Théorème des 5 distances et longueurs des intervalles

Nicolas Chevallier

Juin 2001

Abstract

Let α and θ be in $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. By the five distance theorem, the points $\varepsilon\alpha + k\theta$, $\varepsilon = 0, 1$ and $k = 0, ..., q$, divide $\mathbb{T}^1$ into intervals having at most 5 distinct lengths. We study the lengths of theses intervals.

1 Introduction

Soit α et θ deux éléments du tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et n_1, n_2 des entiers. J.F. Geelen et R.J. Simpson ont démontré que le sous-ensemble de $\mathbb{T}^1$

$$E(n_1, n_2) = \{k_1\alpha + k_2\theta : 0 \leq k_1 < n_1,\ 0 \leq k_2 < n_2\}$$

découpe le tore en intervalles qui ont au plus $n_1 + 3$ longueurs distincts ([G,S]). Cependant, le théorème de Geelen et Simpson ne donne pas d'information sur les longueurs des intervalles. Dans la suite, nous fixons n_1 et faisons varier n_2.
Lorsque $n_1 = 1$, une description complète des longueurs est possible grâce au développement en fraction continue (cf [Ra],[Sl]). Mais, même pour $n_1 = 2$, les relations entre les longueurs ne sont pas connues. L'objectif principal de ce travail est l'étude de ces longueurs dans le cas $n_1 = 2$. Nous donnons un algorithme qui remplace le développement en fractions continues. En fait, nous retrouvons par une approche différente un algorithme de G. Didier ([Di]) et cela nous nous permet de trouver une relation entre les longueurs des intervalles de $\mathbb{T}^1\backslash E(2, n)$, qui n'était pas apparente dans l'article de G. Didier. Dans le dernier paragraphe, motivé par un problème de W.M. Schmidt ([Sch]), nous donnons quelques résultats dans le cas où n_1 est quelconque.

Convention. On suppose que $\mathbb{T}^1$ est orienté par l'ordre naturel de $\mathbb{R}$. Les intervalles $[a, b]$ ou $]a, b[$ de $\mathbb{T}^1$ sont définis par cette orientation.

Notations.

1. $[x]$ désigne la partie entière du réel x et $\{x\}$ sa partie fractionnaire.
2. long(I) désigne la longueur d'un intervalle de I de $\mathbb{T}^1$.
Soit $\alpha, \theta \in \mathbb{T}^1\backslash\{0\}$.
3. Pour $q \in \mathbb{N}$, posons

$$E_q = \{k\theta + \varepsilon\alpha : 0 \leq k \leq q,\ \varepsilon = 0 \text{ ou } 1\}.$$

4. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la symétrie s_q de $\mathbb{T}^1$ dans lui même est définie par $s_q(x) = q\theta + \alpha - x$.
5. Le successeur d'un élément x de E_q est l'unique élément y de E_q tel que l'intervalle $]x, y[$ ne contienne pas de point de E_q, on le note $y = \mathrm{suc}_q(x)$. De même, le prédécesseur d'un élément x de E_q est l'unique élément z de E_q tel que l'intervalle $]z, x[$ ne contienne pas de point de E_q, on le note $z = \mathrm{pred}_q(x)$. suc_q et pred_q sont deux applications de E_q dans lui même réciproque l'une de l'autre.
6. Notons $f_{\alpha,\theta}$ l'application $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{T}^1$ définie par $f_{\alpha,\theta}(k_1, k_2) = k_1\alpha + k_2\theta$.

Remarque importante : $s_q(E_q) = E_q$.

2 Fractions continues

Le développement en fraction continue d'un réel peut se présenter de nombreuses manières, nous allons transposer dans la suite le procédé suivant.

Soit $x \in]0,1[$. Posons $L_{1,0} = l_{1,0} = 1-x$ et $L_{2,0} = l_{2,0} = x$. Définissons les suites $(L_{i,n})$ et $(l_{i,n})$ par les relations de récurrences :

$$L_{1,n+1} = \begin{cases} L_{1,n} - [\frac{L_{1,n}}{L_{2,n}}]L_{2,n} \text{ si } L_{1,n} > L_{2,n} \\ L_{1,n} \text{ si } L_{1,n} < L_{2,n} \end{cases}$$

$$L_{2,n+1} = \begin{cases} L_{2,n} - [\frac{L_{2,n}}{L_{1,n}}]L_{1,n} \text{ si } L_{1,n} < L_{2,n} \\ L_{2,n} \text{ si } L_{1,n} > L_{2,n} \end{cases}$$

$$l_{1,n+1} = \begin{cases} l_{1,n} - l_{2,n} \text{ si } l_{1,n} > l_{2,n} \\ l_{1,n} \text{ si } l_{1,n} < l_{2,n} \end{cases}$$

$$l_{2,n+1} = \begin{cases} l_{2,n} - l_{1,n} \text{ si } l_{1,n} < l_{2,n} \\ l_{2,n} \text{ si } l_{1,n} > l_{2,n}. \end{cases}$$

Les suites $(L_{i,n})$ sont reliées a la suite des réduites $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ du développement en fraction continue de x par les relations

$$\begin{cases} L_{2,2n} = q_{2n}x - p_{2n} \\ L_{1,2n+1} = p_{2n+1} - q_{2n+1}x \end{cases}$$

valables si $x \in]0,\frac{1}{2}[$ (si $x \in]\frac{1}{2},0[$ il faut décaler les indices. Ces égalités se déduisent des relations de récurrences du développement en fraction continue). Les suites $(l_{i,n})$ correspondent à l'algorithme additif des fractions continues, elles permettent de déterminer les longueurs des intervalles des ensembles de la forme $]0,1[\backslash\{kx \bmod 1 : 0 \leq k \leq q\}$. Notre premier objectif est d'adapter les suites $l_{i,n}$ aux ensembles $\mathbb{T}^1\backslash E_q$ (section 3), puis de donner l'équivalent des suites $L_{i,n}$ (section 5).

3 Apparition d'un nouvel intervalle

Hypothèse : α et θ sont deux éléments de $\mathbb{T}^1$ tel que l'application $f_{\alpha,\theta}$ soit injective sur $\{0,1\}\times\mathbb{Z}$.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, considérons les deux intervalles voisins de 0, $[\mathrm{pred}_q(0),0]$ et $[0,\mathrm{suc}_q(0)]$, et les deux intervalles voisins de α, $[\mathrm{pred}_q(\alpha),\alpha]$ et $[\alpha,\mathrm{suc}_q(\alpha)]$. Lorsque q croît ces quatre intervalles se réduisent progressivement.

Définition 1 *Nous dirons qu'un entier $Q \geq 1$ est un* ***changement*** *si l'un au moins des quatre intervalles $[\mathrm{pred}_Q(0),0]$, $[0,\mathrm{suc}_Q(0)]$, $[\mathrm{pred}_Q(\alpha),\alpha]$ et $[\alpha,\mathrm{suc}_Q(\alpha)]$ est différent de l'un des quatre intervalles $[\mathrm{pred}_{Q-1}(0),0]$, $[0,\mathrm{suc}_{Q-1}(0)]$, $[\mathrm{pred}_{Q-1}(\alpha),\alpha]$ et $[\alpha,\mathrm{suc}_{Q-1}(\alpha)]$.*

Ordonnons par ordre croissant la suite des changements et appelons $(Q_n)_{n\geq 0}$ la suite obtenue, nous avons $Q_0 = 1$. Notons $I_{1,n} = [\mathrm{pred}_{Q_n}(0),0]$, $I_{2,n} = [0,\mathrm{suc}_{Q_n}(0)]$, $I_{3,n} = [\mathrm{pred}_{Q_n}(\alpha),\alpha]$ et $I_{4,n} = [\alpha,\mathrm{suc}_{Q_n}(\alpha)]$. L'hypothèse d'injectivité montre que $(q_{i,n},\varepsilon_{i,n})_{i=1,2,3,4}$ sont définis sans ambiguïté par

$$I_{1,n} = [q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, 0],\ I_{2,n} = [0, q_{2,n}\theta + \varepsilon_{2,n}\alpha],$$
$$I_{3,n} = [q_{3,n}\theta + \varepsilon_{3,n}\alpha, \alpha],\ I_{4,n} = [\alpha, q_{3,n}\theta + \varepsilon_{3,n}\alpha]$$

enfin, notons $l_{1,n}, l_{2,n}, l_{3,n}$ et $l_{4,n}$ leurs longueurs respectives. Nous appellerons $(q_{i,n}, l_{i,n}, \varepsilon_{i,n})_{i=1,2,3,4}$ les données au changement Q_n.

Commençons par déduire les données au changement Q_{n+1} à l'aide des données au changement Q_n.

Définition 2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i,j \in \{1,2,3,4\}$. Nous dirons que le couple (ordonné) d'intervalles $(I_{i,n}, I_{j,n})$ est compatible si les conditions suivantes sont réalisées :*
i) i et j n'ont pas la même parité (les intervalles $I_{i,n}$ et $I_{j,n}$ ne sont pas du même coté de 0 ou α),
ii) $l_{i,n} < l_{j,n}$,
iii) si $i = 1$ ou 2 alors $\varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{i,n} \in \{0,1\}$ et si $i = 3$ ou 4 alors $\varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{i,n} - 1 \in \{0,1\}$.

Théorème 1 *Soit Q_n un changement tel que $q_{1,n}$, $q_{2,n}$, $q_{3,n}$ et $q_{4,n} \geq 1$. Nous avons :*
1. *$Q_{n+1} = \min\{q_{i,n} + q_{j,n} : (I_{i,n}, I_{j,n})$ soit compatible$\}$.*
2. *L'intervalle $I_{j,n+1}$ est différent de $I_{j,n}$ si et seulement si il existe i tel que le couple $(I_{i,n}, I_{j,n})$ soit compatible et tel que $Q_{n+1} = q_{i,n} + q_{j,n}$, on a alors $Q_{n+1} = q_{j,n+1}$. Dans ce cas nous dirons $I_{i,n}$ passe dans $I_{j,n}$.*
3. *Si $I_{i,n}$ passe dans $I_{j,n}$ alors l'intervalle $I_{j,n}$ est la réunion de $I_{j,n+1}$ et d'un translaté de $I_{i,n}$:*

$$\text{si } i = 1 \text{ ou } 2 \quad I_{j,n} = I_{j,n+1} \cup (I_{i,n} + q_{j,n}\theta + \varepsilon_{j,n}\alpha),$$
$$\text{si } i = 3 \text{ ou } 4 \quad I_{j,n} = I_{j,n+1} \cup (I_{i,n} - \alpha + q_{j,n}\theta + \varepsilon_{j,n}\alpha),$$

l'intersection de $I_{j,n+1}$ et du translaté de $I_{i,n}$ étant réduite au point $q_{j,n+1}\theta + \varepsilon_{j,n+1}\alpha$.

Remarque 1. Si $(I_{i,n}, I_{j,n})$ et $(I_{k,n}, I_{j,n})$ sont compatibles et tels que $Q_{n+1} = q_{i,n} + q_{j,n} = q_{k,n} + q_{j,n}$ alors $I_{i,n}$ et $I_{k,n}$ sont translaté l'un de l'autre et, à la fois $I_{i,n}$ passe dans $I_{j,n}$ et $I_{k,n}$ passe dans $I_{j,n}$.

Preuve de la remarque 1. Supposons $j = 1$. Alors $i = 2$ et $k = 4$. Notons $q = q_{2,n} = q_{4,n}$. Comme $\mathrm{suc}_{Q_n}(0) = q\theta + \varepsilon_{2,n}\alpha \neq \mathrm{suc}_{Q_n}(\alpha) = q\theta + \varepsilon_{4,n}\alpha$ nous avons $\varepsilon_{2,n} \neq \varepsilon_{4,n}$. Or d'après la compatibilité, $\varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{2,n} \in \{0,1\}$ et $\varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{4,n} - 1 \in \{0,1\}$ donc $\varepsilon_{2,n} = 0$ et $\varepsilon_{4,n} = 1$. Par conséquent $I_{2,n} = [0, q\theta] = [\alpha, q\theta + \alpha] - \alpha = I_{4,n} - \alpha$.

Un algorithme additif donnant la suite des changements (Q_n) et les données $(q_{i,n}, l_{i,n}, \varepsilon_{i,n})_{i=1,2,3,4}$, se déduit du théorème :
On cherche d'abord les couples $(I_{i,n}, I_{j,n})$ compatibles puis ceux tels que $q_{i,n} + q_{j,n}$ soit minimal et on appelle $\mathcal{C}(n)$ l'ensemble de ces couples. Les données $(q_{j,n+1}, l_{j,n+1}, \varepsilon_{j,n+1})$, $j = 1,2,3,4$, sont obtenues par la règle suivante
si il n'existe pas de i tel que $(I_{i,n}, I_{j,n}) \in \mathcal{C}(n)$ alors $(q_{j,n+1}, l_{j,n+1}, \varepsilon_{j,n+1}) = (q_{j,n}, l_{j,n}, \varepsilon_{j,n})$,
si il existe i tel que $(I_{i,n}, I_{j,n}) \in \mathcal{C}(n)$ alors

$$q_{j,n} = q_{j,n} + q_{i,n},$$
$$l_{j,n+1} = l_{j,n} - l_{i,n},$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{j,n+1} = \varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{i,n} \text{ si } i = 1 \text{ ou } 2 \\ \varepsilon_{j,n+1} = \varepsilon_{j,n} + \varepsilon_{i,n} - 1 \text{ si } i = 3 \text{ ou } 4. \end{cases}$$

Démonstration du théorème 1.
Remarquons d'abord que $Q_{n+1} \leq Q = \min\{q_{i,n} + q_{j,n} : (I_{i,n}, I_{j,n})$ soit compatible$\}$. En effet, si le couple $(I_{i,n}, I_{j,n})$ est compatible et si $Q = q_{i,n} + q_{j,n}$ alors le point

$$\beta = \begin{cases} q_{j,n}\theta + \varepsilon_{j,n}\alpha + q_{i,n}\theta + \varepsilon_{i,n}\alpha \text{ lorsque } i = 1 \text{ ou } 2 \\ q_{j,n}\theta + \varepsilon_{j,n}\alpha - \alpha + q_{i,n}\theta + \varepsilon_{i,n}\alpha \text{ lorsque } i = 3 \text{ ou } 4 \end{cases}$$

appartient à E_Q, la condition de compatibilité sur les longueur montre aussi que β appartient à l'intérieur de l'intervalle $I_{j,n}$, par conséquent $Q_{n+1} \leq Q$.
Montrons simultanément **2**, **3** et inégalité $Q_{n+1} \geq Q$. Au changement Q_{n+1}, l'un au moins des quatre intervalles $I_{j,n}$ est modifié, supposons qu'il s'agisse de $I_{1,n}$ c'est-à-dire que $I_{1,n+1} \neq I_{1,n}$, les autres cas se traitent de la même manière. Nous avons $Q_{n+1} = q_{1,n+1}$.
A. Montrons que $]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, q_{1,n+1}\theta + \varepsilon_{1,n+1}\alpha[$ ne contient pas de point de $E_{Q_{n+1}}$.
Supposons le contraire. Par définition de Q_{n+1}, l'intervalle $]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, 0[$ ne contient aucun point de $E_{Q_{n+1}-1}$ donc $]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, 0[$ devrait contenir les deux points de $E_{Q_{n+1}} \backslash E_{Q_{n+1}-1}$ qui sont $Q_{n+1}\theta$ et $Q_{n+1}\theta + \alpha$. Appliquons la symétrie $s_{Q_{n+1}}$, elle préserve $E_{Q_{n+1}}$, donc

$$\begin{aligned} \{0, \alpha\} &= s_{Q_{n+1}}(\{Q_{n+1}\theta, Q_{n+1}\theta + \alpha\}) = s_{Q_{n+1}}(]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, 0[\cap E_{Q_{n+1}}) \\ &=]Q_{n+1}\theta + \alpha, (Q_{n+1} - q_{1,n})\theta + (1 - \varepsilon_{1,n})\alpha[\cap E_{Q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, 0 et α appartiennent à l'intervalle $]Q_{n+1}\theta + \alpha, (Q_{n+1} - q_{1,n})\theta + (1 - \varepsilon_{1,n})\alpha[$ et ce sont les seuls de $E_{Q_{n+1}}$dans cet intervalle. Donc l'un des intervalles $]0, \alpha[$ ou $]\alpha, 0[$ est inclus dans l'intervalle $]Q_{n+1}\theta + \alpha, (Q_{n+1} - q_{1,n})\theta + (1 - \varepsilon_{1,n})\alpha[$ et ne rencontre aucun point de $E_{Q_{n+1}}$.

Comme $E_{Q_n} \subset E_{Q_{n+1}}$ l'un des intervalles $]0,\alpha[$ ou $]\alpha,0[$ ne contient pas de point de E_{Q_n} ce qui contredit l'hypothèse $q_{i,n} \geq 1$, $i = 1,2,3,4$.
B. Comme $s_{Q_{n+1}}$ est une involution bijective de $E_{Q_{n+1}}$ dans lui même, l'intervalle

$$I = s_{Q_{n+1}}(]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, q_{1,n+1}\theta + \varepsilon_{1,n+1}\alpha[) =](1-\varepsilon_{n+1})\alpha, (Q_{n+1} - q_{1,n})\theta + (1-\varepsilon_{1,n})\alpha[$$

ne rencontre pas $E_{Q_{n+1}}$, donc $(Q_{n+1} - q_{1,n})\theta + (1-\varepsilon_{1,n})\alpha = \mathrm{suc}_{Q_{n+1}}(0 \text{ ou } \alpha)$. D'autre part $Q_{n+1} - q_{1,n} < Q_{n+1}$, par conséquent $Q_{n+1} - q_{1,n} = q_{2,n}$ ou $q_{4,n}$, d'où

$$I = \begin{cases} I_{2,n} =]0, q_{2,n}\theta + \varepsilon_{2,n}\alpha[\text{ si } \varepsilon_{1,n+1} = 1 \\ I_{4,n} =]\alpha, q_{4,n}\theta + \varepsilon_{4,n}\alpha[\text{ si } \varepsilon_{1,n+1} = 0 \end{cases}$$

et par injectivité de l'application $(\varepsilon, q) \in \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \varepsilon\alpha + q\theta$ nous obtenons

$$\begin{cases} Q_{n+1} = q_{1,n+1} = q_{1,n} + q_{2,n} \text{ et } \varepsilon_{1,n+1} = \varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{2,n} \text{ si } \varepsilon_{1,n+1} = 1 \\ Q_{n+1} = q_{1,n+1} = q_{1,n} + q_{4,n} \text{ et } \varepsilon_{1,n+1} = \varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{4,n} - 1 \text{ si } \varepsilon_{1,n+1} = 0 \end{cases}.$$

Pour achever la démonstration il reste à vérifier que le couple $(I, I_{1,n})$ est compatible, les conditions i) et iii) sont satisfaites d'après ce qui précède et la condition sur les longueurs est une conséquence de l'inclusion

$$s_{Q_{n+1}}(I) =]q_{1,n}\theta + \varepsilon_{1,n}\alpha, q_{1,n+1}\theta + \varepsilon_{1,n+1}\alpha[\subset I_{1,n}. \square$$

Remarque 2. On n'a jamais $\varepsilon_{1,n} = \varepsilon_{2,n} = 0$ ou $\varepsilon_{3,n} = \varepsilon_{4,n} = 1$.

En effet, si $\varepsilon_{1,n} = \varepsilon_{2,n} = 0$ les grands intervalles de la suite $(\alpha + q\theta)_{q \leq Q_n}$ sont de longueurs $l_{1,n} + l_{2,n}$ (voir le théorème des trois distances et les relations entre les longueurs, par exemple dans [A,B]). Le point 0 est dans l'un des intervalles déterminés par cette suite, soit $I = [\alpha + k\theta, \alpha + k'\alpha]$ cette intervalle. La longueur de I est $\leq l_{1,n} + l_{2,n}$ donc $[\alpha + k\theta, 0] \subset I_{1,n}$ ou $[0, \alpha + k'\theta] \subset I_{2,n}$. Il en résulte que $[\alpha + k\theta, 0] = I_{1,n}$ ou $[0, \alpha + k'\theta] = I_{2,n}$, et $\alpha + k\theta = q_{1,n}\theta$ ou $\alpha + k'\theta = q_{2,n}\theta$ ce qui contredit $\alpha \notin \mathbb{Z}\theta$.

Remarque 3. Si $l_{1,n} = l_{2,n}$ ou $l_{3,n} = l_{4,n}$ alors $2\alpha \in \mathbb{Z}\theta$.

En effet si $l_{1,n} = l_{2,n}$ alors $-(\varepsilon_{1,n}\alpha + q_{1,n}\theta) = \varepsilon_{2,n}\alpha + q_{2,n}\theta$ donc $(\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{2,n})\alpha \in \mathbb{Z}\theta$ et $\varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{2,n} = 1$ ou 2 d'après la remarque précédente.

4 Initialisation

L'apparition de nouveaux intervalles est décrite par le théorème 1 lorsque $q_{1,n}$, $q_{2,n}$, $q_{3,n}$, $q_{4,n} \geq 1$. Appelons n_0 le plus petit n tel que $q_{1,n}$, $q_{2,n}$, $q_{3,n}$, $q_{4,n} \geq 1$ et cherchons les données à l'instant $Q = Q_{n_0}$. Si $Q_{n_0} = 1$ les données sont faciles à trouver car les points de E_1 doivent être placés sur $\mathbb{T}^1$ dans l'un des deux ordres $0, \theta, \alpha, \alpha+\theta$ ou $0, \alpha+\theta, \alpha, \theta$. Le cas $Q_{n_0} > 1$ est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2 *Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ la suite des dénominateurs des réduites du développement en fraction continue de θ. Il existe $n \geq 0$ tel que $Q_{n_0} = p_n$. Si $Q_{n_0} > 1$ les données sont de l'une des quatre formes suivantes*

$$\begin{cases} (q_{1,n_0}, l_{1,n_0}) = (q_{3,n_0}, l_{3,n_0}) = (p_n, \|p_n\theta\|),\ \varepsilon_{1,n_0} = 1 - \varepsilon_{3,n_0} = 0, \\ \textit{si } \operatorname{long}([0,\alpha]) \geq \frac{1}{2} \textit{ alors } \begin{cases} (q_{2,n_0}, l_{2,n_0}, \varepsilon_{2,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 1), \\ (q_{4,n_0}, l_{4,n_0}, \varepsilon_{4,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 0) \end{cases} \\ \textit{si } \operatorname{long}([0,\alpha]) \leq \frac{1}{2} \textit{ alors } \begin{cases} (q_{2,n_0}, l_{2,n_0}, \varepsilon_{2,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 1), \\ (q_{4,n_0}, l_{4,n_0}, \varepsilon_{4,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (q_{2,n_0}, l_{2,n_0}) = (q_{4,n_0}, l_{4,n_0}) = (p_n, \|p_n\theta\|),\ \varepsilon_{2,n_0} = 1 - \varepsilon_{4,n_0} = 0, \\ \textit{si } \operatorname{long}([0,\alpha]) \geq \frac{1}{2} \textit{ alors } \begin{cases} (q_{1,n_0}, l_{1,n_0}, \varepsilon_{1,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 1), \\ (q_{3,n_0}, l_{3,n_0}, \varepsilon_{3,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 0) \end{cases} \\ \textit{si } \operatorname{long}([0,\alpha]) \leq \frac{1}{2} \textit{ alors } \begin{cases} (q_{1,n_0}, l_{1,n_0}, \varepsilon_{1,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 1), \\ (q_{3,n_0}, l_{3,n_0}, \varepsilon_{3,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration.
Le cas $Q_{n_0} = 1$ se traite par un simple examen des différentes configurations. Nous supposerons dans la suite $Q_{n_0} > 1$. Appelons p le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\|p\theta\| < \|\alpha\|$. La propriété de meilleure approximation du développement en fraction continue montre qu'il existe $n \geq 0$ tel que $p = p_n$. L'hypothèse $Q_{n_0} > 1$ montre que $p_n > 1$. Quatre cas se sont possibles suivant le signe de $\text{long}([0, \alpha]) - \frac{1}{2}$ et la parité de n ; les raisonnement sont identiques dans les quatre cas. Supposons $\text{long}([0, \alpha]) \geq \frac{1}{2}$ et n impair.
Nous avons $\|\alpha\| = \text{long}([\alpha, 0])$ et $p_n\theta \in]\alpha, 0[$. Pour tout $q \in \{1, ..., p_n - 1\}$ ni $q\theta$, ni $\alpha + q\theta$ n'appartient à l'intervalle $]\alpha, 0[$ car $q\theta \in]\alpha, 0[$ entraîne $\|q\theta\| < \text{long}([\alpha, 0])$ et $\alpha + q\theta \in]\alpha, 0[$ entraîne $\|q\theta\| = \|\alpha + q\theta - \alpha\| < \text{long}([\alpha, 0])$ ce qui contredit la définition de p_n. Par conséquent $Q_{n_0} \geq p_n$. Comme n est impair, $p_n\theta \in]\alpha, 0[$ et $p_n\theta + \alpha \notin]\alpha, 0[$ donc $Q_{n_0} = p_n$ et

$$(q_{1,n_0}, l_{1,n_0}, \varepsilon_{1,n_0}) = (p_n, \|p_n\theta\|, 0) \text{ et } (q_{4,n_0}, l_{4,n_0}, \varepsilon_{4,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 0).$$

Déterminons $(q_{3,n_0}, l_{3,n_0}, \varepsilon_{3,n_0})$. Nous avons $\alpha + p_n\theta \in]0, \alpha[$ et $\text{long}([\alpha + p_n\theta, \alpha]) = \|p_n\theta\|$; montrons que si $q \in \{1, ..., p_n - 1\}$ alors ni $q\theta$, ni $\alpha + q\theta$ n'appartient à l'intervalle $]\alpha + p_n\theta, \alpha[$. En effet, $\alpha + q\theta \in]\alpha + p_n\theta, \alpha[$ entraîne $\|q\theta\| = \|\alpha + q\theta - \alpha\| < \text{long}([\alpha + p_n\theta, \alpha]) = \|p_n\theta\|$ ce qui contredit la définition de p_n. Ainsi $\alpha + q\theta$ n'appartient ni à $]\alpha + p_n\theta, \alpha[$ ni à $]\alpha, 0[$ donc $\alpha + q\theta \in]0, \alpha + p_n\theta[$. De même, $q\theta \in]\alpha + p_n\theta, \alpha[$ entraîne $\alpha + p_n\theta \in]\alpha, q\theta[$; or $]\alpha, q\theta[$ est inclus dans $]\alpha, \alpha + q\theta[\cup [\alpha + q\theta, q\theta[$ et en vertu de propriétés du développement en fraction, $\alpha + p_n\theta$ n'appartient pas $]\alpha, \alpha + q\theta[$ donc $\alpha + p_n\theta \in]\alpha + q\theta, q\theta[$ et

$$\alpha + p_n\theta - q\theta \in]\alpha + q\theta, q\theta[- q\theta =]\alpha, 0[.$$

Cela contredit la définition de $p = p_n$ car $1 \leq p_n - q < p_n$ et $\|\alpha\| = \text{long}(]\alpha, 0[) \leq \frac{1}{2}$. Nous en déduisons

$$(q_{3,n_0}, l_{3,n_0}, \varepsilon_{3,n_0}) = (p_n, \|p_n\theta\|, 1).$$

Il reste à déterminer $(q_{2,n_0}, l_{2,n_0}, \varepsilon_{2,n_0})$. Cherchons le voisin droit de 0. Le point $-p_{n-1}\theta$ appartient à $]0, \alpha[$ car $\|p_{n-1}\theta\| > \text{long}([\alpha, 0])$. Par conséquent $\alpha \in] - p_{n-1}\theta, 0[$ et $\alpha + p_{n-1}\theta \in]0, p_{n-1}\theta[$. Les propriétés du développement en fraction continue montrent que pour tous les $q \in \{0, ..., p_n - 1\}$, $\alpha + q\theta$ n'appartient pas l'intervalle $]\alpha, \alpha + p_{n-1}\theta[$ qui contient $]0, p_{n-1}\theta[$, de même $q\theta \notin]0, p_{n-1}\theta[$ pour tous les $q \in \{1, ..., p_n\}$, donc le voisin de droite de 0 est $\alpha + p_{n-1}\theta$ et

$$(q_{2,n_0}, l_{2,n_0}, \varepsilon_{2,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 1).\square$$

5 L'algorithme de Gilles Didier

Définition 3 *Nous dirons qu'un changement Q_n est essentiel si $q_{i,n} \geq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, et si ($Q_n = q_{1,n} = q_{3,n}$ et $\varepsilon_{1,n} = 1 - \varepsilon_{3,n} = 0$) ou ($Q_n = q_{2,n} = q_{4,n}$ et $\varepsilon_{2,n} = 1 - \varepsilon_{4,n} = 0$), dans le premier cas nous dirons que le changement est impair et dans le second pair.*

Le changement Q_{n_0} défini par le théorème 2 est essentiel. Les changements essentiels forment une sous-suite de la suite des changements. En fait, la suite des changements correspond à l'algorithme additif des fractions continues et le théorème suivant montre que la suite des changements essentiels correspond à l'algorithme multiplicatif des fractions continues.

Introduisons quelques notations. Soit Q_n un changement essentiel. Posons

$$x_n = \begin{cases} l_{1,n} \text{ si } Q_n \text{ est impair} \\ l_{2,n} \text{ si } Q_n \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$y_n = l_{1,n} + l_{2,n},\ z_n = l_{1,n} + l_{2,n} + l_{3,n} + l_{4,n},\ u_n = \frac{x_n}{z_n} \text{ et } v_n = \frac{y_n}{z_n}.$$

Théorème 3 ***1.*** *la suite des changement essentiels est infinie.*
2. *Soit Q_n un changement essentiel et $Q_{n'}$ le changement essentiel suivant. Il y a deux cas : $\{\frac{v_n}{u_n}\} < \{\frac{1}{u_n}\}$ ou $\{\frac{v_n}{u_n}\} \geq \{\frac{1}{u_n}\}$.*

Dans le premier cas, les changements essentiels Q_n et $Q_{n'}$ ont la même parité et

$$x_{n'} = x_n(1 - \{\frac{1}{u_n}\}),$$
$$y_{n'} = x_n(1 - \{\frac{1-v_n}{u_n}\}),$$
$$z_{n'} = x_n(2 - \{\frac{1}{u_n}\})$$

$$u_{n'} = \frac{1 - \{\frac{1}{u_n}\}}{2 - \{\frac{1}{u_n}\}},\ v_{n'} = \frac{1 - \{\frac{1}{u_n}\} + \{\frac{v_n}{u_n}\}}{2 - \{\frac{1}{u_n}\}}.$$

Dans le deuxième cas, les changements essentiels Q_n et $Q_{n'}$ n'ont pas la même parité et

$$x_{n'} = x_n\{\frac{1}{u_n}\},$$
$$y_{n'} = x_n(1 + \{\frac{1}{u_n}\} - \{\frac{v_n}{u_n}\}),$$
$$z_{n'} = x_n(1 + \{\frac{1}{u_n}\}).$$

$$u_{n'} = \frac{\{\frac{1}{u_n}\}}{1 + \{\frac{1}{u_n}\}},\ v_{n'} = \frac{1 + \{\frac{1}{u_n}\} - \{\frac{v_n}{u_n}\}}{1 + \{\frac{1}{u_n}\}}.$$

Démonstration. Supposons $q_{1,n} = q_{3,n}$ et $\varepsilon_{1,n} = 1 - \varepsilon_{3,n} = 0$. D'après la remarque 1, on a $\varepsilon_{2,n} = 1 - \varepsilon_{4,n} = 1$.

Tant que les intervalles I_1 et I_3 sont les plus courts, les intervalles I_1 ou I_3 passent successivement dans les intervalles I_2 et I_4. Appelons $Q = Q_{n_1}$ le premier changement après Q_n tel que I_2 ou I_4 soit plus court que I_1 et I_3. Comme $\varepsilon_{1,n} = 1 - \varepsilon_{3,n} = 0$ on a $\varepsilon_{i,n} = \varepsilon_{i,n_1}$.
Trois cas sont possibles $l_{4,n_1} < l_{1,n_1} < l_{1,n_2}$, $l_{2,n_1} < l_{1,n_1} < l_{4,n_1}$ et l_{4,n_1} et $l_{2,n_1} < l_{1,n_1}$.
Traitons le cas $l_{4,n_1} < l_{1,n_1} < l_{1,n_1}$,les autres se traitent de la même manière.
Tant que I_1 est plus court que I_2, aux étapes suivantes soit I_1 passe dans I_2 soit I_4 passe dans I_3, I_4 ne peut passer dans I_1 car on aurait $\varepsilon_1 = -1$. D'autres part, I_4 ne peut passer dans I_3 qu'une seule fois sinon on aurait $\varepsilon_3 \leq -1$. Du changement Q_n au changement Q_{n_2}, I_1 est passé $[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]$ fois dans I_2, $[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]$ fois dans I_4, et I_4 est passé une fois dans I_3. Donc au changement $Q = Q_{n_2}$ on aboutit à la situation suivante :

$$q_{1,n_2} = q_{1,n},\ l_{1,n_2} = l_{1,n},\ \varepsilon_{1,n_2} = \varepsilon_{1,n} = 0,$$
$$q_{2,n_2} = q_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{2,n_2} = l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{2,n_2} = \varepsilon_{2,n} = 1,$$
$$q_{4,n_2} = q_{4,n} + [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{4,n_2} = l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{4,n_2} = \varepsilon_{4,n} = 0,$$
$$q_{3,n_2} = q_{3,n} + q_{4,n} + [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{3,n_2} = l_{3,n} - l_{4,n} + [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{3,n_2} = 1 + (\varepsilon_{4,n} - 1) = 0.$$

A la prochaine étape on voit grâce aux valeurs de ε_{j,n_2} que ni I_3 ne peut passer dans I_4 ni I_4 dans I_1 donc I_2 passe dans I_1 ou I_3 passe dans I_2. Or le couple (I_2, I_1) est compatible et $q_{2,n_2} + q_{1,n_2} < q_{3,n_2} + q_{2,n_2}$ donc I_2 passe dans I_1. A l'instant $Q = Q_{n_2+1} = Q_{n_3}$ on aboutit à

$$q_{1,n_3} = q_{1,n} + q_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{1,n_3} = l_{1,n} - l_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{1,n_3} = \varepsilon_{1,n} + \varepsilon_{2,n_2} = 1,$$

Les q_i, l_i, ε_i, $i \geq 2$, ne sont pas modifiés.
Compte tenu des valeurs des ε_i, à la prochaine étape I_1 passe dans I_4 ou l'inverse, ou I_2 passe dans I_3 ou l'inverse.

On remarque que

$$\begin{aligned} q_{1,n_3}+q_{4,n_3} &= q_{1,n}+q_{2,n}+[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n}+q_{4,n}+[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n} \\ &= q_{2,n_3}+q_{3,n_3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l_{1,n_3}-l_{4,n_3} &= l_{1,n}-(l_{2,n}-[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n})-(l_{4,n}-[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}), \\ &= l_{3,n_3}-l_{2,n_3}. \end{aligned}$$

Des deux relations précédentes, on déduit que si $l_{1,n_3}-l_{4,n_3}=l_{3,n_3}-l_{2,n_3}\geq 0$ alors au changement $Q_{n'}=Q_{n_3+1}$, I_4 passe dans I_1 et I_2 dans I_3 et si $l_{1,n_3}-l_{4,n_3}=l_{3,n_3}-l_{2,n_3}\leq 0$ alors I_1 passe dans I_4 et I_3 dans I_2.
Cas 1. $l_{1,n_3}-l_{4,n_3}=l_{3,n_3}-l_{2,n_3}\geq 0$.

$$\begin{aligned} &Q_{n'}=q_{1,n'}=q_{3,n'}=q_{2,n}+q_{4,n}+([\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]+[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]+1)q_{1,n} \\ &l_{1,n'}=l_{3,n'}=l_{1,n}-l_{2,n}+[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}-(l_{4,n}-[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) \\ &\varepsilon_{1,n'}=1-\varepsilon_{3,n'}=0, \end{aligned}$$

$$q_{2,n'}=q_{2,n}+[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{2,n'}=l_{2,n}-[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{2,n'}=\varepsilon_{2,n}=1,$$

$$q_{4,n_2}=q_{4,n}+[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{4,n_2}=l_{4,n}-[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n},\ \varepsilon_{4,n_2}=\varepsilon_{4,n}=0.$$

Le changement $Q_{n'}$ est donc essentiel impair.
Cas 2. $l_{1,n_3}-l_{4,n_3}=l_{3,n_3}-l_{2,n_3}\leq 0$.

$$\begin{aligned} &Q_{n'}=q_{2,n'}=q_{4,n'}=q_{2,n}+q_{4,n}+([\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]+[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]+1)q_{1,n} \\ &l_{2,n'}=l_{4,n'}=-l_{1,n}+l_{2,n}-[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}+(l_{4,n}-[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n})=+l_{2,n}+l_{4,n}-(\{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}+\{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\})l_{1,n}, \\ &\varepsilon_{2,n'}=1-\varepsilon_{4,n'}=0, \end{aligned}$$

$$q_{1,n'}=q_{1,n}+q_{2,n}+[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{1,n'}=l_{1,n}-\{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n},\ \varepsilon_{1,n'}=1$$

$$q_{3,n'}=q_{3,n}+q_{4,n}+[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]q_{1,n},\ l_{3,n'}=l_{3,n}-\{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n},\ \varepsilon_{n'}=0.$$

Le changement $Q_{n'}$ est donc essentiel pair.

Exprimons à l'aide de u_n et v_n la condition $l_{1,n_3}-l_{4,n_3}\geq 0$.

$$\begin{aligned} l_{1,n_3}-l_{4,n_3} &= l_{1,n}-l_{2,n}+[\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}-(l_{4,n}-[\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) \\ &= (x_n-(y_n-x_n)+[\frac{y_n-x_n}{x_n}]x_n-(z_n-x_n-y_n)+[\frac{z_n-x_n-y_n}{x_n}]x_n) \\ &= x_n+[\frac{y_n}{x_n}]x_n-y_n-(z_n-y_n)+[\frac{z_n-y_n}{x_n}]x_n \\ &= x_n(1-\{\frac{z_n-y_n}{x_n}\}-\{\frac{y_n}{x_n}\})=x_n(1-\{\frac{1-v_n}{u_n}\}-\{\frac{v_n}{u_n}\}), \end{aligned}$$

donc $l_{1,n_3} - l_{4,n_3} > 0 \iff 1 - \{\frac{1-v_n}{u_n}\} - \{\frac{v_n}{u_n}\} > 0 \iff \{\frac{v_n}{u_n}\} < \{\frac{1}{u_n}\}$.
Exprimons $(u_{n'}, v_{n'})$ en fonction de (u_n, v_n). Pour alléger n'écrivons pas les indices n aux lettres x, y, z, u et v.
Cas 1. $1 - \{\frac{1-v}{u}\} - \{\frac{v}{u}\} > 0$ (ou $\{\frac{v}{u}\} < \{\frac{1}{u}\}$).
Nous avons $\{\frac{1-v}{u}\} + \{\frac{v}{u}\} = 1 + \{\frac{1}{u}\}$.

$$\begin{aligned}
x' &= l_{1,n} - l_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} - (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) = l_{1,n}(1 - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\} - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}) \\
&= x(1 - \{\frac{y-x}{x}\} - \{\frac{z-2x-y}{x}\}) = x(1 - \{\frac{1-v}{u}\} - \{\frac{v}{u}\}) \\
&= x(1 - \{\frac{1}{u}\}), \\
y' &= l_{1,n} - l_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} - (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) + l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} \\
&= l_{1,n}(1 - \{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\}) = x(1 - \{\frac{z-2x-y}{x}\}) = x(1 - \{\frac{z-y}{x}\}) \\
&= x(1 - \{\frac{1-v}{u}\}), \\
z' &= 2(l_{1,n} - l_{2,n} + [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} - (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n})) + l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} + l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} \\
&= l_{1,n}(2 - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\} - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}) = x(2 - \{\frac{1}{u}\})
\end{aligned}$$

$$u' = \frac{1 - \{\frac{1}{u}\}}{2 - \{\frac{1}{u}\}},\ v' = \frac{1 - \{\frac{1}{u}\} + \{\frac{v}{u}\}}{2 - \{\frac{1}{u}\}}.$$

Cas 2. $1 - \{\frac{1-v}{u}\} - \{\frac{v}{u}\} \leq 0$ (ou $\{\frac{v}{u}\} \geq \{\frac{1}{u}\}$)
Nous avons $\{\frac{1-v}{u}\} + \{\frac{v}{u}\} = 1 + \{\frac{1}{u}\}$.

$$\begin{aligned}
x' &= -l_{1,n} + l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} + (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) \\
&= l_{1,n}(-1 + \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\} + \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}) \\
&= x(-1 + \{\frac{1-v}{u}\} + \{\frac{v}{u}\}) \\
&= x\{\frac{1}{u}\}, \\
y' &= -l_{1,n} + l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} + (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n}) + l_{1,n} - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n} \\
&= l_{1,n}\{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\} = x\{\frac{z-x-y}{x}\} \\
&= x\{\frac{1-v}{u}\} = x(1 + \{\frac{1}{u}\} - \{\frac{v}{u}\}), \\
z' &= 2(-l_{1,n} + l_{2,n} - [\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n} + (l_{4,n} - [\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}]l_{1,n})) + l_{1,n} - \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n} + l_{3,n} - \{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n} \\
&= \{\frac{l_{2,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n} + \{\frac{l_{4,n}}{l_{1,n}}\}l_{1,n} \\
&= x(\{\frac{1-v}{u}\} + \{\frac{v}{u}\}) = x(1 + \{\frac{1}{u}\}).
\end{aligned}$$

$$u' = \frac{\{\frac{1}{u}\}}{1 + \{\frac{1}{u}\}},\ v' = \frac{1 + \{\frac{1}{u}\} - \{\frac{v}{u}\}}{1 + \{\frac{1}{u}\}}. \square$$

6 Relations entre les longueurs

Théorème 4 *Pour tout* $n \geq 1$ *tel que* $q_{i,n} \geq 1$, $i = 1,2,3,4$ *on a*

$$q_{1,n}l_{2,n} + q_{2,n}l_{1,n} + q_{3,n}l_{4,n} + q_{4,n}l_{3,n} = 1.$$

Démonstration.
On procède par récurrence sur n. Soit n_0 le plus petit n tel que chaque $q_{i,n}$ soit ≥ 1. Le théorème 2 fournit les données à l'instant Q_{n_0}. Examinons le premier cas du théorème 2, les autres sont analogues. Nous avons

$$(q_{1,n_0}, l_{1,n_0}) = (q_{3,n_0}, l_{3,n_0}) = (p_n, \|p_n\theta\|),\ \varepsilon_{1,n_0} = 1 - \varepsilon_{3,n_0} = 0,$$
$$\begin{cases} (q_{2,n_0}, l_{2,n_0}, \varepsilon_{2,n_0}) = (p_{n-1}, \|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|, 1), \\ (q_{4,n_0}, l_{4,n_0}, \varepsilon_{4,n_0}) = (p_n, \|\alpha\| - \|p_n\theta\|, 0) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} &q_{1,n_0}l_{2,n_0} + q_{2,n_0}l_{1,n_0} + q_{3,n_0}l_{4,n_0} + q_{4,n_0}l_{5,n_0} \\ &= p_n(\|p_{n-1}\theta\| - \|\alpha\|) + p_{n-1}\|p_n\theta\| + p_n(\|\alpha\| - \|p_n\theta\|) + p_n\|p_n\theta\| \\ &= p_n\|p_{n-1}\theta\| + p_{n-1}\|p_n\theta\| \end{aligned}$$

or $p_n\|p_{n-1}\theta\| + p_{n-1}\|p_n\theta\| = 1$ donc $q_{1,n_0}l_{2,n_0} + q_{2,n_0}l_{1,n_0} + q_{3,n_0}l_{4,n_0} + q_{4,n_0}l = 1$.

Supposons la relation vraie pour n et montrons la pour $n+1$. Reprenons la démonstration du théorème 3, nous remarquons que les changements sont de deux types possibles :
1. I_1 passe dans I_2 ou l'inverse ou encore I_3 passe dans I_4 ou l'inverse.
2. I_1passe dans I_4 et I_3 passe dans I_2 ou I_4 passe dans I_1 et I_2 passe dans I_3 et on aboutit à un changement essentiel.

Supposons que $I_{1,n}$ passe dans $I_{2,n}$. Alors

$$q_{2,n+1} = q_{2,n} + q_{1,n},\ l_{2,n+1} = l_{2,n} - l_{1,n},$$

d'où

$$\begin{aligned} q_{1,n}l_{2,n} + q_{2,n}l_{1,n} &= q_{1,n}(l_{2,n+1} + l_{1,n}) + q_{2,n}l_{1,n} \\ &= q_{1,n}l_{2,n+1} + (q_{2,n} + q_{1,n})l_{1,n} \\ &= q_{1,n+1}l_{2,n+1} + q_{2,n+1}l_{1,n+1}. \end{aligned}$$

De même si $I_{3,n}$ passe dans $I_{4,n}$ nous obtenons

$$q_{3,n}l_{4,n} + q_{4,n}l_{3,n} = q_{3,n+1}l_{4,n+1} + q_{4,n+1}l_{3,n+1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 1 &= q_{1,n}l_{2,n} + q_{2,n}l_{1,n} + q_{3,n}l_{4,n} + q_{4,n}l_{5,n} \\ &= q_{1,n+1}l_{2,n+1} + q_{2,n+1}l_{1,n+1} + q_{3,n+1}l_{4,n+1} + q_{4,n+1}l_{3,n+1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où on aboutit à un changement essentiel, nous avons lorsque $I_{1,n}$ passe dans $I_{4,n}$ et $I_{3,n}$ passe dans $I_{2,n}$ (l'autre cas est identique)

$$\begin{cases} q_{4,n+1} = q_{2,n+1} = q_{4,n} + q_{1,n} = q_{3,n} + q_{2,n} \\ l_{4,n+1} = l_{2,n+1} = l_{4,n} - l_{1,n} = l_{2,n} - l_{3,n} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 &= q_{1,n}l_{2,n} + q_{2,n}l_{1,n} + q_{3,n}l_{4,n} + q_{4,n}l_{5,n} \\ &= q_{1,n}(l_{2,n+1} + l_{3,n}) + q_{2,n}l_{1,n} + q_{3,n}(l_{4,n+1} + l_{1,n}) + q_{4,n}l_{3,n} \\ &= q_{1,n}l_{2,n+1} + (q_{2,n} + q_{3,n})l_{1,n} + q_{3,n}l_{4,n+1} + (q_{1,n} + q_{3,n})l_{3,n} \\ &= q_{1,n+1}l_{2,n+1} + q_{2,n+1}l_{1,n+1} + q_{3,n+1}l_{4,n+1} + q_{4,n+1}l_{5,n+1}.\square \end{aligned}$$

7 Remarque sur un problème de W.M. Schmidt

Conservons les notations de l'introduction. W.M. Schmidt a démontré que pour tout couple (α, θ) il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que la distance de 0 au point le plus proche de $E(n,n)\backslash\{0\}$ soit inférieure à $n^{-\omega}$ où ω est le nombre d'or ([Sch]).
L'exposant ω n'est probablement pas optimal car en symétrisant l'ensemble $E(n,n)$:

$$E'(n,n) = \{k_1\alpha + k_2\theta : -n \leq k_1, k_2 < n\},$$

la distance de 0 au point le plus proche de $E'(n,n)\backslash\{0\}$ devient inférieure à n^{-2} pour tout n. En fait, W.M. Shmidt n'exclue pas que le bon exposant soit 2 ([Sch]).
Fixons n_1, de manière analogue à W.M. Shmidt, on peut chercher une estimation de la limite inférieure quand n_2 tend vers l'infini, de la distance de 0 à $E(n_1,n_2)\backslash\{0\}$. En particulier,
existe-t-il une constante C telle que pour tout $n_1 \geq 1$ on ait $d(0, E(n_1,n_2)\backslash\{0\}) \leq \frac{C}{n_1 n_2}$ pour une infinité d'entier $n_2 \in \mathbb{N}$?
Une idée naturelle pour aborder ce problème est donnée par le lemme suivant.
Appelons $\mathcal{J}(n_1,n_2)$ l'ensemble des intervalles déterminer par $\mathbb{T}^1\backslash E(n_1,n_2)$ (c'est à dire l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{T}^1\backslash E(n_1,n_2)$). Notons $\mathrm{long}(I)$ la longueur d'un intervalle I et posons

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(n_1,n_2) = \{I \in \mathcal{J}(n_1,n_2) : \mathrm{long}(I) = \min\{\mathrm{long}(J) : I \in \mathcal{J}(n_1,n_2)\},$$

$\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des intervalles de longueur minimale.

Lemme 1 *Si 0 est l'extrémité de l'un des intervalles de $\mathcal{C}_1$ alors $d(0, E(n_1,n_2)\backslash\{0\}) \leq \frac{1}{n_1 n_2}$.*

La démonstration est très simple. Nous avons $\sum_{I\in\mathcal{J}(n_1,n_2)} \mathrm{long}(I) = 1$ et $\mathrm{card}\,\mathcal{J}(n_1,n_2) = n_1 n_2$ donc si 0 est l'extrémité de l'intervalle $I_0 \in \mathcal{C}_1$ alors $n_1 n_2 \,\mathrm{long}(I_0) \leq 1$ et la distance de 0 a $E(n_1,n_2)\backslash\{0\}$ est $\leq \frac{1}{n_1 n_2}$.

Par conséquent si le couple (α,θ) est tel 0 soit l'extrémité d'un intervalle appartenant à $\mathcal{C}_1(n_1,n_2)$ pour une infinité de n_2 alors

$$d(0, E(n_2,n_2)\backslash\{0\}) \leq \frac{1}{n_1 n_2} \text{ pour une infinité de } n_2.$$

Cependant même pour $n_1 = 2$, cela est faux. Pour le voir utilisons les algorithmes des paragraphes 3 et 5.

Proposition 1 *Il existe un couple $(\alpha,\theta) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\min(l_{3,n}, l_{4,n}) < \min(l_{1,n}, l_{2,n})$.*

Démonstration abrégée.
Exhibons un couple (α,θ) tel que pour tout n on ait $\min(l_{1,n}, l_{2,n}) < \min(l_{3,n}, l_{4,n})$. Le couple cherché est alors $(-\alpha,\theta)$ car la translation $x \in \mathbb{T}^1 \to x + \alpha$ envoie

$$\{-\varepsilon\alpha + k\theta : \varepsilon = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } 0 \leq k \leq q\}$$

sur

$$E_q = \{\varepsilon\alpha + k\theta : \varepsilon = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } 0 \leq k \leq q\}$$

et envoie $-\alpha$ sur 0.
Soit x positif vérifiant $3x^2 - x - 1 = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \in]0,1[$. Prenons

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1+x}{2+3x} \bmod 1 \\ \theta = \frac{1+3x}{2+3x} \bmod 1 \end{cases}.$$

Nous avons $\mathrm{suc}_1(0) = \alpha + \theta$, $\mathrm{suc}_1(\alpha+\theta) = \alpha$, $\mathrm{suc}_1(\alpha) = \theta$ et $\mathrm{suc}(\theta) = 0$ donc $q_{1,0} = q_{2,0} = q_{3,0} = q_{4,0} = 1$. Un calcul montre que

$$l_{1,0} = \frac{1}{2+3x},\ l_{2,0} = \frac{x}{2+3x},\ l_{3,0} = \frac{1}{2+3x},\ l_{0,4} = \frac{2x}{2+3x}$$

Appliquons l'algorithme de G. Didier, nous avons

$$u_0 = \frac{5-\sqrt{13}}{6},\ v_0 = \frac{22+2\sqrt{13}}{36}.$$

Comme $\{\frac{v_0}{u_0}\} > \{\frac{1}{u_0}\}$, nous sommes dans le deuxième cas de l'algorithme et un calcul montre que

$$u_1 = u_0,\ v_1 = v_0,$$

donc (u_0, v_0) est un point fixe de l'application T définie par l'algorithme de G. Didier. Si Q_n est un changement essentiel, à un facteur multiplicatif près les longueurs $l_{1,n}, ..., l_{4,n}$ se déduisent de u_n et v_n ; donc d'un changement essentiel au suivant, les inégalités entre les longueurs seront les mêmes qu'entre le premier et deuxième changement essentiel. Un calcul élémentaire mais fastidieux, montre que l'inégalité $\min(l_{1,n}, l_{2,n}) < \min(l_{3,n}, l_{4,n})$ est valable pour $n = 0, 1, 2, 3$ et comme les deux premiers changements essentiels sont Q_0 et Q_3 cela prouve la proposition$\square$

Dans la direction du problème précédent on peut prouver un résultat positif.
Posons

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2(n_1, n_2) = \{I \in \mathcal{J}(n_1, n_2) : l(I) = \min\{l(J) : I \in \mathcal{J}(n_1, n_2)\backslash\mathcal{C}_1\},$$

$\mathcal{C}_2$ est l'ensemble intervalles dont la longueur est la deuxième plus courte possible.

Proposition 2 *Si $f_{\alpha,\theta}$ est injective sur $\{-n_1+1, ..., n_1-1\}\times\mathbb{Z}$ alors il existe une infinité d'entiers n_2 tel que* 0 *soit l'extrémité d'un intervalle de $\mathcal{C}_1(n_1, n_2) \cup \mathcal{C}_2(n_1, n_2)$.*

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin d'un résultat intermédiaire intéressant par lui même. Appelons $\mathcal{E}(n_1, n_2)$ l'ensemble des intervalles dont les extrémités sont distinctes et appartiennent à $E(n_1, n_2)$. Pour chaque I appartenant à $\mathcal{E}(n_1, n_2)$ notons $\mathrm{or}(I) = (k_1, k_2)$ et $\mathrm{ter}(I) = (j_1, j_2)$ les deux couples de $R(n_1, n_2) = \{0, ..., n_1 - 1\} \times \{0, ..., n_2 - 1\}$ tel que $I = [k_1\alpha + k_2\theta, j_1\alpha + j_2\theta]$.

Proposition 3 *Supposons $f_{\alpha,\theta}$ injective sur $\{-n_1 + 1, ..., n_1 - 1\} \times \mathbb{Z}$. Alors*
1. *l'un des sommets $(0, 0)$ ou $(n_1 - 1, 0)$ du rectangle $R(n_1, n_2)$ appartient à $\mathrm{or}(\mathcal{C}_1) \cup \mathrm{ter}(\mathcal{C}_1)$,*
2. *l'un des sommets $(0, 0)$ ou $(n_1 - 1, 0)$ du rectangle $R(n_1, n_2)$ appartient à $\mathrm{or}(\mathcal{C}_2) \cup \mathrm{ter}(\mathcal{C}_2)$.*

Preuve de la proposition 3.1. Soit $I = [k_1\alpha+k_2\theta, j_1\alpha+j_2\theta] \in \mathcal{C}_1$. Les couples de différence $(k_1 - j_1, k_2 - j_2)$ ont quatre signes possibles. Examinons l'une de ces possibilités, les autres se traitent de la même manière. Si $k_1 \geq j_1$ et $k_2 \leq j_2$ alors

$$I' = I + (n_1 - 1 - k_1)\alpha - k_2\theta = [(n_1 - 1)\alpha, (j_1 + n_1 - 1 - k_1)\alpha + (j_2 - k_2)\theta]$$

est un intervalle de même longueur que I et dont les extrémités sont dans $E(n_1, n_2)$, donc $I' \in \mathcal{C}_1$. Comme $(n_1 - 1, 0) = \mathrm{or}(I')$, on a bien $(n_1 - 1, 0) \in \mathcal{C}_1$.

2. Remarquons d'abord que si I appartient à $\mathcal{E}(n_1, n_2)$ alors le couple $\mathrm{ter}(I) - \mathrm{or}(I)$ ne dépend que de la longueur de I car l'application $f_{\alpha,\theta}$ est injective sur $\{-n_1 + 1, ..., n_1 - 1\} \times \mathbb{Z}$. Appelons u_1 la valeur commune de $\mathrm{ter}(I) - \mathrm{or}(I)$ pour $I \in \mathcal{C}_1$.
Soit $J \in \mathcal{C}_2$. En raisonnant sur les signes du couple $\mathrm{ter}(J) - \mathrm{or}(J)$ on voit comme dans **1** qu'il existe un intervalle J' appartenant à $\mathcal{E}(n_1, n_2)$, déduit de J par une translation et dont l'une des extrémités est 0 ou $(n_1 - 1)\alpha$. Si J' appartient à $\mathcal{J}(n_1, n_2)$ alors J' appartient à $\mathcal{C}_2$ sinon il est la réunion de $k \geq 2$ intervalles $I_1, ..., I_k$, appartenant à $\mathcal{J}(n_1, n_2)$ et comme J appartient à $\mathcal{C}_2$ les intervalles $I_1, ..., I_k$ appartiennent tous à $\mathcal{C}_1$.
Nous avons $\mathrm{ter}(J') - \mathrm{or}(J') = \mathrm{ter}(J) - \mathrm{or}(J)$ car J et J' ont la même longueur. De même, $\mathrm{ter}(I_1) - \mathrm{or}(I_1) = ... = \mathrm{ter}(I_k) - \mathrm{or}(I_k) = u_1$.
Supposons dans un premier temps que $f_{\alpha,\theta}$ soit injective sur $\mathbb{Z}^2$. Nous avons alors

$$\mathrm{ter}(J) - \mathrm{or}(J) = \mathrm{ter}(J') - \mathrm{or}(J') = ku_1,$$

donc $\mathrm{or}(J)$ et $\mathrm{or}(J)+ku_1$ appartiennent à $R(n_1, n_2)$. Comme u_1 est à coordonnées entière, nous en déduisons que $\mathrm{or}(J)+u_1$ appartient à $R(n_1, n_2)$ et le point $f_{\alpha,\theta}(\mathrm{or}(J)+u_1)$ appartient à l'intervalle J ce qui contredit l'appartenance de J à $\mathcal{J}(n_1, n_2)$.

Revenons à l'hypothèse initiale sur l'injectivité. Soit δ le minimum des longueurs des intervalles de $\mathcal{J}(n_1, n_2)$. Il existe α' et θ' appartenant à $\mathbb{T}^1$ tels que l'application $f_{\alpha',\theta'}$ soit injective sur $\mathbb{Z}^2$ et tel que pour tout (k_1, k_2) appartenant à $R(n_1, n_2)$, la distance des points $k_1\alpha + k_2\theta$ et $k_1\alpha' + k_2\theta'$ soit inférieure à $\delta/3$. Notons $E'(n_1, n_2) = f_{\alpha',\theta'}(R(n_1, n_2))$, $\mathcal{J}'(n_1, n_2)$ l'ensemble des intervalles déterminer par $\mathbb{T}^1\backslash E'(n_1, n_2)$ et $\mathcal{E}'(n_1, n_2)$ l'ensemble des intervalles à extrémités distinctes et appartenant à $E'(n_1, n_2)$. Le choix de δ montre que les points de $E(n_1, n_2)$ et de $E'(n_1, n_2)$ sont disposés dans le même ordre sur $\mathbb{T}^1$, par conséquent il existe une bijection σ de $\mathcal{E}(n_1, n_2)$ sur $\mathcal{E}'(n_1, n_2)$ tel que pour tout I appartenant à $\mathcal{E}(n_1, n_2)$ on ait

$$\mathrm{or}(I) = \mathrm{or}(\sigma(I)) \text{ et } \mathrm{ter}(I) = \mathrm{ter}(\sigma(I)).$$

Nous avons aussi $\sigma(J') = \sigma(I_1) \cup ... \cup \sigma(I_k)$. L'injectivité de $f_{\alpha',\theta'}$ montre alors que

$$ku_1 = \mathrm{ter}(\sigma(J')) - \mathrm{or}(\sigma(J')) = \mathrm{ter}(J') - \mathrm{or}(J') = \mathrm{ter}(J) - \mathrm{or}(J)$$

et nous pouvons conclure comme précédemment.$\square$

Démonstration de la proposition 2. Supposons que pour tout $n_2 \geq N$ le point 0 de $\mathbb{T}_1$, ne soit ni l'extrémité d'un intervalle de $\mathcal{C}_1(n_1, n_2)$ ni d'un intervalle de $\mathcal{C}_2(n_1, n_2)$.
Soit $n_2 \geq N$. Appelons J_1 et J_2 les deux intervalles jouxtant $(n_1 - 1)\alpha$. Nous avons

$$\begin{cases} \mathrm{or}(J_1) = (k_1, k_2) \in R(n_1, n_2), \ \mathrm{ter}(J_1) = (n_1 - 1, 0) \\ \mathrm{ter}(J_2) = (j_1, j_2) \in R(n_1, n_2), \ \mathrm{or}(J_2) = (n_1 - 1, 0). \end{cases}$$

Lorsque n_2 croît la quantité $k_1 + j_1$ reste constante tant que les intervalles de $\mathcal{J}(n_1, n_2)$ jouxtant $(n_1 - 1)\alpha$ ne changent pas et nous allons prouvé qu'elle décroît strictement lors d'une modification de l'un des intervalles jouxtant $(n_1 - 1)\alpha$, cela prouvera la proposition 2.
D'après la proposition précédente nous avons soit $J_1 \in \mathcal{C}_1(n_1, n_2)$ et $J_2 \in \mathcal{C}_2(n_1, n_2)$ soit $J_1 \in \mathcal{C}_2(n_1, n_2)$ et $J_2 \in \mathcal{C}_1(n_1, n_2)$. C'est deux cas se traitent de la même manière, plaçons nous dans le premier cas. Si $k_1 = n_1 - 1$ alors l'intervalle $J_1 - (n_1 - 1)\alpha$ appartient à $\mathcal{E}(n_1, n_2)$, a la même longueur que J_1 et pour extrémité 0 ce qui contredit l'hypothèse $n_2 \geq N$. Donc $k_1 < n_1 - 1$ (de même $j_1 < n_1 - 1$).
Soit n_2' le plus petit entier supérieur à n_2 tel que l'un des intervalles de $\mathcal{J}(n_1, n_2')$ jouxtant $(n_1 - 1)\alpha$ soit différent de J_1 ou J_2. Vu les hypothèses sur les longueurs de J_1 et J_2, seul l'intervalle J_2 peut avoir changé car lors d'un tel changement l'intervalle J_i apparaît comme la réunion d'un translaté d'un intervalle de $\mathcal{E}(n_1, n_2' - 1)$ et du nouvel intervalle. Appelons $J_2' = [(n_1 - 1)\alpha, j\alpha + n_2'\theta]$ ce nouvel intervalle. Nous avons $J_2 = J_2' \cup [j\alpha + n_2'\theta, j_1\alpha + j_2\theta]$ et l'intervalle

$$I = [j\alpha + n_2'\theta, j_1\alpha + j_2\theta] - j_2\theta = [j\alpha + (n_2' - j_2)\theta, j_1\alpha]$$

appartient à $\mathcal{E}(n_1, n_2' - 1)$ donc $\mathrm{long}(I) < \mathrm{long}(J_2)$ et $I \in \mathcal{C}_1(n_1, n_2' - 1)$; par conséquent

$$\mathrm{ter}(I) - \mathrm{or}(I) = \mathrm{ter}(J_1) - \mathrm{or}(J_1).$$

Pour la première composante cela donne

$$j_1 - j = n_1 - 1 - k_1,$$

d'où

$$j = j_1 - (n_1 - 1 - k_1) < j_1.\square$$

Remarque. On peut démontrer que les parties de $R(n_1, n_2)$, $\mathrm{or}(\mathcal{C}_1)$, $\mathrm{ter}(\mathcal{C}_1)$ $\mathrm{or}(\mathcal{C}_2)$ et $\mathrm{ter}(\mathcal{C}_2)$ sont rectangulaires .

8 Référence

[A,B] : P. Alessandri, V. Berthé, *Three distance theorems and combinatorics on words,* Enseig. Math. **44** (1998), 103-132 .

[G,L] : J.F. Geelen, R.J. Simpson, *A two dimensional Steinhaus theorem*, Australas. J. Combin. **8** (1993), 169-197.

[Ra] : T. V. Ravenstein, *The three gap theorem (Steinhaus theorem)*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **45** (1988), 360-370.

[Sa] : N. B. Slater, *Gaps and steps for the sequence* $n\theta \bmod 1$, Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967), 1115-1123.

[Sch] : W.M. Schmidt, *Two questions in Diophantine approximation,* Monatshefte für Mathematik **82** (1976), 237-245.