjuguer par un élément de $\text{Isom } \mathbb{H}_3$, on peut supposer que $\text{Fix } g$ est une demi-droite verticale d'extrémité a dans le plan horizontal $\partial\mathbb{H}_3$; P et S sont alors des demi-plans verticaux contenant la demi-droite $\text{Fix } g$. La frontière de P est une droite affine Δ du plan horizontal qui contient a ainsi que les extrémités b et c de la droite hyperbolique $\text{Fix } \tilde{g}$ (il se pourrait que la droite hyperbolique $\text{Fix } \tilde{g}$ n'ait qu'une extrémité; elle est alors verticale et la suite se simplifie). Comme les droites hyperboliques $\text{Fix } g$ et $\text{Fix } \tilde{g}$ ne se rencontrent pas, les points b et c sont du même côté de a sur la droite Δ , donc un des points, disons b , est entre a et c . Soit V le plan vertical contenant b et parallèle au plan S . Comme les angles des plans hyperboliques \tilde{S} et \tilde{S}' avec le plan P sont $\pm\frac{\theta}{2}$, l'un des plans \tilde{S} ou \tilde{S}' est tangent à V . Supposons que ce soit \tilde{S} . Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer \tilde{g} par \tilde{g}^{-1} . Le plan \tilde{S} ne rencontre pas S car il est situé d'un seul côté de V et son adhérence contient c alors que celle de S contient a . On a $g\tilde{g} = \sigma_S\sigma_P\sigma_P\sigma_{\tilde{S}} = \sigma_S\sigma_{\tilde{S}}$.

On conclut en montrant que $\text{Fix}(\sigma_S\sigma_{\tilde{S}})$ est vide. Par l'absurde, sinon, soit $x \in \text{Fix}(\sigma_S\sigma_{\tilde{S}})$; ainsi $\sigma_S(x) = \sigma_{\tilde{S}}(x)$. Puisque $\text{Fix } \sigma_{\tilde{S}} \cap \text{Fix } \sigma_S = S \cap \tilde{S} = \emptyset$, on aurait $\sigma_S(x) \neq x$, donc les plans hyperboliques S et \tilde{S} seraient tous les deux inclus dans le plan $\text{Med}(x, \sigma_S(x))$, donc coïncideraient, en contradiction avec $S \cap \tilde{S} = \emptyset$. \square

Lemme 5.14. *Soit $G \leq \text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ tel que $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g \neq \emptyset$ pour tous $f, g \in G$. Alors G est un GAG.*

Preuve. Si $\text{Fix } f = \text{Fix } g$ pour tout $f, g \in G \setminus \{\text{id}\}$, on a fini. Sinon, soit $f, g \in G \setminus \{\text{id}\}$ avec $\text{Fix } f \neq \text{Fix } g$, soit Π le plan hyperbolique contenant les droites hyperboliques $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ et soit $\omega \in \Pi$ le point d'intersection de ces droites. Il nous reste à montrer que $\omega \in \text{Fix } h$ pour tout $h \in G$. Par l'absurde, sinon, soit $h \in G$ tel que $\omega \notin \text{Fix } h$, soit α tel que $\text{Fix } f \cap \text{Fix } h = \{\alpha\}$, et soit β tel que $\text{Fix } g \cap \text{Fix } h = \{\beta\}$. Alors on a $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta \in \Pi \cap \text{Fix } h$, donc $\text{Fix } h \subset \Pi$. En passant, on a montré

$$\forall k \in G \quad (\omega \notin \text{Fix } k \Rightarrow \text{Fix } k \subset \Pi). \quad (4)$$

Toujours avec le même h , soit $\delta \in \text{Fix}(fh) \setminus \{\alpha\}$. On a $\delta \notin \text{Fix } h$ (sinon $\delta \in \text{Fix } f \cap \text{Fix } h$, mais $\delta \neq \alpha$) donc $\text{Fix } h \subset \text{Med}(\delta, h(\delta))$. De même $\text{Fix } f = \text{Fix } f^{-1} \subset \text{Med}(\delta, f^{-1}(\delta)) = \text{Med}(\delta, h(\delta))$, ce qui entraîne $\text{Med}(\delta, h(\delta)) = \Pi$. Il s'ensuit que $\delta \notin \Pi$ et donc que $\text{Fix}(fh) \not\subset \Pi$. Maintenant la contraposée de (4) entraîne $\omega \in \text{Fix}(fh)$, mais ceci implique $\omega \in \text{Fix } h$, une contradiction. \square

Corollaire 5.15. *Le groupe $\text{Isom } \mathbb{H}_3$ est globalisant.*

Preuve. Comme $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\text{Isom } \mathbb{H}_3$, d'après le corollaire 4.8, il suffit de montrer que $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ est globalisant. Soit $G \leq \text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ un GAF. D'après le lemme 5.13, on a $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g \neq \emptyset$ pour tous $f, g \in G$, donc G est un GAG d'après le lemme 5.14. \square

5.3 Le cas des espaces sphériques

On munit \mathbb{S}_n de la distance sphérique $d(x, y) = \arccos\langle x | y \rangle$. Comme la fonction \arccos est bijective, les isométries de \mathbb{S}_n pour la distance sphérique coïncident avec les isométries de \mathbb{S}_n

pour la distance induite par la distance euclidienne de \mathbb{R}^{n+1} . On sait qu'une isométrie de \mathbb{S}_n est la restriction à \mathbb{S}_n d'une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} , cf. [3], chap.18 ou exercice 7.13. Précisément, si O_{n+1} désigne le groupe des isométries vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} , alors on a un isomorphisme de groupes

$$\varphi : O_{n+1} \rightarrow \text{Isom } \mathbb{S}_n$$

qui, à un élément $f \in O_{n+1}$, associe sa restriction à \mathbb{S}_n . On a $\text{Fix } f = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\text{Fix } \varphi(f) = \emptyset$. Par abus de langage, nous dirons qu'un sous-groupe G de O_{n+1} est un GAF, resp. un GAG, resp. excentrique, si son image $\varphi(G)$ est un GAF, resp. un GAG, resp. un sous-groupe excentrique, de $\text{Isom } \mathbb{S}_n$.

Théorème 5.16. *Le groupe $\text{Isom } \mathbb{S}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$.
Le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$ ou $n = 3$.*

Notons que le corollaire 4.8 ne s'applique pas ici car l'inégalité de la médiane n'est pas vraie dans les espaces elliptiques. La preuve du théorème 5.16 est scindée en plusieurs parties.

Pour $n = 1$, les seuls GAF de $\text{Isom } \mathbb{S}_1$ sont le groupe trivial $\{\mathbf{id}\}$ et les groupes $\{\mathbf{id}, s\}$ où s est une symétrie axiale, qui sont évidemment des GAG.

Proposition 5.17. *Si $n \geq 2$, alors $\text{Isom } \mathbb{S}_n$ n'est pas globalisant.*

Preuve. On se place dans O_{n+1} . Commençons par le cas $n = 2$. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Soit $f, g, h \in O_3$ les isométries vectorielles de matrices respectivement $\text{Mat } f = \text{diag}(1, -1, -1)$, $\text{Mat } g = \text{diag}(-1, 1, -1)$ et $\text{Mat } h = \text{diag}(-1, -1, 1)$. L'ensemble $G = \{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est un groupe isomorphe au groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$: on a $f^2 = g^2 = h^2 = \mathbf{id}$, $fg = gf = h$, $gh = hg = f$ et $hf = fh = g$. On a donc $\text{Fix } k \neq \{\vec{0}\}$ pour tout $k \in G$ mais $\text{Fix } G = \{\vec{0}\}$.

Pour $n \geq 3$, on complète les matrices de f et g par des -1 et la matrice de h par des 1 : dans une base orthonormée, on choisit $\text{Mat } f = \text{diag}(1, -1, -1, -1, \dots, -1)$, $\text{Mat } g = \text{diag}(-1, 1, -1, -1, \dots, -1)$ et $\text{Mat } h = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, \dots, 1)$. On vérifie que $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est encore isomorphe au groupe de Klein, et qu'il est excentrique. \square

Traisons à présent le cas de $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$. L'isomorphisme $\varphi : O_{n+1} \rightarrow \text{Isom } \mathbb{S}_n$ induit par restriction un isomorphisme de SO_{n+1} dans $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$, qui sera noté par la même lettre.

Proposition 5.18. *Si n est pair alors $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ est excentrique.*

Preuve. Soit $g \in \text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ et soit $f = \varphi^{-1}(g) \in SO_{n+1}$. Les valeurs propres de f sont toutes de module 1 et ont un produit égal à 1. De plus, si λ est valeur propre de f alors $\bar{\lambda}$ aussi, avec la même multiplicité. Comme $n + 1$ est impair, 1 est une valeur propre de f , donc $\text{Fix } f \neq \{\vec{0}\}$. Ainsi $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ est un GAF, mais n'est évidemment pas un GAG. \square

Il nous reste à traiter le cas n impair. Pour $n = 1$, $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_1$ ne contient qu'un GAF, le groupe trivial $\{\mathbf{id}\}$, donc est globalisant.

Proposition 5.19. *Si n est impair et $n \geq 5$, alors $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ n'est pas globalisant.*

Preuve. On se place dans SO_{n+1} et on reprend l'exemple de la preuve de la proposition 5.17 en remplaçant 1 par I_2 et -1 par $-I_2$:

Pour $n = 5$, soit $f, g, h \in SO_6$ les isométries de matrices diagonales par blocs respectivement $\text{Mat } f = \text{diag}(I_2, -I_2, -I_2)$, $\text{Mat } g = \text{diag}(-I_2, I_2, -I_2)$ et $\text{Mat } h = \text{diag}(-I_2, -I_2, I_2)$. On vérifie que $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est isomorphe au groupe de Klein et excentrique.

Pour n impair, $n \geq 7$, on complète les matrices de f et g par des $-I_2$ et la matrice de h par des I_2 , et le groupe $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est encore isomorphe au groupe de Klein et excentrique. \square

Proposition 5.20. *Le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ est globalisant.*

Preuve. Par l'absurde, soit $G \leq \text{SO}_4$ un groupe excentrique. Un élément de $G \setminus \{\mathbf{id}\}$ a pour ensemble de points fixes un plan (i.e. un sous-espace de dimension 2).

Étape 1. On a $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g \neq \{\vec{0}\}$ pour tous $f, g \in G$.

Soit $\vec{u} \in \text{Fix}(f^{-1}g) \setminus \{\vec{0}\}$ (qui est non vide par hypothèse sur G). Si $\vec{u} \in \text{Fix } f \cap \text{Fix } g$, on a fini. Sinon, on a $f(\vec{u}) = g(\vec{u}) \neq \vec{u}$. Alors $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ sont deux plans inclus dans l'hyperplan (i.e. le sous-espace de dimension 3) $\text{Med}(\vec{u}, f(\vec{u}))$, donc s'intersectent.

À présent fixons $f_0 \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Puisque $\text{Fix } G = \{\vec{0}\}$, il existe $g_0 \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ tel que $\text{Fix } f_0 \neq \text{Fix } g_0$. D'après l'étape 1, $\text{Fix } f_0 \cap \text{Fix } g_0$ est une droite notée D , et $\text{Fix } f_0 + \text{Fix } g_0$ un hyperplan noté H .

Étape 2. Pour tout $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, on a $\text{Fix } f \subset H$.

En effet, soit $h_0 \in G$ tel que $\text{Fix } h_0$ ne contient pas D . Un tel h_0 existe puisque $\text{Fix } G = \{\vec{0}\}$. On a $\text{Fix } f_0 \neq \text{Fix } g_0 \neq \text{Fix } h_0$. D'après l'étape 1, $\text{Fix } f_0 \cap \text{Fix } h_0$ est une droite notée D' , et $\text{Fix } g_0 \cap \text{Fix } h_0$ une droite notée D'' . On a $D' \neq D''$ (sinon $D' = D'' = D$, en contradiction avec $D \not\subset \text{Fix } h_0$) et $\text{Fix } h_0$ est de dimension 2, donc $\text{Fix } h_0 = D' + D'' \subset H$. Notons au passage que les trois droites D, D' et D'' ne sont pas coplanaires, donc $H = D + D' + D''$, si bien que les rôles de f_0, g_0 et h_0 sont symétriques.

Maintenant, soit $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Alors $\text{Fix } f$, de dimension 2, ne peut pas contenir à la fois D, D' et D'' donc, d'après ce qui précède, $\text{Fix } f$ est inclus dans l'un des trois sous-espaces $\text{Fix } f_0 + \text{Fix } g_0, \text{Fix } g_0 + \text{Fix } h_0$ ou $\text{Fix } h_0 + \text{Fix } f_0$, qui sont en fait tous les trois égaux à H .

On note Δ l'orthogonal de H : $\Delta = H^\perp$.

Étape 3. On a $f(\Delta) = \Delta$ pour tout $f \in G$.

Sinon, soit $f \in G$ tel que $f(\Delta) \neq \Delta$ et soit $g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ arbitraire. Montrons que $(\text{Fix } g)^\perp = \Delta + f(\Delta)$. On a $\Delta \subset (\text{Fix } h)^\perp$ pour tout $h \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ et, comme f est une isométrie, $f(\Delta) \subset (f(\text{Fix } h))^\perp$. Pour $h = f^{-1}gf$, cela donne $f(\Delta) \subset (f(\text{Fix } h))^\perp = (\text{Fix } g)^\perp$. Ainsi $\Delta + f(\Delta) \subset (\text{Fix } g)^\perp$, qui ont même dimension, d'où l'égalité. Puisque ceci est vrai pour tout $g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, on obtient $\text{Fix } G = (\Delta + f(\Delta))^\perp \neq \{\vec{0}\}$, une contradiction.

En résumé, on a trouvé un hyperplan H tel que, pour tout $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, $\text{Fix } f \subset H$ et $f(H^\perp) = H^\perp$. Il s'ensuit que la restriction de f à H^\perp est $-\mathbf{id}$, donc f n'a que 1 et -1 comme valeurs propres, donc $f^2 = \mathbf{id}$ pour tout $f \in G$, donc G est abélien (on a $\mathbf{id} = f^2g^2 = (fg)^2$ donc, en simplifiant, $fg = gf$ pour tous $f, g \in G$).

Comme G est abélien, les éléments de G sont diagonalisables dans une base commune, notée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{\ell})$, avec 1 et -1 comme valeurs propres doubles (ce sont des isométries positives de \mathbb{R}^4). Considérons les endomorphismes f_1, f_2 et f_3 dont les matrices dans la base \mathcal{B} sont respectivement $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$, $\text{diag}(1, -1, 1, -1)$ et $\text{diag}(1, -1, -1, 1)$. Ainsi G est un sous-groupe de $G_0 = \{\pm \mathbf{id}, \pm f_1, \pm f_2, \pm f_3\}$.

La liste des seize sous-groupes de G_0 se répartit en

- ▷ onze GAG : $\{\mathbf{id}\}, \{\mathbf{id}, f_n\}$ avec $1 \leq n \leq 3$, $\{\mathbf{id}, -f_n\}$ avec $1 \leq n \leq 3$, $\{\mathbf{id}, f_1, f_2, f_3\}$ qui fixe \vec{i} , $\{\mathbf{id}, f_1, -f_2, -f_3\}$ qui fixe \vec{j} , $\{\mathbf{id}, -f_1, f_2, -f_3\}$ qui fixe \vec{k} , $\{\mathbf{id}, -f_1, -f_2, f_3\}$ qui fixe $\vec{\ell}$,
- ▷ et cinq contenant $-\mathbf{id}$ donc pas GAF : $\{\mathbf{id}, -\mathbf{id}\}, \{\mathbf{id}, f_n, -\mathbf{id}, -f_n\}$ avec $1 \leq n \leq 3$ et G_0 .

Ainsi G_0 ne contient aucun excentrique, une contradiction. □

5.4 Le cas des espaces projectifs

Habituellement \mathbb{RP}_n est défini comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . Dans cet article, on identifie \mathbb{RP}_n au quotient de \mathbb{S}_n par la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y.$$

Pour $x \in \mathbb{S}_n$, on note $\dot{x} = \{x, -x\}$ la classe correspondante dans \mathbb{RP}_n . Étant donné $\dot{x} = \{x, -x\}$ et $\dot{y} = \{y, -y\}$ dans \mathbb{RP}_n , la distance entre \dot{x} et \dot{y} est alors donnée par $d(\dot{x}, \dot{y}) = \arccos |\langle x | y \rangle|$, où $\langle x | y \rangle$ est le produit scalaire entre x et y .

Étant donnée une isométrie f de \mathbb{S}_n et $x \in \mathbb{S}_n$, la classe de $f(x)$ dans \mathbb{RP}_n est la même que celle de $f(-x) = -f(x)$, donc on peut définir une application de \mathbb{RP}_n dans \mathbb{RP}_n , notée $\psi(f)$, qui, à $\dot{x} = \{x, -x\}$, associe la classe de $f(x)$. Il est connu que l'application

$$\psi : \text{Isom } \mathbb{S}_n \rightarrow \text{Isom } \mathbb{RP}_n$$

ainsi définie est un morphisme surjectif, de noyau $\{\pm \text{id}\}$; cf. [3], chap.19. Ainsi le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_n$ est bien l'image de $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ par ψ , et de même le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_n$ est l'image de $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ par ψ . Lorsque n est pair, $-\text{id} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ inverse l'orientation, donc $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_n$ est égal à $\text{Isom} \mathbb{RP}_n$.

Théorème 5.21. *Le groupe $\text{Isom} \mathbb{RP}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$.*

Le groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_n$ est globalisant si $n = 1$ et non globalisant si n est impair et supérieur ou égal à 5.

Remarques.

1. Nous ne savons pas si $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_3$ est globalisant ou non.
2. Notons que les rotations de \mathbb{RP}_2 ont un unique point fixe. Ainsi le groupe des rotations de \mathbb{RP}_2 est un autre exemple de groupe non globalisant, qui n'est pas abélien et dont tous les éléments ont un unique point fixe. Ceci complète l'exemple 3.3.

Preuve. Il est facile de vérifier que $\text{Isom} \mathbb{RP}_1$ est globalisant.

Si n est pair et $\dot{f} = \psi(f) \in \text{Isom} \mathbb{RP}_n$, alors la matrice de f , vue comme isométrie vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} , est de dimension impaire, donc admet toujours 1 ou -1 comme valeur propre, donc il existe $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) \in \{x, -x\}$. Ainsi toute isométrie de \mathbb{RP}_n a au moins un point fixe \dot{x} , mais aucun point de \mathbb{RP}_n ne peut être fixé par tous les éléments de $\text{Isom} \mathbb{RP}_n$. Le groupe $\text{Isom} \mathbb{RP}_n$ est donc lui-même excentrique, donc non globalisant.

On étudie à présent le cas n impair. Pour $n = 5$, notons

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et considérons les isométries f, g, h de \mathbb{S}_5 dont les matrices sont les diagonales par blocs suivantes :

$$\text{Mat } f = \text{diag}(I, R, R), \text{ Mat } g = \text{diag}(R, I, R) \text{ et } \text{Mat } h = \text{diag}(R, R, I).$$

Ce sont des isométries positives. Notons G_5 le sous-groupe de $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_5$ engendré par f, g et h . On trouve pour G_5 le groupe d'ordre 32 suivant :

$$G_5 = \{\text{diag}(\pm I, \pm I, \pm I), \text{diag}(\pm I, \pm R, \pm R), \text{diag}(\pm R, \pm I, \pm R), \text{diag}(\pm R, \pm R, \pm I)\}$$

et on vérifie que son image $\psi(G_5)$ dans $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_5$ est excentrique. La vérification est un peu fastidieuse mais sans difficulté.

Ainsi $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_5$ n'est pas globalisant, et donc $\text{Isom} \mathbb{RP}_5$ non plus.

Pour n impair, $n \geq 7$, on considère les isométries positives f, g, h de \mathbb{S}_n dont les matrices sont diagonales par blocs : $\text{Mat } f = \text{diag}(I, R, R, R, \dots, R)$, $\text{Mat } g = \text{diag}(R, I, R, R, \dots, R)$ et $\text{Mat } h = \text{diag}(R, R, I, R, \dots, R)$. On vérifie de même que l'image $\psi(G_n)$ du sous-groupe G_n de $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ engendré par f, g et h est excentrique, donc ni $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_n$ ni $\text{Isom} \mathbb{RP}_n$ ne sont globalisants.

Il nous reste le cas $n = 3$. Soit $f, g \in \text{Isom} \mathbb{S}_3$ de matrices

$$\text{Mat } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat } g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous écrivons f et g comme des permutations signées : $f = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ et $g = (1 \ 2 \ -3 \ -4)$. Le calcul donne $fg = (1 \ 3)(2 \ -4) = -gf$ et $f^2 = (1 \ 3)(2 \ 4) = -g^2$. Ainsi le groupe engendré par $\pm f$ et $\pm g$ est

$$G_3 = \{\pm \mathbf{id}, \pm f, \pm f^2, \pm f^3, \pm g, \pm fg, \pm f^2g, \pm f^3g\}.$$

En regardant un à un tous les éléments, on vérifie sans peine que $\psi(G_3)$ est excentrique dans $\text{Isom} \mathbb{RP}_3$, donc $\text{Isom} \mathbb{RP}_3$ n'est pas globalisant. Nous n'avons pas trouvé de sous-groupe excentrique de $\text{Isom}^+ \mathbb{RP}_3$, ni réussi à adapter au cas projectif la preuve que $\text{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ est globalisant (proposition 5.20). \square

6 Groupes agissant sur des ensembles discrets

6.1 Le groupe symétrique

L'objet de cette section est le résultat suivant.

Proposition 6.1.

- a. Le groupe symétrique \mathcal{S}_n agissant sur $\{1, \dots, n\}$ est globalisant si et seulement si $n \leq 4$.
- b. Le groupe alterné \mathcal{A}_n des permutations paires agissant sur $\{1, \dots, n\}$ est globalisant si et seulement si $n \leq 4$.

Preuve. **a.** La preuve pour le groupe symétrique est scindée en cinq étapes. On utilise la notation en cycles disjoints.

Étape 1 : \mathcal{S}_n est globalisant si $n \leq 3$. Pour $n = 1$ et $n = 2$, il n'y a rien à faire puisqu'il n'y a pas de sous-groupe non trivial. Pour $n = 3$, les sous-groupes non triviaux de \mathcal{S}_3 sont $\mathcal{A}_3 = \langle (123) \rangle$, qui n'est pas GAF, et les trois sous-groupes d'ordre 2 engendrés par chaque transposition, qui sont GAG, donc il n'y a pas d'excentrique dans \mathcal{S}_3 .

Étape 2 : \mathcal{S}_4 est globalisant. Soit $G \leq \mathcal{S}_4$ un GAF. Alors G ne contient ni double-transposition ni cycle d'ordre 4 (puisque ces permutations n'ont pas de point fixe), donc $G \setminus \{\mathbf{id}\}$ contient seulement des transpositions et/ou des cycles d'ordre 3. On distingue deux cas.

Si G ne contient pas de cycle d'ordre 3, alors $G = \{\mathbf{id}, \tau\}$ où τ est une transposition, et on a fini.

Si G contient un cycle γ d'ordre 3, disons $\gamma = (123)$, montrons que $\text{Fix } G = \{4\}$. Par l'absurde, sinon il existe $g \in G$ tel que $g(4) \neq 4$, disons $g(4) = 1$. Si $g = (14)$, alors $g\gamma = (1234)$, qui n'a pas de point fixe. Si g est un cycle d'ordre 3, disons $g = (124)$, alors $g\gamma = (14)(23)$, qui n'a pas de point fixe non plus.

Étape 3 : \mathcal{S}_5 n'est pas globalisant. Soit $G = \langle f, g \rangle$ avec $f = (123)$ et $g = (12)(45)$. On vérifie que $G = \{\mathbf{id}, f, f^2, g, h, k\}$ avec $h = fg = (13)(45)$ et $k = f^2g = gf = (23)(45)$, et que G est excentrique.

Remarque. On peut voir G comme $(\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2)^+$, l'ensemble des permutations paires agissant séparément sur $\{1, 2, 3\}$ et sur $\{4, 5\}$. On peut aussi interpréter G comme le groupe des isométries du "double tétraèdre", i.e. l'héxaèdre obtenu en collant deux tétraèdres réguliers isométriques sur une de leurs faces.

Étape 4 : \mathcal{S}_6 n'est pas globalisant. Soit $G = \langle f, g \rangle$ avec $f = (12)(34)$ et $g = (12)(56)$. On vérifie que $G = \{\mathbf{id}, f, g, h\}$ avec $h = (34)(56)$, et que G est excentrique.

Remarque. Ici aussi, on peut interpréter G comme un ensemble de permutations paires : celles agissant séparément sur $\{1, 2\}$, sur $\{3, 4\}$ et sur $\{5, 6\}$, et aussi comme un groupe d'isométries : les demi-tours dont les axes sont les axes de coordonnées dans \mathbb{R}^3 .

Étape 5 : \mathcal{S}_n n'est pas globalisant si $n \geq 7$. Soit $G = \langle f, g \rangle$ avec $f = (123)(6\dots n)$ et $g = (12)(45)(6\dots n)$. On vérifie que G est excentrique.

b. Pour $n \leq 4$, \mathcal{A}_n est globalisant comme sous-groupe d'un groupe globalisant. Pour $n = 5$ et $n = 6$, les deux sous-groupes excentriques construits dans les étapes 3 et 4 sont justement des sous-groupes de \mathcal{A}_5 , resp. \mathcal{A}_6 , ce qui montre que \mathcal{A}_5 et \mathcal{A}_6 ne sont pas globalisants. Pour $n \geq 8$, n pair, le cycle $(6\dots n)$ est pair, donc le sous-groupe excentrique de l'étape 5 est encore dans \mathcal{A}_n . Pour $n \geq 9$, n impair, le cycle $(7\dots n)$ est pair, donc on complète comme dans l'étape 5, mais avec le groupe de l'étape 4 : on choisit $G = \langle f, g \rangle$ avec $f = (12)(34)(7\dots n)$ et $g = (12)(56)(7\dots n)$. On vérifie que G est un sous-groupe excentrique de \mathcal{A}_n . Nous laissons en exercice 7.15 au lecteur le cas le plus intéressant : \mathcal{A}_7 . \square

Remarque. La proposition 6.1 montre que les groupes \mathcal{S}_n et \mathcal{A}_n ne sont pas globalisants lorsque $n > 4$. Il se pourrait que certains de leurs sous-groupes le soient. Par exemple lorsque \mathbb{F}_q est un corps fini à q éléments et d est un entier, le groupe $G = \mathrm{GL}(d, \mathbb{F}_q)$ agit naturellement sur $X = \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}$ et peut être identifié à un sous-groupe du groupe \mathcal{S}_X des permutations de X . Nous ne savons pas si G est globalisant sauf dans les cas triviaux et le cas $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ qui n'est pas globalisant, voir exercice 7.16.

6.2 Les isométries de \mathbb{Z}^n

Soit $n \geq 1$ un entier. On munit \mathbb{Z}^n de la norme euclidienne, notée $\| \cdot \|$. Toute isométrie de \mathbb{Z}^n se prolonge de manière unique en une isométrie de \mathbb{R}^n , notée par la même lettre, cf. exercice 7.14 et sa solution.

Théorème 6.2. *Le groupe $\mathrm{Isom} \mathbb{Z}^n$ est globalisant.*

Preuve. Par l'absurde, soit G un sous-groupe excentrique de $\mathrm{Isom} \mathbb{Z}^n$ avec n minimal.

Étape 1. G est fini.

Soit $\mathcal{C}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) ; x_i = -1, 0 \text{ ou } 1\}$ l'hypercube unité de \mathbb{Z}^n . Comme la seule translation de G est \mathbf{id} , le morphisme de G dans $\mathrm{Isom} \mathcal{C}_n$ qui, à une isométrie f , associe sa partie linéaire \overrightarrow{f} est injectif, or $\mathrm{Isom} \mathcal{C}_n$ est fini, donc G aussi.

Notons N le cardinal de G et ω le barycentre de l'orbite de $\overrightarrow{0}$ par G , donné par $\omega = \frac{1}{N} \sum_{f \in G} f(\overrightarrow{0})$.

Étape 2. Les coordonnées de ω sont toutes congrues à $\frac{1}{2}$ modulo 1.

En effet, ω est fixé par tous les éléments de G . Comme G est excentrique, $\omega \notin \mathbb{Z}^n$. Soit

$$\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n ; \|\omega - x\| = d(\omega, \mathbb{Z}^n)\}.$$

Soit $I = \{i \in \{1, \dots, n\} ; \exists x, y \in \Omega, x_i \neq y_i\}$. On a $\omega_i \equiv \frac{1}{2} \pmod{1} \Leftrightarrow i \in I$. En effet, si $x, y \in \Omega$ sont tels que $x_i \neq y_i$, alors $|x_i - y_i| = 1$ et $|x_i - \omega_i| = |y_i - \omega_i| = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $\omega_i \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ et $x \in \Omega$, alors $x_i = \omega_i \pm \frac{1}{2}$ et le point y de mêmes coordonnées que x sauf la i -ème égale à $\omega_i \mp \frac{1}{2}$ est aussi dans Ω . En résumé, on a

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n ; x_i = \omega_i \pm \frac{1}{2} \text{ si } i \in I \text{ et } x_i = [\omega_i] \text{ si } i \notin I\},$$

où $[\omega_i]$ est l'entier le plus proche de ω_i (unique puisque $\omega_i \not\equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ lorsque $i \notin I$). Soit $E = \mathbb{Z}^n \cap \text{Aff } \Omega$. C'est un "réseau" isométrique à \mathbb{Z}^k , où k est le cardinal de I . Précisément, posons $E_i = \mathbb{Z}$ si $i \in I$ et $E_i = \{[\omega_i]\}$ sinon ; on a alors $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

Pour tout $f \in G$ on a $f(\Omega) = \Omega$, donc $f(\text{Aff } \Omega) = \text{Aff } \Omega$, et de plus $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, donc $f(E) = E$. Ceci permet de définir G_E l'ensemble des restrictions à E des éléments de G . Ce sont des isométries de E . Comme G n'est pas un GAG, G_E non plus. De plus, pour tout $f \in G$ et tout $x \in \text{Fix } f$, la projection orthogonale $\pi_E x$ est aussi dans $\text{Fix } f$, donc G_E est un GAF. Par minimalité de n , on en déduit que $k = n$, donc $I = \{1, \dots, n\}$. \square

Étape 3. On se ramène à $\omega = \vec{0}$ et on change \mathbb{Z}^n en $(2\mathbb{Z} + 1)^n$.

Soit $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow (2\mathbb{Z} + 1)^n$, $x \mapsto 2x - 2\omega$ et $f \in G$. Alors l'isométrie $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ fixe $\vec{0}$ et va de $(2\mathbb{Z} + 1)^n$ dans $(2\mathbb{Z} + 1)^n$. Par ailleurs un petit calcul montre que $\tilde{f} = \tilde{f}$, la partie linéaire associée à f , donc \tilde{f} fixe aussi globalement le réseau \mathbb{Z}^n , et sa matrice ne contient que des 0, 1 ou -1 . \square

Pour ne pas multiplier les notations, on note à nouveau par G le conjugué de G par φ . Pour chaque $f \in G$, la matrice de f est ainsi une matrice de permutation signée : $\text{Mat } f = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec, sur chaque ligne et chaque colonne, un et un seul $a_{i,j}$ non nul, égal à 1 ou -1 .

Étape 4. Les éléments diagonaux de $\text{Mat } f$ ne peuvent jamais être -1 .

Comme G est un GAF, $\text{Fix } f$ est une partie non vide de $(2\mathbb{Z} + 1)^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Fix } f$. C'est un élément de $(2\mathbb{Z} + 1)^n$, donc $x_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Si $a_{i,i} \neq 0$, la i -ème coordonnée de $f(x) = x$ est $a_{i,i}x_i = x_i$, donc $a_{i,i} = 1$. \square

Notons $\sigma : G \rightarrow \mathcal{S}_n$, $f \mapsto \sigma_f$ l'application qui, à f de matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, associe la permutation de matrice $(|a_{i,j}|)_{1 \leq i, j \leq n}$. C'est clairement un morphisme, qui est injectif d'après l'étape 4.

Étape 5. Vers la construction d'un point fixe global.

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et considérons sur $\{1, \dots, n\}$ les deux relations :
 $i \sim j$ s'il existe $f \in G$ tel que $f(e_i) \in \{e_j, -e_j\}$,
 $i \approx j$ s'il existe $f \in G$ tel que $f(e_i) = e_j$.

On vérifie aisément que ce sont des relations d'équivalence. Soit p le nombre de classes pour la relation \sim . Pour chaque $k = 1, \dots, p$, la classe C_k pour \sim est partitionnée en deux classes pour \approx (éventuellement, l'une des classes est vide). Notons C_k^+ l'une de ces classes (choisie arbitrairement) et $C_k^- = C_k \setminus C_k^+$. Notons

$$C^+ = C_1^+ \cup \dots \cup C_p^+ \quad \text{et} \quad C^- = C_1^- \cup \dots \cup C_p^-.$$

D'après l'étape 4, étant donnés $i \sim j$, il n'est pas possible d'avoir $f(e_i) = e_j$ pour l'un des $f \in G$ et $g(e_i) = -e_j$ pour un autre, donc on a $i \approx \sigma_f(i) \Leftrightarrow f(e_i) = e_{\sigma_f(i)}$.

Fixons $f \in G$ et notons

$$\begin{aligned} C_f^{++} &= C^+ \cap \sigma_f^{-1}(C^+), & C_f^{+-} &= C^+ \cap \sigma_f^{-1}(C^-), \\ C_f^{-+} &= C^- \cap \sigma_f^{-1}(C^+), & C_f^{--} &= C^- \cap \sigma_f^{-1}(C^-). \end{aligned}$$

On a ainsi $f(e_i) = e_{\sigma_f(i)}$ si $i \in C_f^{++} \cup C_f^{--}$ et $f(e_i) = -e_{\sigma_f(i)}$ si $i \in C_f^{+-} \cup C_f^{-+}$. On a aussi

$$C^+ = C_f^{++} \cup C_f^{+-}, \quad C^- = C_f^{-+} \cup C_f^{--}$$

et

$$\sigma_f(i) \in C^+ \Leftrightarrow i \in C_f^{++} \cup C_f^{-+}, \quad \sigma_f(i) \in C^- \Leftrightarrow i \in C_f^{+-} \cup C_f^{--}.$$

Étape 6. Le point $x = (x_1, \dots, x_n)$ donné par $x_i = 1$ si $i \in C^+$ et $x_i = -1$ si $i \in C^-$ est invariant par tout élément de G .

En effet, pour $f \in G$ arbitraire, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i \in C^+} e_i\right) - f\left(\sum_{i \in C^-} e_i\right) \\ &= \left(\sum_{i \in C_f^{++}} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{i \in C_f^{-+}} e_{\sigma_f(i)}\right) - \left(\sum_{i \in C_f^{+-}} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{i \in C_f^{--}} e_{\sigma_f(i)}\right) \\ &= \sum_{\sigma_f(i) \in C^+} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{\sigma_f(i) \in C^-} e_{\sigma_f(i)} \\ &= \sum_{j \in C^+} e_j - \sum_{j \in C^-} e_j = x. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Fix } G$ serait non vide, une contradiction. \square

6.3 Isométries des arbres

Tous les résultats de cette section sont extraits du livre de J.-P. Serre [20]. Un *arbre combinatoire* X est un graphe simple non orienté, connexe et sans cycles. On vérifie aisément la propriété fondamentale suivante : étant donnés deux sommets P et Q , il existe un unique chemin injectif les joignant. On note $[P, Q]$ ce chemin et $d(P, Q)$ sa longueur, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qu'il contient. L'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ est la *distance combinatoire* sur X et (X, d) est un espace métrique discret. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si leur distance est 1. On rappelle qu'une isométrie de X est une bijection de X qui préserve les distances.

Lemme 6.3. *Soit s une isométrie ayant au moins un point fixe. Alors, pour tout sommet x de X , la distance $d(x, s(x))$ est paire et le milieu z du chemin $[x, s(x)]$ est un point fixe de s . De plus z est l'unique élément de $\text{Fix } s$ tel que $d(x, z) = d(x, \text{Fix } s)$.*

Preuve. L'unicité du chemin géodésique entre deux sommets, associé au fait que l'image d'un chemin injectif par l'isométrie s est un chemin injectif de même longueur, assurent que $\text{Fix } s$ est connexe et donc un sous-arbre de X .

Si $x \in \text{Fix } s$ alors la proposition est triviale. Supposons que $x \notin \text{Fix } s$. Alors il existe $b \in \text{Fix } s$ tel que $n = d(x, \text{Fix } s) = d(x, b) \geq 1$. Si b n'était pas unique, on pourrait construire un cycle non trivial grâce à la connexité de $\text{Fix } s$. Soit $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ le chemin géodésique joignant $b = x_0$ à $x = x_n$. Par définition de b , $s(x_i) \neq x_i$ pour tout $i > 0$. Les deux chemins $[x, b] = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$ et $[b, s(x)] = [x_0, s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)]$ n'ont pas de sommet commun en dehors de $x_0 = b$. En effet, si $x_j = s(x_i)$ avec $i \neq j$, on pourrait construire un chemin de longueur strictement inférieure à n , joignant b soit à x soit à $s(x)$. On en déduit que le chemin géodésique $[x, s(x)]$ est la juxtaposition des chemins géodésiques $[x, b] = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$ et $[b, s(x)] = [x_0, s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)]$. Par conséquent la distance $d(x, s(x))$ est paire et b est le milieu de $[x, s(x)]$. \square

Théorème 6.4. [20] *Si G est un groupe de type fini d'isométries de X qui est un GAF, alors G est un GAG. De plus, $\text{Fix } G$ est un sous-arbre non vide de X .*

Preuve. Elle se fait par récurrence sur le nombre de générateurs de G . Supposons G engendré par une isométrie s qui fixe un sommet et un sous-groupe G_0 ayant un point fixe global x_0 . Si $s(x_0) \neq x_0$ alors, d'après le lemme 6.3, le milieu z du chemin géodésique $[x_0, s(x_0)]$ est un point fixe de s . De même, pour tout $t \in G_0$, st admet un point fixe et $[x_0, s(x_0)] = [x_0, s(t(x_0))]$. Par conséquent, z est fixé par toutes les isométries appartenant à l'ensemble sG_0 . Comme s et sG_0 engendrent G , le point z est fixé par G . \square

Remarque. L'hypothèse " G est de type fini" est nécessaire. En effet, soit $[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$ un chemin géodésique infini de l'arbre X . Soit k un entier et $N(k) = \{s \in \text{Isom } X ; s(x_{k'}) = x_{k'} \forall k' \geq k\}$. La suite $(N(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes de $\text{Isom } X$ dont la réunion est un sous-groupe G . Tout élément s de G admet des points fixes mais, en général, il n'y a pas de point fixe global (sauf dans certains cas particuliers où l'arbre est filiforme sans symétrie). En particulier lorsque X est un arbre homogène de degré ≥ 3 , le groupe G n'a pas de point fixe global et donc $\text{Isom } X$ n'est pas globalisant. En fait le groupe G admet une sorte de *point fixe à l'infini* : la classe d'équivalence des chemins géodésiques terminant comme $[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$.

Nous donnons à présent une condition explicite pour obtenir un GAF opérant sur un arbre :

Proposition 6.5. *Soit f et g deux isométries sur un arbre ayant des points fixes et telles que $h = fg$ a aussi de points fixes. Alors tout élément du groupe engendré par f et g a des points fixes.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\text{Fix } f$ et $\text{Fix } g$ s'intersectent. Si $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$, soit $[P, Q]$ la géodésique joignant $\text{Fix } f$ à $\text{Fix } g$. D'après le lemme 6.3, la géodésique $[Q, f(Q)]$ a pour milieu P . Par ailleurs $f(Q) = f(g(Q)) = h(Q)$ et, comme $\text{Fix } h$ n'est pas vide, le lemme 6.3 entraîne aussi que P est fixé par h . On en déduit $fg(P) = P$, d'où $g(P) = f^{-1}(P) = P$, contredisant $P \notin \text{Fix } g$. \square

Orbites bornées sur un arbre

L'inégalité de la médiane (1) est presque vraie dans le cas des arbres combinatoires, mais une arête n'a pas de milieu ! C'est pourquoi les isométries dont les points fixes devraient être des milieux d'arêtes jouent un rôle particulier.

Lemme 6.6. *Si X est un arbre fini, alors il existe ou bien un sommet fixé par tout élément de $\text{Isom } X$, ou bien une arête stable par tout élément de $\text{Isom } X$.*

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre de sommets. S'il y a un ou deux sommets, le résultat est vrai. S'il y a strictement plus de deux sommets, l'ensemble des sommets de X ayant au moins deux voisins est un sous-arbre non vide X' , stable par les éléments de $\text{Isom } X$. Comme il y a au moins un sommet qui a un unique voisin dans un arbre fini, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à X' . \square

Définition 6.7. Une isométrie g de X est appelée une *inversion* s'il existe une arête $\{a, b\}$ telle que $g(a) = b$ et $g(b) = a$.

Proposition 6.8. *Soit X un arbre dont les sommets ont tous un degré fini. Soit G un sous-groupe de $\text{Isom } X$ ne contenant pas d'inversion. Si G admet une orbite bornée, alors G admet un point fixe global.*

Preuve. Supposons que G admet une orbite bornée Δ . Considérons l'ensemble $T(\Delta)$ des sommets de X qui se trouvent sur un segment géodésique joignant deux sommets de Δ . Comme Δ est fini, $T(\Delta)$ l'est aussi. De plus, $T(\Delta)$ est le plus petit sous-arbre contenant Δ , l'*enveloppe*

convexe de l'orbite. Comme une isométrie envoie un segment géodésique sur un segment géodésique, le sous-arbre $T(\Delta)$ est stable par les éléments de $\text{Isom } X$. Par conséquent, d'après le lemme 6.6 appliqué à $T(\Delta)$, il existe soit un sommet, soit une arête stable par tous les éléments de G . Si G laisse stable une arête $\{a, b\}$, nécessairement G fixe a et b car G ne contient pas d'inversion. \square

On déduit facilement de la démonstration le résultat suivant.

Corollaire 6.9. *Une isométrie d'ordre fini d'un arbre qui n'est pas une inversion possède au moins un point fixe.*

Application. Considérons le groupe de Schwartz G défini par deux générateurs a et b liés par les relations $a^A = b^B = (ab)^C = 1$, où A , B et C sont des entiers supérieurs ou égaux à 2. Toute action par isométries sans inversion de G sur un arbre X possède un point fixe global. En effet, d'après la proposition sur les orbites finies, chacune des isométries de X déterminées par les actions de a , b et ab a des points fixes. Puis grâce à la proposition 6.5, on en conclut que le groupe engendré par a et b a un point fixe global.

Par un argument analogue, Serre démontre que le groupe $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$ a la même propriété : chaque action par isométries de G sur un arbre a un point fixe global.

Généralisation. On peut définir une notion de Λ -arbre où Λ est un groupe abélien totalement ordonné. Le théorème 6.4 y est encore valable [15].

6.4 Questions sur les isométries des graphes finis

Soit $X = (S, A)$ un graphe simple non orienté connexe. L'ensemble S des sommets est muni de la distance d définie par le minimum du nombre d'arêtes joignant deux sommets. Il y a plusieurs questions simples et naturelles dans ce cadre :

1. Quels sont les graphes finis dont le groupe des isométries est globalisant ?
2. Quels sont les groupes finis admettant un système générateur définissant un graphe de Cayley dont le groupe d'isométries est globalisant ?
3. Trouver des familles infinies de graphes dont le groupe des isométries est globalisant.

Les deux premières questions sont ambitieuses et probablement difficiles. Par contre la troisième question admet des réponses partielles simples.

Considérons le graphe complet K_n sur n sommets. Son groupe d'isométries est le groupe symétrique \mathcal{S}_n . Par conséquent, d'après la proposition 6.1.a, il est globalisant si et seulement si $n \leq 4$.

Soit \mathcal{C}_n le graphe du cube n -dimensionnel. L'ensemble des sommets de \mathcal{C}_n est le cube unité $\{0, 1\}^n$ de \mathbb{R}^n et les arêtes sont les paires de sommets dont exactement une des coordonnées diffère.

Proposition 6.10. *Le groupe $\text{Isom } \mathcal{C}_n$ est globalisant pour tout entier $n \geq 1$.*

Preuve. Elle est analogue, en plus simple, à celle du théorème sur \mathbb{Z}^n . On démontre qu'une isométrie de \mathcal{C}_n se prolonge à \mathbb{R}^n de manière unique en une isométrie pour la norme euclidienne, cf. exercice 7.14. Le centre du cube $\omega = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ est fixé par toutes les isométries du cube. En conjuguant par l'application $x \mapsto 2x - 2\omega$, on se ramène au cas où les isométries sont des isométries linéaires dont les matrices sont des matrices de permutations signées. On constate que les matrices des isométries d'un sous-groupe GAF n'ont jamais de -1 sur la diagonale, ce qui permet de conclure à l'existence d'un point fixe global comme dans les étapes 5 et 6 de la démonstration du théorème 6.2. \square

6.5 Un résultat dans les graphes infinis

Soit $X = (S, A)$ un graphe simple non orienté connexe dont les arêtes sont colorées. La couleur des arêtes est donnée par une application définie sur l'ensemble A des arêtes et à valeurs dans un ensemble de couleurs \mathcal{C} . On rappelle qu'un cycle est dit *simple* s'il ne repasse pas deux fois par une même arête, et qu'il est dit *élémentaire* s'il ne repasse pas deux fois par un même sommet (sauf le début et la fin). Il est facile de voir qu'un cycle élémentaire de longueur au moins 3 est simple et qu'un cycle, simple ou non, contient toujours au moins un cycle élémentaire. On fait les hypothèses suivantes :

- les arêtes d'un cycle élémentaire du graphe ont toutes la même couleur,
- pour chaque $c \in \mathcal{C}$, les composantes connexes du graphe partiel X_c , obtenu en ne conservant que les arêtes de couleur c , sont des graphes complets.

Pour chaque $c \in \mathcal{C}$, nous appellerons *cellule de couleur c* une composante connexe du graphe partiel X_c . Chaque arête de X appartient à une unique cellule.

Notons que le graphe de Cayley du produit libre de deux groupes finis G_1 et G_2 vérifie les hypothèses ci-dessus si l'on choisit $(G_1 \cup G_2) \setminus \{e\}$ pour ensemble de générateurs et si l'on colorie les arêtes $\{w, wg\}$, $g \in G_1$, en bleu et les autres en rouge.

Voici une généralisation du théorème 6.4 sur les groupes de type fini d'isométries des arbres.

Théorème 6.11. *On suppose que chaque cellule du graphe X a au plus 4 sommets. Soit G un sous-groupe de type fini de $\text{Isom } X$. Si G est un GAF alors G est un GAG.*

Remarquons que l'hypothèse sur le cardinal des cellules est nécessaire : si un graphe complet X a au moins cinq sommets alors, d'après la proposition 6.1.a, $\text{Isom } X$ contient un sous-groupe excentrique. Il en est de même pour le graphe de Cayley du produit libre de deux groupes dont l'un au moins a un cardinal au moins cinq. Avant la preuve du théorème 6.11, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

Lemme 6.12. *Étant donnés deux sommets x, y du graphe X , il existe un unique chemin les joignant dont deux arêtes consécutives ne sont jamais de la même couleur. De plus ce chemin est l'unique géodésique de x à y . Par conséquent, un chemin est une géodésique si et seulement si deux arêtes consécutives n'ont jamais la même couleur.*

Preuve. Soit $x, y \in S$. Par connexité il existe un chemin joignant x à y , et donc au moins une géodésique. Comme les cellules du graphe sont des graphes complets, cette géodésique ne peut pas avoir deux arêtes consécutives de la même couleur, d'où l'existence.

Pour l'unicité, remarquons d'abord que tous les sommets d'un chemin vérifiant la propriété de changement de couleur des arêtes sont distincts. En effet, si deux sommets du chemin coïncidaient, alors le cycle extrait du chemin ainsi constitué contiendrait un cycle élémentaire de longueur au moins 2. Par hypothèse sur X , toutes les arêtes de ce cycle auraient la même couleur, contredisant la propriété de changement de couleur.

Si deux chemins distincts $[a_0 = x, \dots, a_m = y]$ et $[b_0 = x, \dots, b_n = y]$ joignent x à y et possèdent la propriété de changement de couleur, alors il existe un entier $i \geq 0$ tel que $a_i = b_i$ et $a_{i+1} \neq b_{i+1}$. Considérons le premier sommet a_j du chemin $[a_{i+1}, \dots, a_m]$ qui appartient aussi au chemin $[b_{i+1}, \dots, b_n]$. On a donc $a_j = b_k$ pour un certain $k > i$. On choisit k minimal avec cette propriété. Par choix de j et k , les sommets du chemin $[a_i, a_{i+1}, \dots, a_j = b_k, b_{k-1}, \dots, b_i = a_i]$ sont tous distincts, hormis les deux extrémités. Ce cycle a au moins trois arêtes (sinon $a_{i+1} = b_{i+1}$), il est élémentaire et a au moins deux couleurs, une contradiction. \square

Lemme 6.13. *Soit s une isométrie de X ayant au moins un point fixe et x un sommet de X qui n'est pas un point fixe de s . Soit F l'ensemble des points $y \in \text{Fix } s$ tels que $d(x, y) = d(x, \text{Fix } s)$.*

a. *Alors F est inclus dans une cellule dont la couleur est celle de la dernière arête de la géodésique allant de x à n'importe quel élément de F .*

b. De plus :

- (i) Si $d(x, s(x))$ est paire, alors le milieu z de la géodésique joignant x à $s(x)$ appartient à F .
- (ii) Si $d(x, s(x))$ est impaire, alors F est inclus dans la cellule Y contenant l'arête centrale $[a, b]$ de la géodésique allant de x à $s(x)$. De plus $s(Y) = Y$ et $s(a) = b$.

Preuve. **a.** Soit u et v deux points de F . Considérons les géodésiques $[u_0 = x, \dots, u_n = u]$ et $[v_0 = x, \dots, v_n = v]$ (avec $n = d(x, \text{Fix } s)$). Comme s est une isométrie qui fixe u et v , elle fixe chaque sommet de la géodésique $[w_0 = u, \dots, w_m = v]$ joignant u à v . Soit i le plus petit entier tel que $u_i = v_i$ et $u_{i+1} \neq v_{i+1}$. On vérifie, comme dans la preuve du lemme 6.12, que les trois branches de géodésiques $[u_i, \dots, u_n = u]$, $[u, \dots, v]$ et $[v_n, \dots, v_i = u_i]$ forment un cycle élémentaire. Par conséquent, toutes les arêtes de ce cycle ont la même couleur c et les sommets u et v sont joints par une arête de couleur c . On conclut en remarquant que c est la couleur de l'arête $[u_{n-1}, u_n]$.

b. Soit u un point de F et $[u_0 = x, \dots, u_n = u]$ la géodésique joignant x à u . D'après le point **a**, F est inclus dans une cellule Y dont la couleur c est celle de l'arête $[u_{n-1}, u_n]$. Considérons l'image $[s(x), \dots, s(u_n) = u]$ de cette géodésique par s . Soit c' la couleur de l'arête $[s(u_{n-1}), u]$.

(i) Si $c \neq c'$ alors $[u_0, \dots, u_n = s(u_n), s(u_{n-1}), \dots, s(u_0) = s(x)]$ est une géodésique car les couleurs de deux arêtes consécutives de ce chemin ne sont jamais les mêmes. Il s'agit donc de la géodésique joignant x à $s(x)$. La longueur de cette géodésique est $2n$ et son milieu est $u \in F$.

(ii) Si $c = c'$ alors $s(u_{n-1})$ est un sommet de Y qui est complet, donc $[u_{n-1}, s(u_{n-1})]$ est aussi une arête de Y . Deux arêtes consécutives du chemin $[u_0, \dots, u_{n-1}, s(u_{n-1}), \dots, s(u_0)]$ n'ont jamais la même couleur. Ce chemin est donc la géodésique joignant x à $s(x)$. Par construction, la longueur de cette géodésique est impaire et son arête centrale $[u_{n-1}, s(u_{n-1})]$ est de couleur c . Il reste à voir que $s(Y) = Y$. Soit y un sommet de Y . L'image par s du triangle u_{n-1}, u, y est un triangle qui contient l'arête $[s(u_{n-1}), u]$ qui est une arête de Y . Par conséquent l'image de ce triangle est un triangle de Y et donc $s(y)$ est un sommet de Y . \square

Preuve du théorème 6.11. On procède par récurrence sur le nombre de générateurs de G . Supposons que G est engendré par une isométrie s qui fixe au moins un sommet et un sous-groupe G_0 ayant un point fixe global x_0 . Si $s(x_0) = x_0$ on a fini. Sinon, considérons la géodésique allant de x_0 à $s(x_0)$. Observons que c'est aussi la géodésique allant de x_0 à $st(x_0) = s(x_0)$ pour n'importe quel $t \in G_0$.

Si cette géodésique a une longueur paire alors, d'après le lemme 6.13, son milieu z est un point fixe de s mais aussi de tous les st , $t \in G_0$. Comme s est injective, $s(t(z)) = z = s(z)$ entraîne $t(z) = z$, donc z est un point fixe de t . Ainsi z est un point fixe global de G .

Si cette géodésique a une longueur impaire, alors d'après le lemme 6.13, la cellule Y contenant l'arête centrale de cette géodésique est stable par tous les st , $t \in G_0$. Elle est donc stable par G . De plus, cette cellule contient des points fixes de st . Par conséquent, le groupe H des restrictions à Y des éléments de G est un GAF. Or $\text{Isom } Y$ est le groupe des permutations des sommets de Y et par hypothèse la cellule Y a au plus 4 sommets donc, d'après la proposition 6.1.a, $\text{Isom } Y$ est globalisant. Par conséquent H est un GAG et donc G aussi. \square

7 Exercices

Exercice 7.1. Montrer que le groupe $\text{Isom } \mathbb{R}^2$ est globalisant.

Exercice 7.2. Un groupe est appelé *super-globalisant* si, pour tout ensemble X et tout morphisme $\rho : G \rightarrow \text{Bij } X$, le couple $(X, \rho(G))$ est globalisant. En considérant l'action d'un groupe

sur l'ensemble de ses parties non triviales, démontrer qu'un groupe est super-globalisant si et seulement s'il est monogène.

Exercice 7.3. Montrer que le groupe additif \mathbb{Q} est *finiment super-globalisant* au sens suivant : si X un ensemble fini et $\rho : \mathbb{Q} \rightarrow \text{Bij } X$ un morphisme, alors $(X, \rho(\mathbb{Q}))$ est globalisant.

Exercice 7.4. Démontrer que, dans un espace métrique vérifiant l'inégalité de la médiane (1), le point m est unique et satisfait $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2} d(x, y)$.

Exercice 7.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé vérifiant l'inégalité de la médiane (1).

a. Montrer qu'il vérifie l'identité dite *du parallélogramme*

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (5)$$

b. En déduire que E est préhilbertien (un résultat dû à M. Fréchet, P. Jordan et J. von Neuman [9, 11]).

Exercice 7.6. D'après le théorème de comparaison de Rauch [8], la classique loi des cosinus devient une inégalité en trigonométrie hyperbolique : dans un triangle hyperbolique de longueurs de côtés a, b, c et d'angle γ opposé au côté de longueur c , on a

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq c^2. \quad (6)$$

À partir de cette inégalité, démontrer que \mathbb{H}_n satisfait la propriété de la médiane (1).

Exercice 7.7. Sur l'ensemble $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on considère le *groupe de Möbius*

$$M(\widehat{\mathbb{R}}) = \left\{ \varphi : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = \pm 1 \right\}.$$

Montrer qu'il n'est pas globalisant. Indication : reprendre les matrices A et B de l'exemple 3.3 et utiliser le lemme 8.16.

Exercice 7.8. En utilisant le fait que $\text{Isom } \mathbb{H}_3$ est globalisant, démontrer que $\text{Isom } \mathbb{H}_2$ est globalisant.

Exercice 7.9. Montrer qu'une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n qui conserve la distance euclidienne, a priori surjective ou non, est nécessairement une bijection affine de \mathbb{R}^n .

Exercice 7.10. Montrer qu'une application continue d'un espace vectoriel normé dans lui-même et préservant les milieux est affine.

Exercice 7.11. *Théorème de Mazur-Ulam.*

L'énoncé s'inspire de [22]. Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} .

a. Soit $a, b \in E$ et m le milieu de $[a, b]$. Soit $W_{a,b}$ l'ensemble des isométries de E fixant a et b et soit $\lambda = \sup\{\|g(m) - m\| ; g \in W_{a,b}\}$.

(i) Montrer que $\lambda \leq \|a - b\|$.

(ii) Soit s_m la symétrie centrale de centre m , i.e. telle que $s_m(x) = 2m - x$ pour tout $x \in E$. Pour $g \in W_{a,b}$, on note $g^* = s_m g^{-1} s_m g$. Montrer que $\|g^*(m) - m\| = 2\|g(m) - m\|$.

(iii) Montrer que toute isométrie qui fixe a et b fixe m .

b. Soit f une isométrie de E .

(i) Soit $a, b \in E$. On note m le milieu de $[a, b]$ et m' le milieu de $[f(a), f(b)]$. Montrer que $h = s_m f^{-1} s_{m'} f \in W_{a,b}$ et en déduire que $f(m) = m'$.

(ii) Montrer que f est affine.

Exercice 7.12. *Théorème de Kakutani en dimension finie.*

Cet exercice est inspiré de R. Antetomaso [1]. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un convexe compact non vide de E . On suppose que $g(K) \subseteq K$ pour tout $g \in G$ et on veut montrer que (K, G) est un GAG.

- a. Soit $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne sur E . Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\| = \sup\{\|g(x)\|_2 ; g \in G\}$. Montrer qu'on définit ainsi une norme strictement convexe sur E , pour laquelle tout élément de G est une isométrie.
- b. Soit f un endomorphisme de E tel que $f(K) \subseteq K$. Soit $x_1 \in K$ et soit $(x_n)_{n>0}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. En considérant la suite (σ_n) des moyennes de Césaro de la suite (x_n) , montrer que f possède un point fixe dans K .
- c. Pour $g \in G$, notons $V_g = \{x \in K ; g(x) \neq x\}$. Supposons par l'absurde que, pour tout $x \in K$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$.
 - (i) Montrer qu'il existe $g_1, \dots, g_N \in G$ tels que $K \subset V_{g_1} \cup \dots \cup V_{g_N}$.
 - (ii) Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $(g_1 + \dots + g_N)(a) = Na$.
 - (iii) Montrer que $g_k(a) = a$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$. Conclure.

Exercice 7.13. *Les isométries de la sphère se prolongent en isométries de l'espace euclidien.*

On munit la sphère \mathbb{S}_n de la distance sphérique $d(x, y) = \arccos\langle x | y \rangle$. On veut prouver que toute isométrie de la sphère est la restriction d'une unique isométrie vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} muni de la distance euclidienne. Soit f une isométrie de \mathbb{S}_n .

- a. Montrer que f conserve le produit scalaire.
- b. On définit \tilde{f} sur \mathbb{R}^{n+1} par $\tilde{f}(x) = \|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ si $x \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$. Montrer que \tilde{f} conserve le produit scalaire.
- c. Conclure.

Exercice 7.14. *Prolongement d'une isométrie.*

Soit A une partie de \mathbb{R}^d et soit $E = \text{Aff } A$, le sous-espace affine engendré par A . On munit A de la distance euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^d . On veut montrer que toute isométrie de A est la restriction d'une unique isométrie affine de E .

On sait qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in A$ tels que $E = \text{Aff}(a_0, \dots, a_n)$, où $n = \dim E$. Ainsi tout point $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x) a_i$, avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i(x) = 1$. Les nombres $\lambda_i(x)$ sont les *coordonnées barycentriques* de x . Soit f une isométrie de A .

- a. Montrer qu'on a $\langle f(a_i) - f(a_0) | f(a_j) - f(a_0) \rangle = \langle a_i - a_0 | a_j - a_0 \rangle$ pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$.
- b. On définit \tilde{f} sur E par $\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x) f(a_i)$. Montrer que \tilde{f} est une isométrie.
- c. Montrer que \tilde{f} prolonge f . Conclure.

Exercice 7.15. *Le groupe \mathcal{A}_7 n'est pas globalisant.*

Dans l'étape 3 de la preuve de la proposition 6.1, on a construit un sous-groupe excentrique de \mathcal{S}_5 en utilisant des permutations agissant séparément sur $\{1, 2, 3\}$ et sur $\{4, 5\}$, grâce au point-clé suivant. Le groupe \mathcal{S}_3 possède un sous-groupe distingué (le groupe alterné \mathcal{A}_3) qui a les deux propriétés suivantes :

- ▷ Le quotient $\mathcal{S}_3/\mathcal{A}_3$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- ▷ Tout élément de $\mathcal{S}_3 \setminus \mathcal{A}_3$ a au moins un point fixe.

On a alors obtenu un sous-groupe excentrique $G = \langle f, g \rangle$ de \mathcal{S}_5 en prenant pour f un élément de \mathcal{A}_3 sur $\{1, 2, 3\}$ et l'identité sur $\{4, 5\}$, et pour g un élément de $\mathcal{S}_3 \setminus \mathcal{A}_3$ sur $\{1, 2, 3\}$ et un élément de \mathcal{S}_2 sans point fixe sur $\{4, 5\}$. En prenant modèle sur cette construction, construire un sous-groupe excentrique dans \mathcal{A}_7 .

Exercice 7.16. L'action du groupe $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ sur $X = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$ n'est pas globalisante.

Notons e_1, e_2, e_3 la base canonique de \mathbb{F}_2^3 et pour $a \subset \{1, 2, 3\}$ notons $e_a = \sum_{i \in a} e_i$. Ainsi $X = \{e_a : a \neq \emptyset\}$. Soit f et g les éléments de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ définis par

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_1 \text{ et } g(e_1) = e_{123}, g(e_2) = e_2, g(e_3) = e_3.$$

et $G = \langle f, g \rangle$. Notons enfin $Y = \{e_1, e_2, e_3, e_{123}\}$ et $Z = \{e_{23}, e_{13}, e_{12}\}$.

- a. Montrer que f et g induisent des permutations paires de X
- b. Montrer que l'application qui à $h \in G$ associe sa restriction à Y induit un morphisme injectif de G dans le groupe \mathcal{S}_Y des permutations de Y .
- c. Montrer que si la restriction de $h \in G$ à Y est une double transposition alors sa restriction à Z est l'identité.
- d. En déduire que l'action de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ n'est pas globalisante. Observer que l'on a une autre démonstration du fait \mathcal{A}_7 n'est pas globalisant.

8 Annexes

8.1 Petite introduction à la géométrie hyperbolique

Soit n un entier ≥ 2 . Un modèle de l'espace hyperbolique de dimension n est le demi-espace supérieur

$$\mathbb{H}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n > 0\}$$

muni de la métrique de Poincaré

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2).$$

Un calcul montre que la distance géodésique associée à cette métrique riemannienne est donnée par

$$d(x, y) = \operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n} \right) \quad (7)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Théorème 8.1. ([6], Theorem 9.3) *Les géodésiques de \mathbb{H}_n sont les demi-droites affines et les demi-cercles euclidiens, dont les extrémités sont dans l'hyperplan horizontal*

$$\partial\mathbb{H}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n = 0\},$$

et orthogonaux à cet hyperplan en leurs extrémités.

8.1.1 Le groupe des isométries de \mathbb{H}_n .

Les similitudes et les inversions par rapport à des sphères ou des hyperplans affines agissent sur $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ et engendrent un groupe d'homéomorphismes pour la composition. Ce groupe s'appelle le groupe de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ et se note $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Le groupe de Möbius est aussi engendré par les inversions et les symétries par rapport à des hyperplans, c'est-à-dire par les réflexions. Les restrictions au demi-espace supérieur de certains éléments du groupe de Möbius donnent les isométries de \mathbb{H}_n :

Théorème 8.2. ([17], Theorem 4.6.2) *Le groupe des isométries de \mathbb{H}_n est le groupe des restrictions à \mathbb{H}_n des transformations de Möbius φ telles que $\varphi(\mathbb{H}_n) = \mathbb{H}_n$. Il est engendré par les réflexions par rapport aux sphères centrées en un point de $\partial\mathbb{H}_n$ et aux hyperplans verticaux.*

Tous les résultats dont nous avons besoin découlent de ce théorème, du théorème décrivant les géodésiques et de la formule donnant la distance.

Une première conséquence du théorème 8.2 est qu'une similitude φ de \mathbb{R}^n telle que $\varphi(\mathbb{H}_n) = \mathbb{H}_n$ induit une isométrie de \mathbb{H}_n . Inversement, comme les seuls éléments de $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ fixant ∞ sont des similitudes ([17], Theorem 4.3.2), on a le résultat suivant.

Corollaire 8.3. *Si une isométrie f de \mathbb{H}_n est la restriction d'un élément \widehat{f} de $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ qui fixe ∞ , alors \widehat{f} restreinte à \mathbb{R}^n est une similitude de \mathbb{R}^n .*

Une deuxième conséquence du théorème 8.2 est que les isométries de \mathbb{H}_n sont des difféomorphismes et conservent donc la métrique de Poincaré. De plus, le jacobien des isométries est de signe constant. On en déduit la décomposition usuelle du groupe $\text{Isom } \mathbb{H}_n$ des isométries de \mathbb{H}_n en le sous-groupe $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_n$ des isométries de jacobien positif et son complémentaire $\text{Isom}^- \mathbb{H}_n$.

8.1.2 Sous-espaces de \mathbb{H}_n .

Un sous-espace hyperbolique de \mathbb{H}_n est une partie X de \mathbb{H}_n qui est de l'une des formes suivantes :

- ▷ la partie vide, $\dim X = -1$,
- ▷ un singleton, $\dim X = 0$,
- ▷ l'intersection de \mathbb{H}_n et d'un sous-espace affine vertical A , $\dim X = \dim A$,
- ▷ l'intersection de \mathbb{H}_n , d'un sous-espace affine vertical A et d'une sphère S centrée en un point de $\partial\mathbb{H}_n$, $\dim X = \dim A \cap S$ (on peut avoir $A = \mathbb{R}^n$).

Par abus de langage, les sous-espaces de dimension 1 seront appelés des *droites* et ceux de dimension 2 des *plans*. En utilisant que l'image d'une sphère par une inversion dont le pôle appartient à la sphère est un sous-espace affine, on montre qu'un sous-espace hyperbolique de dimension p est isométrique à

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}_n ; x_1 = x_2 = \dots = x_{n-p+1} = 0\}$$

et donc à \mathbb{H}_p . Par définition, les géodésiques sont les droites de l'espace hyperbolique. De plus, un sous-espace hyperbolique est *totalelement géodésique*, en ce sens que, s'il contient deux points x et y , alors il contient la géodésique joignant x à y .

Lemme 8.4. *Toute intersection de sous-espaces hyperboliques de \mathbb{H}_n est un sous-espace hyperbolique.*

Preuve. Une intersection de sphères et de sous-espaces affines est une sphère S (ou un sous-espace affine s'il n'y a pas de sphère) du sous-espace affine A engendré par l'intersection. Notons que ce sous-espace A peut être vide ou réduit à un point. Il faut vérifier que si les sous-espaces affines sont tous verticaux, si les sphères sont centrées sur $\partial\mathbb{H}_n$ et si $\dim A \geq 1$ alors A est vertical et le centre de S appartient à $\partial\mathbb{H}_n$. Si l'intersection A contient au moins deux sous-espaces hyperboliques différents alors elle est incluse dans un hyperplan vertical. Comme un tel hyperplan est isométrique à \mathbb{H}_{n-1} , le résultat s'en déduit par récurrence sur n . \square

Lemme 8.5. *Soit H un sous-espace de \mathbb{H}_n et x un point n'appartenant pas à H . La dimension du plus petit sous-espace contenant H et x est $\dim H + 1$.*

Preuve. On considère f une isométrie qui envoie H sur l'intersection de \mathbb{H}_n et d'un sous-espace affine vertical A de dimension $p = \dim H$. Le plus petit sous-espace hyperbolique contenant $A \cap \mathbb{H}_n$ et $f(x)$ est $A' \cap \mathbb{H}_n$ où A' est le sous-espace affine engendré par A et $f(x)$, qui est de dimension $p + 1$. \square

Lemme 8.6. Soit a et b deux points distincts de \mathbb{H}_n . Alors l'ensemble $\text{Med}(a, b)$ des points équidistants de a et b est un hyperplan de \mathbb{H}_n .

Preuve. D'après (7), un point x appartient à $\text{Med}(a, b)$ si et seulement si

$$d(x, a) = \text{argcosh} \left(1 + \frac{\|x - a\|^2}{2x_n a_n} \right) = d(x, b) = \text{argcosh} \left(1 + \frac{\|x - b\|^2}{2x_n b_n} \right),$$

donc si et seulement si

$$\frac{\|x - a\|^2}{2x_n a_n} = \frac{\|x - b\|^2}{2x_n b_n}.$$

Dans le cas où $a_n = b_n$ on obtient un hyperplan vertical. Dans le cas où $a_n \neq b_n$ on obtient une demi-sphère dont le centre appartient à $\partial\mathbb{H}_n$. En effet le coefficient du terme en x_n est nul dans l'équation de sphère $b_n\|x - a\|^2 - a_n\|x - b\|^2 = 0$. \square

Lemme 8.7. Si f est une isométrie de \mathbb{H}_n alors $\text{Fix } f$ est un sous-espace hyperbolique.

Preuve. D'après le lemme 8.4, il existe un plus petit sous-espace hyperbolique H contenant $\text{Fix } f$. Soit $x \in H$. Par l'absurde, si $f(x) \neq x$ alors $\text{Med}(x, f(x))$ est un hyperplan qui contient $\text{Fix } f$, donc $\text{Fix } f \subset F = H \cap \text{Med}(x, f(x))$, or F ne contient pas x , ce qui contredit la minimalité de H . Par conséquent, $x = f(x)$ donc $x \in \text{Fix } f$. \square

Lemme 8.8. Soit D une droite de \mathbb{H}_n et $x \in \mathbb{H}_n$. Il existe un unique point $y \in D$ tel que

$$d(x, y) = d(x, D) := \inf\{d(x, z) : z \in D\}.$$

On note ce point $y = \pi_D x$. De plus, si $x \notin D$, alors la géodésique passant par x et $\pi_D x$ est orthogonale à D .

Rappelons que la métrique de Poincaré est conforme à la métrique euclidienne, donc les relations d'orthogonalité sont les mêmes pour ces deux métriques.

Preuve. Par compacité, la distance de x à D est atteinte : il existe $y \in D$ tel que $d(x, D) = d(x, y)$. Le point x et la droite D sont inclus dans un plan hyperbolique P . D'une part, la géodésique qui joint x à y est incluse dans P . D'autre part, ce plan est isométrique au plan hyperbolique \mathbb{H}_2 . On peut donc supposer que x et D sont dans \mathbb{H}_2 . Grâce à une nouvelle isométrie on peut supposer que $D = \{ti ; t > 0\}$. En posant $x = a + bi$, on a

$$d(x, ti) = \text{argch} \left(1 + \frac{a^2 + (b-t)^2}{2bt} \right).$$

Un calcul montre que la fonction $t \rightarrow \frac{a^2 + (b-t)^2}{2bt}$ atteint son minimum en $t = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $\pi_D x = i\sqrt{a^2 + b^2}$. La géodésique joignant x à sa projection est le demi-cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, qui est bien orthogonal à D . \square

Corollaire 8.9. Si F est un hyperplan de \mathbb{H}_n et x un élément de \mathbb{H}_n , alors il existe un unique point $\pi_F x \in F$ tel que

$$d(x, \pi_F x) = \inf\{d(x, z) ; z \in F\} = d(x, F).$$

De plus, si $x \notin F$, alors la géodésique passant par x et $\pi_F x$ est orthogonale à F .

Preuve. Par compacité, il y a au moins un point qui réalise le minimum de la distance. Si deux points distincts $y, z \in F$ réalisent ce minimum, alors ces deux points réalisent aussi le minimum de la distance de x à D , où D est la géodésique passant par y et z , puisque $D \subset F$. Ceci est en contradiction avec le lemme 8.8. Ce lemme entraîne aussi que la géodésique joignant x à $\pi_F x$ est orthogonale à toutes les droites passant par $\pi_F x$ et incluses dans F , donc orthogonale à F . \square

8.1.3 Isométries de \mathbb{H}_3 .

Le lemme suivant justifie l'existence de l'angle et de l'axe d'une isométrie positive de \mathbb{H}_3 ayant des points fixes.

Lemme 8.10. *Soit $f \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$. Supposons $\text{Fix } f \neq \emptyset$ et $f \neq \text{id}$.*

- a. *Alors $\text{Fix } f$ est une droite hyperbolique.*
- b. *Il existe un angle θ tel que pour tout $x \in \text{Fix } f$, la différentielle $df(x)$ est une rotation d'angle $\pm\theta$ et d'axe la tangente affine à $\text{Fix } f$ en x .*

Preuve. a. Soit $x \in \text{Fix } f$. La différentielle $df(x)$ est une isométrie positive de \mathbb{R}^3 , donc une rotation qui admet un vecteur \vec{u} fixe. Considérons la géodésique D passant par x et tangente à \vec{u} . Elle est stable par f , et f a un point fixe appartenant à D , donc $D \subset \text{Fix } f$. Si $\text{Fix } f$ contient strictement D alors $\text{Fix } f$ contient un plan hyperbolique. La différentielle de f en un point de ce plan est une rotation qui admet un plan fixe; c'est donc l'identité. On en déduit que f est égale à l'identité contrairement à l'hypothèse, donc $\text{Fix } f = D$.

b. En conjuguant par une isométrie, on peut se ramener au cas où D est une droite verticale. D'après le corollaire 8.3, f est la restriction d'une similitude. Comme il y a une demi-droite de points fixes, f est la restriction d'une rotation r d'axe D . La différentielle de f le long de cet axe est donc toujours égale à \vec{r} ou à sa réciproque. \square

Avec un raisonnement analogue on prouve le lemme suivant.

Lemme 8.11. *Soit $f \in \text{Isom}^- \mathbb{H}_3$. Si $\text{Fix } f \neq \emptyset$, alors $\text{Fix } f$ est un plan hyperbolique et f est la réflexion par rapport à ce plan.*

Nous terminons cet exposé sur les isométries de \mathbb{H}_3 avec l'énoncé suivant.

Lemme 8.12. *Soit $f \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ d'axe une droite D . Soit θ l'angle de f . Soit P_1 et P_2 deux plans hyperboliques d'intersection D et soit σ_{P_1} et σ_{P_2} les réflexions par rapport aux plans P_1 et P_2 . Notons ∂P_1 et ∂P_2 les cercles ou les droites déterminés par ces plans sur $\partial \mathbb{H}_3$. Si l'angle $\angle(\partial P_1, \partial P_2) = \pm \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$ alors $f = \sigma_{P_2} \sigma_{P_1}$ ou $\sigma_{P_1} \sigma_{P_2}$.*

Preuve. Grâce à une conjugaison on peut supposer que D est une demi-droite verticale et P_1 et P_2 des plans verticaux. Dans ce cas f , σ_{P_1} et σ_{P_2} sont aussi des similitudes et donc des isométries de \mathbb{R}^3 . Comme la relation sur les angles reste vraie au signe près, on a $f = \sigma_{P_2} \sigma_{P_1}$ ou $\sigma_{P_1} \sigma_{P_2}$. \square

8.1.4 Isométries de \mathbb{H}_2 .

Le plan hyperbolique \mathbb{H}_2 est identifié au demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z > 0\}$. Avec cette identification, d'après le théorème 8.2, les isométries positives de \mathbb{H}_2 sont les transformations conformes du demi-plan supérieur, c'est-à-dire les applications $h : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2$ de la forme

$$h(z) = h_{a,b,c,d}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Les isométries négatives sont obtenues en composant les applications précédentes avec l'application $z \rightarrow -\bar{z}$.

Lemme 8.13. *Si $x, y, x', y' \in \mathbb{H}_2$ sont tels que $d(x, y) = d(x', y')$, alors il existe $f \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ tel que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$.*

Preuve. Il suffit de prouver le lemme dans le cas où $x' = i$ et $y' = it$ avec $t > 1$. L'homographie $h \in \text{Isom}^+ H_2$ définie par $h(z) = \frac{1}{\text{Im } x}(z - \text{Re } x)$ envoie x sur i . Soit \vec{u} le vecteur unitaire tangent en x à la géodésique joignant x à y . En composant avec une homographie de la forme $r(z) = \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}$ qui fixe i on peut supposer que la différentielle de rh en x envoie \vec{u} sur i . Le segment géodésique joignant x à y est envoyé par rh sur un segment géodésique de même longueur partant de i avec vitesse initiale i , donc inclus dans l'axe des imaginaires purs. Par conséquent $rh(y) = it$, où t est l'unique réel > 1 tel que $d(i, it) = d(x, y) = d(x', y')$, donc $rh(y) = y'$. \square

Preuve du lemme 5.10.

a. La recherche des points fixes de $h = h_{a,b,c,d}$ aboutit à l'équation

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad (8)$$

dont le discriminant est $\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4 = (\text{tr } h)^2 - 4$.

Ainsi, si $\text{tr } h < 2$ alors h a un unique point fixe $a \in \mathbb{H}_2$ (l'autre racine de l'équation (8), la conjuguée, n'est pas dans \mathbb{H}_2). On dit que h est *elliptique* et que a est la *centre* de h .

Si $c = 0$ ou si $\text{tr } h = 2$ alors l'équation (8) a une unique racine dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donc h n'a pas de point fixe. On dit que h est *parabolique*. Ce cas contient le cas $c = a - d = 0$.

Si $c \neq 0$ et $\text{tr } h > 2$ alors (8) a deux racines dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc h n'a pas de point fixe. On dit que h est *hyperbolique*.

b. La condition $h_{a,b,c,d}(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = i$ donne facilement $a = d$ et $b = -c$. La condition $ad - bc$ entraîne alors qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos \frac{\theta}{2}$ et $b = \sin \frac{\theta}{2}$.

c. Si φ et $\psi \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ envoient i sur $z_0 \in \text{Fix } h$ alors, en notant $\varphi^{-1}\psi$ par r_α et $\varphi^{-1}h\varphi$ par r_θ (ce sont des éléments de $\text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ fixant i , donc des rotations), on obtient

$$\psi^{-1}f\psi = \psi^{-1}\varphi r_\theta \varphi^{-1}\psi = r_\alpha^{-1}r_\theta r_\alpha = r_\theta = \varphi^{-1}f\varphi.$$

d. La rotation de centre ix et d'angle θ est $f = \varphi r_\theta \varphi^{-1}$, où $\varphi \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}_2$ envoie i sur ix . Choisissons $\varphi = h_{a,b,c,d}$ avec $a = \sqrt{x}$, $b = c = 0$ et $d = \frac{1}{\sqrt{x}}$, i.e. dont une matrice associée est

$$M(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{x} \end{pmatrix}. \text{ Alors les matrices associées à } \varphi r_\theta \varphi^{-1} \text{ sont } \pm M \text{ avec}$$

$$M = M(x)^{-1}R\left(\frac{\theta}{2}\right)M(x) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & x \sin \frac{\theta}{2} \\ -x^{-1} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

\square

8.2 Preuve du lemme 3.4

Soit $\mathcal{T} = \{M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) ; \text{tr } M = 3\}$. Nous démontrons d'abord le résultat préliminaire suivant.

Lemme 8.14. *Soit $M \in \mathcal{T}$.*

a. On a $M^{-1} \in \mathcal{T}$.

b. (i) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $M^n = \alpha_n M - \alpha_{n-1} I$, avec $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_n = 3\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

(ii) La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans \mathbb{N} et est strictement croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq 2^n$ et $\alpha_n \geq 2^n - 1$.

c. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\text{tr } M^n \geq 2^{n+1} - 1$.

Preuve. L'item a résulte du fait que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Le point b (i) se fait par récurrence. C'est évident pour $n = 1$ et aussi pour $n = 2$ (i.e. $M^2 = 3M - I$) d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ensuite, si l'on suppose que, pour un entier $n \geq 2$, on a $M^{n-1} = \alpha_{n-1}M - \alpha_{n-2}I$, alors

$$M^n = \alpha_{n-1}M^2 - \alpha_{n-2}M = (3\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})M - \alpha_{n-1}I = \alpha_nM - \alpha_{n-1}I.$$

Pour le b (ii), une récurrence facile montre que $\alpha_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 2\alpha_n - \alpha_{n-1} \geq 2(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \geq 2^n(\alpha_1 - \alpha_0) = 2^n,$$

puis

$$\alpha_n = \alpha_n - \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

Pour le point c, compte tenu de ce qui précède, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\text{tr } M^n = \text{tr}(\alpha_n M - \alpha_{n-1} I) = 3\alpha_n - 2\alpha_{n-1} = \alpha_n + 2(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \geq 2^{n+1} - 1.$$

□

Soit G_0 le sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B (ainsi que leurs inverses A^{-1} et B^{-1}) sont des éléments de \mathcal{T} . Nous allons montrer que toute matrice $M \in G_0 \setminus \{I\}$ a une trace différente de 2, ce qui est équivalent à dire que 1 n'est pas valeur propre de M (puisque $\det M = 1$), ou encore que $M - I$ est inversible.

Nous noterons $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ la fonction *signe*, c'est-à-dire telle que $\varepsilon(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\varepsilon(x) = -1$ si $x < 0$.

Nous utiliserons aussi la notation \gg pour désigner l'ordre *produit* sur $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$: nous écrivons $X \gg Y$ si $x_{ij} \geq y_{ij}$ pour tous $i, j \in \{1, 2\}$. C'est une relation d'ordre partiel, compatible avec l'addition et la multiplication. En particulier, pour $X, Y, X', Y' \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, on a

$$X \gg Y \gg 0 \quad \text{et} \quad X' \gg Y' \gg 0 \implies XX' \gg YY'.$$

On a aussi $X \gg Y \implies \text{tr } X \geq \text{tr } Y$.

Ce qui suit est inspiré de [16], VIII 26, pp.158–162, et prouve le lemme 3.4.

Lemme 8.15. *Pour $k, l \in \mathbb{Z}^*$, on a*

$$\varepsilon(kl)A^k B^l \gg \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Preuve. Notons tout d'abord que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

et que

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -19 & -4 \end{pmatrix} \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -8 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit ensuite $k, l \geq 1$. Avec les notations de la proposition 8.14.b, on a

$$\begin{aligned} A^k B^l &= (\alpha_k A - \alpha_{k-1} I)(\alpha_l B - \alpha_{l-1} I) \\ &= \alpha_k \alpha_l AB - \alpha_k \alpha_{l-1} A - \alpha_{k-1} \alpha_l B + \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} I \\ &= \begin{pmatrix} 5\alpha_k \alpha_l + \alpha_{k-1} \alpha_l + \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} & 4\alpha_k \alpha_l - \alpha_k \alpha_{l-1} + \alpha_{k-1} \alpha_l \\ 16\alpha_k \alpha_l + \alpha_k \alpha_{l-1} - 5\alpha_{k-1} \alpha_l & 13\alpha_k \alpha_l - 3\alpha_k \alpha_{l-1} - 4\alpha_{k-1} \alpha_l + \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque la suite (α_n) est strictement croissante et que $\alpha_0 = 0$, on obtient

$$A^k B^l \gg \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

De la même façon, toujours pour $k, l \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} A^k B^{-l} &= \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} - 4\alpha_{k-1} \alpha_l - 5\alpha_k \alpha_l & -\alpha_k \alpha_{l-1} - \alpha_{k-1} \alpha_l - \alpha_k \alpha_l \\ \alpha_k \alpha_{l-1} + 5\alpha_{k-1} \alpha_l - 19\alpha_k \alpha_l & \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} - 3\alpha_k \alpha_{l-1} + \alpha_{k-1} \alpha_l - 4\alpha_k \alpha_l \end{pmatrix} \\ A^{-k} B^l &= \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} - 3\alpha_k \alpha_{l-1} + \alpha_{k-1} \alpha_l - 8\alpha_k \alpha_l & \alpha_k \alpha_{l-1} + \alpha_{k-1} \alpha_l - 7\alpha_k \alpha_l \\ -\alpha_k \alpha_{l-1} - 5\alpha_{k-1} \alpha_l - \alpha_k \alpha_l & \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} - 4\alpha_{k-1} \alpha_l - \alpha_k \alpha_l \end{pmatrix} \\ A^{-k} B^{-l} &= \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} - 3\alpha_k \alpha_{l-1} - 4\alpha_{k-1} \alpha_l + 17\alpha_k \alpha_l & \alpha_k \alpha_{l-1} - \alpha_{k-1} \alpha_l + 4\alpha_k \alpha_l \\ -\alpha_k \alpha_{l-1} + 5\alpha_{k-1} \alpha_l + 4\alpha_k \alpha_l & \alpha_{k-1} \alpha_{l-1} + \alpha_{k-1} \alpha_l + \alpha_k \alpha_l \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'on tire les inégalités

$$-A^k B^{-l} \gg \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad -A^{-k} B^l \gg \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-k} B^{-l} \gg \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci et (10) donnent le résultat souhaité. \square

Lemme 8.16. *Soit un entier $m \geq 1$ et des entiers relatifs $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_m$, tous non nuls, sauf éventuellement k_1 et l_m . Alors la matrice $M = A^{k_1} B^{l_1} \dots A^{k_m} B^{l_m}$ vérifie $|\text{tr } M| \geq 3$.*

Preuve. Si $m = 1$, alors $(k_1, l_1) \neq (0, 0)$, et le résultat découle de la Proposition 8.14.c si $k_1 l_1 = 0$, et de (9) si k_1 et l_1 sont tous les deux différents de 0, puisqu'alors

$$|\text{tr}(A^{k_1} B^{l_1})| = \varepsilon(k_1 l_1) \text{tr}(A^{k_1} B^{l_1}) \geq 6.$$

Supposons dorénavant que $m \geq 2$.

▷ Si k_1 et l_m sont non nuls, alors

$$|\text{tr } M| = \text{tr}(\varepsilon(k_1 l_1) A^{k_1} B^{l_1} \times \dots \times \varepsilon(k_m l_m) A^{k_m} B^{l_m}) \geq \text{tr} \begin{pmatrix} 5^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^m + 1 \geq 3.$$

▷ Si $k_1 = l_m = 0$, alors

$$\text{tr } M = \text{tr}(B^{l_1} A^{k_2} B^{l_2} \dots A^{k_m}) = \text{tr}(A^{k_2} B^{l_2} \dots A^{k_m} B^{l_1})$$

et on est ramené au cas précédent.

▷ Si $k_1 = 0$ et $s_m \neq 0$, alors

$$\operatorname{tr} M = \operatorname{tr}(B^{l_1} A^{k_2} B^{l_2} \dots A^{k_m} B^{l_m}) = \operatorname{tr}(A^{k_2} B^{l_2} \dots A^{k_m} B^{l_m+l_1}).$$

Si $l_m + l_1 \neq 0$, on est ramené à l'un des cas précédents (selon que $m = 2$ ou $m > 2$). Si $l_m + l_1 = 0$, alors

$$\operatorname{tr} M = \operatorname{tr}(A^{k_2} B^{l_2} \dots A^{k_m}) = \operatorname{tr}(A^{k_2+k_m} B^{l_2} \dots A^{k_{m-1}} B^{k_{m-1}})$$

et on continue jusqu'à se ramener à un cas déjà considéré.

▷ Si $k_1 \neq 0$ et $s_m = 0$, alors

$$\operatorname{tr} M = \operatorname{tr}(A^{k_1} B^{l_1} \dots A^{k_m}) = \operatorname{tr}(A^{k_1+k_m} B^{l_1} \dots A^{k_{m-1}} B^{k_{m-1}})$$

et on procède comme ci-dessus. □

8.3 Preuve du lemme 5.5

Soit w un mot non trivial de $G_0 = \langle \sigma, \tau \rangle$ de longueur $\ell \geq 1$, i.e. un élément $w = a_1 \dots a_\ell$, avec $a_i \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ et $a_i a_{i+1} \neq \mathbf{id}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Le mot w est de l'une des quatre formes $\sigma^\pm \dots \tau^\pm$, $\tau^\pm \dots \sigma^\pm$, $\sigma^\pm \dots \sigma^\pm$ ou $\tau^\pm \dots \tau^\pm$. La deuxième forme se ramène à la première en considérant w^{-1} au lieu de w , et les deux dernières formes se ramènent à l'une des deux premières par conjugaison, sauf si w est simplement une puissance de σ ou de τ , ou un conjugué d'une telle puissance, auquel cas le résultat provient de $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$. Il nous suffit donc de montrer que 1 n'est pas valeur propre de w lorsque $w = \sigma^\pm \dots \tau^\pm$. Une récurrence simple montre que w a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} P & -Q & -R & -S \\ Q & P & -S & R \\ R & S & P & -Q \\ S & -R & Q & P \end{pmatrix}$$

où P, R sont des polynômes en $\cos \theta$ à coefficients entiers et Q, S des produits de tels polynômes avec $\sin \theta$. Comme w est orthogonal, on a $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = 1$. Un calcul simple montre alors que le polynôme caractéristique de w est $\lambda^4 - 4P\lambda^3 + (4P^2 + 2)\lambda^2 - 4P\lambda + 1$.

Nous montrons ci-dessous que le degré de P est égal à ℓ , la longueur de w . Si 1 était valeur propre de w , on aurait $4P^2 - 8P + 4 = 0$, une contradiction puisque $\cos \theta$ est transcendant.

Dans la suite, la notation \asymp indique que seul le terme de plus haut degré en $\cos \theta$ a été retenu. En utilisant $\cos m\theta \asymp 2^{m-1} \cos^m \theta$ et $\sin m\theta \asymp 2^{m-1} \cos^{m-1} \theta \sin \theta$ et en notant $\cos \theta$ par c et $\sin \theta$ par s , on obtient, avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\delta = \pm 1$

$$\sigma^{\varepsilon m} \asymp 2^{m-1} c^{m-1} \begin{pmatrix} c & -\varepsilon s & 0 & 0 \\ \varepsilon s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -\varepsilon s \\ 0 & 0 & \varepsilon s & c \end{pmatrix} \quad \tau^{\delta k} \asymp 2^{k-1} c^{k-1} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -\delta s \\ 0 & c & -\delta s & 0 \\ 0 & \delta s & c & 0 \\ \delta s & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

En multipliant les deux et en utilisant $s^2 = 1 - c^2 \asymp -c^2$, on obtient

$$\sigma^{\varepsilon m} \tau^{\delta k} \asymp A(m, k, \varepsilon, \delta) = 2^{m+k-2} c^{m+k-1} \begin{pmatrix} c & -\varepsilon s & -\varepsilon \delta c & -\delta s \\ \varepsilon s & c & -\delta s & \varepsilon \delta c \\ \varepsilon \delta c & \delta s & c & -\varepsilon s \\ \delta s & -\varepsilon \delta c & \varepsilon s & c \end{pmatrix}.$$

Notons $w = \sigma^{\varepsilon_1 m_1} \tau^{\delta_1 k_1} \dots \sigma^{\varepsilon_n m_n} \tau^{\delta_n k_n}$ avec $\varepsilon_i, \delta_i = \pm 1$ et $m_i, k_i \geq 1$; ainsi la longueur de w est $\ell = m_1 + k_1 + \dots + m_n + k_n$.

Nous affirmons que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\xi_n, \mu_n, \zeta_n, \nu_n \in \{-1, 1\}$ tels que $\xi_n \zeta_n = \mu_n \nu_n$ et

$$w \simeq A_n = 2^{\ell-n-1} c^{\ell-1} \begin{pmatrix} \xi_n c & -\mu_n s & -\zeta_n c & -\nu_n s \\ \mu_n s & \xi_n c & -\nu_n s & \zeta_n c \\ \zeta_n c & \nu_n s & \xi_n c & -\mu_n s \\ \nu_n s & -\zeta_n c & \mu_n s & \xi_n c \end{pmatrix}.$$

Par récurrence sur n , montrons que c'est bien le cas. Pour $n = 1$, cela résulte du fait que $A_1 = A(m_1, k_1, \varepsilon_1, \delta_1)$ et que l'on a $\xi_1 = 1$, $\mu_1 = \varepsilon_1$, $\zeta_1 = \varepsilon_1 \delta_1$ et $\nu_1 = \delta_1$.

Supposons ensuite que la propriété annoncée est vraie pour un entier $n \geq 1$ et vérifions-la pour $n + 1$. On voit que $A_n A(m_{n+1}, k_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, \delta_{n+1}) \simeq A_{n+1}$ avec

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \frac{1}{2}(\xi_n + \varepsilon_{n+1} \mu_n - \varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} \zeta_n + \delta_{n+1} \nu_n) \\ \mu_{n+1} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{n+1} \xi_n + \mu_n + \delta_{n+1} \zeta_n - \varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} \nu_n) \\ \zeta_{n+1} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} \xi_n + \delta_{n+1} \mu_n + \zeta_n - \varepsilon_{n+1} \nu_n) \\ \nu_{n+1} &= \frac{1}{2}(\delta_{n+1} \xi_n + \varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} \mu_n - \varepsilon_{n+1} \zeta_n + \nu_n). \end{aligned}$$

On montre facilement, à partir de ces égalités, que $\xi_{n+1} \zeta_{n+1} = \mu_{n+1} \nu_{n+1}$. Il reste à vérifier que $\xi_{n+1}, \mu_{n+1}, \zeta_{n+1}, \nu_{n+1}$ sont égaux à ± 1 . En remarquant que $\zeta_n = \xi_n \mu_n \nu_n$, on obtient

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2}(\xi_n + \varepsilon_{n+1} \mu_n + \delta_{n+1} \nu_n - \varepsilon_{n+1} \delta_{n+1} \xi_n \mu_n \nu_n) = \pm 1$$

puisque, d'une manière générale, si a, b, c sont égaux à ± 1 , alors $a + b + c - abc = \pm 2$. De la même façon, on montre que μ_{n+1}, ζ_{n+1} et ν_{n+1} sont égaux à ± 1 , ce qui achève la preuve.

8.4 Solutions des exercices

Exercice 7.1. D'après le corollaire 4.8, il suffit de montrer que $\text{Isom}^+ \mathbb{R}^2$ est globalisant. Soit $G \leq \text{Isom}^+ \mathbb{R}^2$ un GAF. Si $G = \{\mathbf{id}\}$, alors G est trivialement un GAG. Sinon, soit $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Alors f est une rotation de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et d'angle non nul. Soit $\overline{g} \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ arbitraire; g est une rotation de centre $b \in \mathbb{R}^2$ et d'angle non nul. De plus on a $\overline{[f, g]} = \mathbf{id}$ donc $[f, g]$ est la translation de vecteur $\overline{cf(c)}$, avec $c = g(a)$. Comme G est un GAF, $\text{Fix}[f, g]$ est non vide, donc $f(c) = c$, donc $c = a$, donc $g(a) = a$, donc $a = b$. Ainsi les éléments de $G \setminus \{\mathbf{id}\}$ sont tous des rotations de centre a , donc $\text{Fix } G = \{a\} \neq \emptyset$, donc G est un GAG.

Exercice 7.2. Soit $G = \langle g \rangle$, soit X un ensemble arbitraire et soit $\rho : G \rightarrow \text{Bij } X$ un morphisme. On a alors $\rho(G) = \langle \rho(g) \rangle$. Soit $H \leq \rho(G)$. Alors H est monogène, engendré par un certain h , donc $\text{Fix } H = \text{Fix } h$. Si H est un GAF, alors $\text{Fix } h \neq \emptyset$, donc $\text{Fix } H$ aussi, donc H est un GAG. Réciproquement, soit G un groupe non monogène. Faisons-le agir par multiplication à gauche sur l'ensemble $X = \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset, G\}$ des parties non triviales de G : soit $\rho : G \rightarrow \text{Bij } X$ définie par $\rho(g)(A) = gA = \{ga; a \in A\}$. Pour tout $g \in G$ la partie $\langle g \rangle$ est fixée par $\rho(g)$, et elle est non triviale puisque G n'est pas monogène, donc $\rho(G)$ lui-même est un GAF, mais $\rho(G)$ n'a pas de point fixe global: étant donnée $A \in X$, soit $a \in A$ et $b \notin A$. Puisque $b = (ba^{-1})a$, on a $b \in \rho(ba^{-1})(A)$ donc $\rho(ba^{-1})(A) \neq A$. Ainsi (X, G) est excentrique, donc non globalisant.

Exercice 7.3. Notons $\rho(\mathbb{Q}) = \{g_1, \dots, g_n\}$. Soit $r_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$ tel que $\rho(r_i) = g_i$, avec p_i et q_i premiers entre eux, et soit M le ppcm des q_i . Alors $\rho(\mathbb{Q})$ est cyclique, engendré par $\rho(\frac{1}{M})$, donc globalisant d'après l'exercice 7.2.

Exercice 7.4. En prenant $z = x$ puis $z = y$ dans (1), on obtient $d(x, m)$ et $d(y, m) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$. L'inégalité triangulaire $d(x, y) \leq d(x, m) + d(m, y)$ donne les égalités. Si m' est un autre point

vérifiant (1) alors, en appliquant (1) avec $z = m'$ et en utilisant $d(x, m') = d(y, m') = \frac{1}{2}d(x, y)$, on obtient $d(m, m') \leq 0$, d'où $m = m'$.

Exercice 7.5. *Théorème de M. Frechet, P. Jordan and J. von Neuman [9, 11].*

- a. Dans un espace vectoriel normé, en tenant compte du fait que $m = \frac{1}{2}(x + y)$, l'inégalité de la médiane (1) pour $z = 0$ s'écrit $\|x + y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$. En l'écrivant pour $x = \frac{1}{2}(a + b)$ et $y = \frac{1}{2}(a - b)$, on obtient l'inégalité opposée.
- b. Posons $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. Il suffit de vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive. On a facilement $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$, $\langle x | x \rangle \geq 0$ et $(\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$. Il reste à montrer $\langle x + x' | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x' | y \rangle$ et $\langle \lambda x | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$. On a déjà $\langle 0 | y \rangle = 0$. En utilisant (5), on a :

$$\begin{aligned} \langle x + x' | y \rangle + \langle x - x' | y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x + x' + y\|^2 + \|x - x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 - \|x - x' - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x'\|^2 - \|x - y\|^2 - \|x'\|^2) \\ &= 2\langle x | y \rangle. \end{aligned}$$

Pour $x' = x$, on obtient $\langle 2x | y \rangle = 2\langle x | y \rangle$.

Pour $x = \frac{1}{2}(a + b)$ et $x' = \frac{1}{2}(a - b)$, on en déduit $\langle a | y \rangle + \langle b | y \rangle = \langle a + b | y \rangle$. On en déduit $\langle kx | y \rangle = k\langle x | y \rangle$, d'abord pour k entier, puis k rationnel, puis tout k réel par continuité de la norme.

Exercice 7.6. Soit xyz un triangle hyperbolique et m le milieu géodésique de xy . Soit $\alpha = \angle zmx$ et $\beta = \angle zmy \in]0, \frac{\pi}{2}[$; on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos \alpha + \cos \beta = 0$. Pour alléger l'écriture, on note ab la distance géodésique entre deux points a et b . Écrivons l'inégalité du cosinus pour le triangle myz : $mz^2 + my^2 - 2mz.my \cos \alpha \leq yz^2$. En utilisant $my = \frac{1}{2}xy$, on obtient $mz^2 + \frac{1}{4}xy^2 - mz.xy \cos \alpha \leq yz^2$. De même on a $mz^2 + \frac{1}{4}xy^2 - mz.xy \cos \beta \leq xz^2$. En ajoutant ces deux inégalités, on obtient $2mz^2 + \frac{1}{2}xy^2 \leq xz^2 + yz^2$, qui correspond bien à l'inégalité de la médiane.

Exercice 7.7. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{-x+3}$ et $g : x \mapsto \frac{-x-1}{5x+4}$. f et g ont des points fixes distincts. Soit $k_1, l_1, \dots, k_m, l_m$ des entiers relatifs tous non nuls sauf éventuellement k_1 et l_m . Le produit $h = f^{k_1}g^{l_1} \dots f^{k_m}g^{l_m}$ est de la forme $h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc = 1$. La recherche d'un point fixe pour h aboutit à l'équation $cx^2 + (d - a)x - b = 0$, de discriminant $\Delta = (a + d)^2 - 4$. D'après le lemme 8.16, on a $|a + d| \geq 3$, donc h a toujours un point fixe. Ainsi le groupe $\langle f, g \rangle$ est excentrique.

Exercice 7.8. Soit G un GAF de $\text{Isom } \mathbb{H}_2$. Identifions \mathbb{H}_3 à $\mathbb{R} \times \mathbb{H}_2$. Pour chaque $g \in G$, soit $\varphi(g) : \mathbb{H}_3 \rightarrow \mathbb{H}_3$, $(x, y) \mapsto (x, g(y))$. On vérifie que $\varphi(g) \in \text{Isom } \mathbb{H}_3$ et que $\text{Fix } \varphi(g) = \mathbb{R} \times \text{Fix } g \neq \emptyset$. Ainsi $H := \varphi(G)$ est un GAF de $\text{Isom } \mathbb{H}_3$, donc un GAG puisque $\text{Isom } \mathbb{H}_3$ est globalisant, et $\text{Fix } H$ est de la forme $\mathbb{R} \times A$. On obtient $\text{Fix } G = A \neq \emptyset$, donc G est un GAG de $\text{Isom } \mathbb{H}_2$.

Exercice 7.9. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ conservant la distance euclidienne. La formule

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

montre que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ conserve le produit scalaire : on a $\langle g(x) | g(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|g(x + \lambda y) - g(x) - \lambda g(y)\|^2 &= \|g(x + \lambda y)\|^2 + \|g(x)\|^2 + \lambda^2 \|g(y)\|^2 - \\ &\quad 2\langle g(x + \lambda y) | g(x) \rangle - 2\lambda \langle g(x + \lambda y) | g(y) \rangle + 2\lambda \langle g(x) | g(y) \rangle \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 - \\ &\quad 2\langle x + \lambda y | x \rangle - 2\lambda \langle x + \lambda y | y \rangle + 2\lambda \langle x | y \rangle \\ &= \|x + \lambda y - x - \lambda y\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, g est linéaire, donc f est affine. Comme g conserve la distance euclidienne, elle est injective; comme nous sommes en dimension finie, elle est aussi surjective. Il en est de même de f .

Exercice 7.10. Soit E un e.v.n. et $f : E \rightarrow E$ continue telle que

$$\forall a, b \in E, \quad f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)). \quad (11)$$

Soit $g : E \rightarrow E$, $x \mapsto f(x) - f(0)$. Alors g est continue et satisfait (11) et $g(0) = 0$. On a $g(x) = g\left(\frac{1}{2}(0+2x)\right) = \frac{1}{2}g(2x)$, ce qui permet d'écrire (11) sous la forme

$$\forall a, b \in E, \quad g(a+b) = g(a) + g(b).$$

On en déduit que $g(ax) = ag(x)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$, puis pour tout $a \in \mathbb{Q}$, puis pour tout $a \in \mathbb{R}$ par continuité de g et densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , donc g est linéaire, donc f est affine.

Exercice 7.11. *Théorème de Mazur-Ulam* [22].

a. (i) Soit $g \in W_{a,b}$. On a

$$\|g(m) - m\| \leq \|g(m) - g(a)\| + \|a - m\| = 2\|a - m\| = \|a - b\|.$$

D'où : $\lambda \leq \|a - b\|$.

(ii) Soit $g \in W_{a,b}$. Puisque s_m est une isométrie qui fixe m , on a

$$\begin{aligned} \|g^*(m) - m\| &= \|s_m g^{-1} s_m g(m) - m\| = \|g^{-1} s_m g(m) - m\| \\ &= \|s_m(g(m)) - g(m)\| = 2\|g(m) - m\|. \end{aligned}$$

(iii) D'après les questions précédentes, d'une part λ est fini et, d'autre part, pour tout $g \in W_{a,b}$, puisque s_m échange a et b , on a $g^* \in W_{a,b}$, donc $2\|g(m) - m\| \leq \lambda$, donc $2\lambda \leq \lambda$, donc $\lambda = 0$. Par conséquent, on a $g(m) = m$ pour tout $g \in W_{a,b}$.

b. (i) On a $h(a) = s_m f^{-1} s_{m'}(f(a)) = s_m f^{-1}(f(b)) = s_m(b) = a$. On montre de même que $h(b) = b$, d'où $h \in W_{a,b}$ et, d'après l'item a, on a $h(m) = m$.

Par suite, $f^{-1} s_{m'} f(m) = s_m(m) = m$, puis $s_{m'}(f(m)) = f(m)$. Comme $s_{m'}$ a m' comme unique point fixe, on a $f(m) = m'$.

(ii) D'après la question précédente, pour tout a, b dans E , on a : $f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$. Puisque f est continue, on en déduit que f est affine d'après l'exercice 7.10.

Exercice 7.12. *Théorème de Kakutani en dimension finie* [1].

a. On vérifie facilement que $\| \cdot \|$ est une norme. Pour montrer qu'elle est strictement convexe sur E , soit $x, y \in E$ avec $x \neq \vec{0}$ et $y \notin \mathbb{R}^+x$. On a alors, pour tout $g \in G$, $g(x) \neq \vec{0}$ et $g(y) \notin \mathbb{R}^+g(x)$. Posons $\varphi(g) = \|g(x)\|_2 + \|g(y)\|_2 - \|g(x) + g(y)\|_2$. La fonction φ ainsi définie est continue et à valeurs strictement positives sur G qui est compact, donc minorée par un certain $\delta > 0$. On a ainsi, pour tout $g \in G$, $\|g(x) + g(y)\|_2 \leq \|g(x)\|_2 + \|g(y)\|_2 - \delta \leq \|x\| + \|y\| - \delta$ d'où, en prenant le sup : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \delta$.

Enfin on a $\|g(x) - g(y)\| = \sup_{h \in G} \|hg(x) - hg(y)\|_2 = \sup_{k \in G} \|k(x) - k(y)\|_2 = \|x - y\|$ puisque G est un groupe (on a posé $k = hg$), ce qui montre que tout élément de G est une isométrie.

b. Comme K est convexe, la moyenne de Cesàro $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ est dans K . Par compacité, il existe une suite extraite $(\sigma_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $a \in K$. On a $f(\sigma_{n_k}) = \frac{1}{n_k}(x_2 + \dots + x_{n_k+1}) = \sigma_{n_k} - \frac{1}{n_k}(x_{n_k+1} - x_1)$, donc la suite $(f(\sigma_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers a . Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est continu, donc $(f(\sigma_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$, d'où on tire $f(a) = a$.

c. Pour $g \in G$, on note $V_g = \{x \in K ; g(x) \neq x\}$ et on suppose par l'absurde que, pour tout $x \in K$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$.

(i) Puisqu'une isométrie est continue, chaque V_g est un ouvert de K . Par hypothèse, K est l'union des V_g , $g \in G$, donc par compacité il existe $g_1, \dots, g_N \in G$ tels que $K = V_{g_1} \cup \dots \cup V_{g_N}$.

(ii) Soit $f = \frac{1}{N}(g_1 + \dots + g_N)$. Par convexité, on a $f(K) \subseteq K$, donc il existe $a \in K$ tel que $f(a) = a$ d'après le point b.

(iii) On a $\|Na\| = \|g_1(a) + \dots + g_N(a)\| \leq \|g_1(a)\| + \dots + \|g_N(a)\| = N\|a\|$ (puisque les g_k sont des isométries), donc l'inégalité est une égalité, donc les $g_k(a)$ sont positivement colinéaires par stricte convexité de la norme, donc tous égaux, donc tous égaux à a . Ainsi le point a ne serait dans aucun des V_{g_k} , une contradiction.

Exercice 7.13. Isométries de la sphère.

a. Pour tous $x, y \in \mathbb{S}_n$, on a $\langle f(x) | f(y) \rangle = \cos(d(f(x), f(y))) = \cos(d(x, y)) = \langle x | y \rangle$.

b. Pour x ou $y = 0$, on a $\langle \tilde{f}(x) | \tilde{f}(y) \rangle = 0 = \langle x | y \rangle$. Pour x et $y \neq 0$, on a

$$\langle \tilde{f}(x) | \tilde{f}(y) \rangle = \|x\| \|y\| \langle f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) | f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \rangle = \|x\| \|y\| \langle \frac{x}{\|x\|} | \frac{y}{\|y\|} \rangle = \langle x | y \rangle.$$

c. On a d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|\tilde{f}(x)\|^2 = \langle \tilde{f}(x) | \tilde{f}(x) \rangle = \langle x | x \rangle = \|x\|^2$, puis pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|^2 = \|\tilde{f}(x)\|^2 + \|\tilde{f}(y)\|^2 - 2\langle \tilde{f}(x) | \tilde{f}(y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle = \|x - y\|^2.$$

D'après l'exercice 7.9, \tilde{f} est aussi surjective — donc une isométrie — et affine. Comme $\tilde{f}(0) = 0$, \tilde{f} est linéaire; elle est donc déterminée par ses valeurs sur un ensemble qui engendre \mathbb{R}^{n+1} , par exemple \mathbb{S}_n , d'où l'unicité.

Exercice 7.14. Prolongement d'une isométrie.

a. On a $\langle f(a_i) - f(a_0) | f(a_j) - f(a_0) \rangle = \|f(a_i) - f(a_0)\|^2 + \|f(a_j) - f(a_0)\|^2 - \frac{1}{2}\|f(a_i) - f(a_j)\|^2 = \|a_i - a_0\|^2 + \|a_j - a_0\|^2 - \frac{1}{2}\|a_i - a_j\|^2 = \langle a_i - a_0 | a_j - a_0 \rangle$.

b. On a

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|^2 &= \left\| \sum_{i=0}^n (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) f(a_i) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) (f(a_i) - f(a_0)) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) (\lambda_j(x) - \lambda_j(y)) \langle f(a_i) - f(a_0) | f(a_j) - f(a_0) \rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) (\lambda_j(x) - \lambda_j(y)) \langle a_i - a_0 | a_j - a_0 \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n (\lambda_i(x) - \lambda_i(y)) (a_i - a_0) \right\|^2 = \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 7.9, \tilde{f} est aussi surjective, donc \tilde{f} est une isométrie.

c. On a bien sûr $\tilde{f}(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, par unicité des coordonnées barycentriques. Soit $a \in A$. D'après ce qui précède, on a $\|\tilde{f}(a) - f(a_i)\| = \|a - a_i\|$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, donc $\|\tilde{f}(a) - f(a_i)\| = \|f(a) - f(a_i)\|$ puisque f est une isométrie de A . Ainsi $f(a_i) \in \text{Med}(f(a), \tilde{f}(a))$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, or $\text{Med}(f(a), \tilde{f}(a))$ est un sous-espace affine, donc $\tilde{f}(a) = \sum_{i=0}^n \lambda_i(a) f(a_i) \in \text{Med}(f(a), \tilde{f}(a))$, donc $\tilde{f}(a) = f(a)$, donc \tilde{f} est bien un prolongement de f . Comme les isométries d'un espace affine sont affines d'après l'exercice 7.9, \tilde{f} est affine, et c'est la seule application affine de $\text{Aff}(a_0, \dots, a_n)$ prenant les valeurs $f(a_i)$ aux points a_i , d'où l'unicité.

Exercice 7.15. *Le groupe alterné \mathcal{A}_7 n'est pas globalisant.*

Le groupe \mathcal{A}_4 possède un sous-groupe isomorphe au groupe de Klein,

$$K = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

tel que :

▷ Le quotient \mathcal{A}_4/K est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

▷ Tout élément de $\mathcal{A}_4 \setminus K$ a au moins un point fixe (ce sont tous les cycles d'ordre 3).

Un sous-groupe excentrique $G = \langle f, g \rangle$ de \mathcal{A}_7 est alors obtenu en prenant deux permutations paires agissant séparément sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et sur $\{5, 6, 7\}$: pour f un élément de K sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et l'identité sur $\{5, 6, 7\}$, par exemple $f = (12)(34)$, et pour g un élément de $\mathcal{A}_4 \setminus K$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et un élément de \mathcal{A}_3 sans point fixe sur $\{5, 6, 7\}$, par exemple $g = (123)(567)$. On obtient pour G un groupe à 12 éléments, produit semi-direct de K et de \mathcal{A}_3 .

Les éléments de G dont la restriction à $\{1, 2, 3, 4\}$ n'a pas de point fixe, i.e. est dans K , sont l'identité sur $\{5, 6, 7\}$, donc tous les éléments de G ont bien un point fixe, mais f et g n'ont pas de point fixe commun.

Exercice 7.16. *L'action du groupe $\text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ sur $X = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$ n'est pas globalisante.*

Identifions X avec $\{1, \dots, 7\}$ par

$$e_i \rightarrow i, e_{123} \rightarrow 4, e_{23} \rightarrow 5, e_{13} \rightarrow 6, e_{12} \rightarrow 7.$$

Avec cette identification, on obtient $f = (1, 2, 3)(5, 6, 7)$ et $g = (1, 4)(6, 7)$ qui sont deux permutations paires.

Comme les éléments de G sont linéaires et que Y engendre l'espace vectoriel \mathbb{F}_2^3 , si la restriction à Y de $h \in G$ est l'identité alors h est l'identité. De plus f et g envoient Y dans Y donc l'application qui à h associe sa restriction à Y est morphisme injectif de G dans \mathcal{S}_Y .

Comme $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \emptyset$, pour vérifier que l'action de G est excentrique il suffit de vérifier que $\text{Fix } h \neq \emptyset$ pour tout h de G . Comme les éléments $h \in G$ induisent des permutations paires agissant séparément sur Y et Z , il suffit de montrer que si la restriction de h à Y est une double transposition alors sa restriction à Z est l'identité.

On constate que

$$(fg)^2 = (1, 2)(3, 4)$$

$$(gf)^2 = (1, 3)(2, 4)$$

$$(fgf)^2 = (1, 4)(2, 3)$$

ce qui montre que l'action de G est excentrique.

Références

- [1] R. Antetomaso, Un théorème de point fixe en dimension finie : application aux sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$, *R.M.S.* **2** (1993-1994) 145–146.

- [2] K. Anzai et S. Ishikawa, On common fixed points for several continuous affine mappings, *Pacific J. Math.* **72** (1977) 1–4.
- [3] M. Berger, *Géométrie*, Cedic-Nathan, Paris, 1977.
- [4] A. Borel, Free subgroups of semi-simple groups, *L'Enseignement Mathématique* **29** (1983) 151–164.
- [5] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, *Publ. Math. IHES* **41** (1972) 5–252.
- [6] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, W. R. Parry, *Flavors of Geometry*, MSRI Publications, Volume **31**, 1997.
- [7] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators, 1 : general theory*, Pure and Applied Mathematics, Academic press, London, New York, Sydney, 1957.
- [8] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford–American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, 1975.
- [9] M. Fréchet, Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, *Ann. Math.* **36** (1935) 705–718.
- [10] F.G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, *Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin (1898), 5001–5015.
- [11] P. Jordan, J. von Neuman, On inner products in linear, metric spaces, *Ann. Math.* **36** (1935) 719–723.
- [12] S. Kakutani, Two fixed-point theorems concerning bicomact convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **14** (1938) 242–245.
- [13] A. Markov, Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens, *Doklady Akad. Nauk. SSSR.* **10** (1936) 311–314.
- [14] S. Mazur, S. Ulam, Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci.* **194** (1932) 946–948.
- [15] J. W. Morgan, P. B. Shalem, Valuations, Trees and Degenerations of Hyperbolic Structures I, *Ann. Math.* **120** (1984) 401–476.
- [16] M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New-york and London, 1972.
- [17] J. G. Ratcliff, *Fundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag, 1994.
- [18] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill Inc., 2ème édition, 1991.
- [19] D. Segal, *Polycyclic groups*, Cambridge Tracts Math. 82, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [20] J.P. Serre, *Arbres, Amalgames, SL_2* , Astérisque, S.M.F., 1977.
- [21] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1988.
- [22] J. Väisälä, A proof of the Mazur-Ulam theorem, *Amer. Math. Monthly* **110-7** (2003) 633–635.
- [23] S. Wagon, *Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.