Groupes globalisants

Guido Ahumada, Bernard Brighi, Nicolas Chevallier et Augustin Fruchard

21 novembre 2017

Résumé

Un groupe de bijections G agissant sur un ensemble X est dit *à points fixes* (en abrégé, un GAF) si tout élément de G a au moins un point fixe. Le groupe G est dit *à point fixe global* (en abrégé, un GAG) s'il existe $x \in X$ fixé par tous les éléments de G. Le groupe G est dit *globalisant* si tout sous-groupe de G qui est un GAF est automatiquement un GAG. L'article explore quels sont les groupes globalisants. La situation dépend du groupe de bijections et de l'ensemble support X. Par exemple le groupe des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est globalisant pour $n \leqslant 3$ mais ne l'est plus pour $n \geqslant 4$. Le cas des isométries des espaces elliptiques et hyperboliques est aussi considéré, ainsi que celui des isométries de certains ensembles discrets.

Mots-clés : groupe de bijections, point fixe, isométrie, inégalité de la médiane, arbre.
Classification MSC2010 : 51M04, 51M09, 57M60, 20F65.

1 Introduction

Il est facile de trouver un groupe de bijections ayant chacune un point fixe mais sans point fixe commun, par exemple le groupe des rotations de la sphère de dimension deux, ou encore le sous-groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, engendré par le cycle (123) et la double transposition $(12)(45)$. Un tel groupe sera dit *excentrique*. Quelle information supplémentaire faut-il ajouter à l'existence d'un point fixe pour chaque bijection du groupe, pour pouvoir conclure à l'existence d'un point fixe global ? Cette information supplémentaire peut être la conservation d'une structure géométrique, la commutativité du groupe ou une autre propriété algébrique, l'unicité du point fixe de chaque bijection différente de l'identité, ou encore une combinaison des informations précédentes.

La conservation d'une structure géométrique peut souvent se formuler par : le groupe de bijections est un sous-groupe d'un groupe de bijections plus grand G. Le fait que cette information suffise à conclure à l'existence d'un point fixe global peut se voir comme une propriété du grand groupe G.

Nous dirons ainsi qu'un groupe G de bijections d'un ensemble X est *globalisant* s'il ne contient pas de sous-groupe excentrique. À notre connaissance la notion de groupe de bijections globalisant n'a pas été le sujet de travaux ni même été définie antérieurement. Notons que cette notion n'est pas intrinsèque au groupe mais dépend de son action en tant que groupe de bijections. L'objet de cet article est d'explorer quels sont les groupes de bijections globalisants et, dans une moindre mesure, de trouver des conditions suffisantes pour qu'un groupe de bijections ait un point fixe global.

Concernant les groupes globalisants, nous verrons que la situation est très diverse suivant la nature et la dimension de l'ensemble X et suivant la nature des bijections. Nous avons en particulier étudié en détails les groupes d'isométries de certains espaces classiques.

Lorsque X est un espace métrique, nous notons $\operatorname{Isom} X$ le groupe des isométries de X. Si de plus X est orientable, $\operatorname{Isom}^+ X$ désigne le sous-groupe des isométries préservant l'orientation.

Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on note $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n, $\mathbb{Z}^n$ le réseau des points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières, $\mathbb{H}_n$ l'espace hyperbolique de dimension n, $\mathbb{S}_n$ la sphère de dimension n, et $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ l'espace projectif de dimension n (nous avons choisi de ne mettre en exposant l'entier n que pour les produits cartésiens). Nos résultats concernant les groupes d'isométries de ces espaces classiques sont les suivants.

▷ Les groupes $\operatorname{Isom}\mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Isom}^+\mathbb{R}^n$ sont globalisants si et seulement si $n \leqslant 3$.

▷ Les groupes $\operatorname{Isom}\mathbb{H}_n$ et $\operatorname{Isom}^+\mathbb{H}_n$ sont globalisants si $n \leqslant 3$, et non globalisants si $n \geqslant 5$. Pour $n = 4$, la question est ouverte.

On pourrait croire que, pour chaque famille d'espaces $\mathbb{F}_n = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}_n$, $\mathbb{S}_n$ ou $\mathbb{Z}^n$, il existe un nombre entier critique n_0 tel que le groupe des isométries de $\mathbb{F}_n$ est globalisant si et seulement si $n \leqslant n_0$. C'est vrai pour $\mathbb{R}^n$ (avec $n_0 = 3$) et $\mathbb{H}_n$ (avec $n_0 = 3$ ou 4) mais faux pour $\mathbb{S}_n$ et pour $\mathbb{Z}^n$:

▷ le groupe $\operatorname{Isom}^+\mathbb{S}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$ ou 3,

▷ le groupe $\operatorname{Isom}\mathbb{Z}^n$ est globalisant pour tout $n \geqslant 1$, que $\mathbb{Z}^n$ soit muni de la norme euclidienne ou de la norme 1.

Un ingrédient important pour l'existence de points fixes globaux est l'inégalité dite *de la médiane*, cf. formule (1) au début de la partie 4. Les espaces euclidiens et hyperboliques satisfont cette inégalité, mais pas les espaces sphériques, ni les espaces projectifs.

Cette inégalité a été introduite par F. Bruhat et J. Tits dans [6] et leur résultat est le suivant : si un espace métrique (E, d) est complet et satisfait l'inégalité de la médiane, alors tout groupe d'isométries ayant une orbite bornée a un point fixe global, cf. théorème 4.2 et corollaire 4.3.

Nous montrons par ailleurs qu'un groupe d'isométries G sur un espace métrique complet et vérifiant l'inégalité de la médiane est globalisant dès qu'il possède un sous-groupe distingué globalisant H tel que G/H est monogène, cf. corollaire 4.7. Ceci explique pourquoi $\operatorname{Isom}\mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Isom}^+\mathbb{R}^n$ sont globalisants pour les mêmes valeurs de n ; il en est de même pour $\operatorname{Isom}\mathbb{H}_n$ et $\operatorname{Isom}^+\mathbb{H}_n$. L'inégalité de la médiane est essentielle pour ce résultat : nous verrons que $\operatorname{Isom}^+\mathbb{S}_3$ est globalisant alors que $\operatorname{Isom}\mathbb{S}_3$ ne l'est pas. Ainsi,

▷ le groupe $\operatorname{Isom}\mathbb{S}_n$ n'est globalisant que pour $n = 1$.

Concernant l'espace projectif, nous obtenons :

▷ le groupe $\operatorname{Isom}\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est globalisant si et seulement si $n = 1$;

▷ le groupe $\operatorname{Isom}^+\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est globalisant si $n = 1$, et non globalisant si $n = 2$ ou $n \geqslant 4$. Nous ne savons pas si $\operatorname{Isom}^+\mathbb{R}\mathbf{P}_3$ est globalisant ou non.

Un autre ingrédient important est l'existence de certains sous-groupes libres du groupe linéaire. Il sert à construire des sous-groupes excentriques. Un résultat très général d'A. Borel [5] assure cette existence, mais des résultats plus élémentaires fournissent des sous-groupes libres explicites qui sont suffisants pour nos besoins (cf. [17] Chap. VIII-26 et [23], Chap. 5).

La structure de l'article est la suivante. Dans la partie 2 nous présentons les notations et quelques résultats préliminaires. La partie 3 concerne les groupes de transformations affines et la partie 4 plus spécifiquement les isométries. Les groupes d'isométries des espaces classiques sont étudiés en détails dans la partie 5, d'abord les espaces euclidiens, puis hyperboliques, puis elliptiques. La partie 6 présente nos résultats sur des ensembles discrets : d'abord le groupe symétrique, puis le groupe $\operatorname{Isom}\mathbb{Z}^n$, et enfin des résultats concernant certains graphes et étendant un résultat de Serre sur les points fixes de groupes de type fini d'isométries d'un arbre, cf. [20]. Nous laissons plusieurs questions ouvertes à notre connaissance. Il est possible que certaines aient déjà leur réponse dans la littérature existante, ou que nos lecteurs trouvent des réponses. Dans ce cas, nous serions ravis d'en être informés !

La prépublication [1] est une version longue du présent article, contenant toutes les preuves des résultats utilisés, ainsi que des exercices.

2 Préliminaires

2.1 Notations

Groupes. Étant donné un groupe G, on note $H \leqslant G$ pour dire que H est un sous-groupe de G et $H \trianglelefteq G$ pour dire que c'est un sous-groupe distingué.

Si A est une partie d'un groupe G, on note $\langle A \rangle$ le sous-groupe de G engendré par A. Lorsque A contient un petit nombre d'éléments, on omettra les accolades. Le *commutateur* de f et g est $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$.

Étant donné un ensemble X, on note $\mathrm{Bij}\, X$ le groupe des bijections de X.

Espaces métriques. Étant donné un espace métrique (X, d), une *isométrie* $f : X \to X$ est une *bijection* telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. On note $\mathrm{Isom}\, X$ le groupe des isométries de X.

Pour un élément $x \in X$ et un réel $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in X \ ; \ d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et $B'(x, r) = \{y \in X \ ; \ d(x, y) \leqslant r\}$ la boule fermée de même rayon. Étant donnés deux points a et b de X on note $\mathrm{Med}\,(a, b)$ le médiateur de a et b :

$$\mathrm{Med}\,(a, b) = \{c \in X \ ; \ d(a, c) = d(b, c)\}.$$

Espaces affines et euclidiens. Étant donnée une bijection affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{f}$ désigne l'application linéaire associée, définie par $\overrightarrow{f}(x) = f(x) - f(0)$. L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme de groupes. En particulier, on a $[\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}] = \overrightarrow{[f, g]}$.

De même, si F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, alors $\overrightarrow{F}$ désigne le sous-espace vectoriel associé.

Étant donnée une partie $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{Aff}\, A$ l'espace affine engendré par A, i.e. l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ contenant A. De même que pour les groupes engendrés, si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, on notera $\mathrm{Aff}\,(a_1, \ldots, a_n)$ au lieu de $\mathrm{Aff}\,\big(\{a_1, \ldots, a_n\}\big)$.

Espaces hyperboliques. Nous utiliserons le modèle du demi-espace supérieur muni de la métrique de Poincaré.

2.2 GAF, GAG et groupe globalisant

Un *groupe de bijections* (X, G) est la donnée d'un ensemble X et d'un sous-groupe G de $\mathrm{Bij}\, X$. Étant donnée une bijection $g : X \to X$, son ensemble de points fixes est

$$\mathrm{Fix}\, g = \{x \in X \ ; \ g(x) = x\}.$$

Un groupe de bijections (X, G) est appelé un *groupe à points fixes* (en abrégé, un GAF) si $\mathrm{Fix}\, g$ est non vide pour tout $g \in G$. On dit que (X, G) est un *groupe à points fixes globaux* (en abrégé, un GAG) si

$$\mathrm{Fix}\, G := \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}\, g \neq \emptyset.$$

Un GAF qui n'est pas un GAG est dit *excentrique*. Avec le vocabulaire ci-dessus, on dit que (X, G) est *globalisant* si, pour tout sous-groupe $H \leqslant G$, on a

$$(X, H) \text{ GAF } \Leftrightarrow (X, H) \text{ GAG},$$

i.e. s'il ne contient pas de sous-groupe excentrique. Notons que tout sous-groupe d'un groupe globalisant est globalisant. Nous omettrons l'ensemble X lorsque le contexte sera clair. De la même manière nous dirons qu'une action ρ d'un groupe G sur un ensemble X est globalisante si $(X, \rho(G))$ est un groupe de bijections globalisant. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant, dont la preuve est immédiate.

Proposition 2.1. *Soit f, g deux bijections sur un ensemble X.*

a. *Si f et g commutent, alors $g(\operatorname{Fix} f) = \operatorname{Fix} f$.*

b. *Si $\operatorname{Fix} f$ est un singleton $\{x_0\}$, alors $x_0 \in \operatorname{Fix} g$ pour tout g commutant avec f.*

c. *Soit G un groupe de bijections sur X et soit $H \trianglelefteq G$. Pour tout $g \in G$, on a $g(\operatorname{Fix} H) = \operatorname{Fix} H$.*

On déduit immédiatement de **b**. une première condition suffisante pour qu'un groupe de bijections soit un GAG.

Proposition 2.2. *Soit G un groupe de bijections sur X. Si G est abélien et s'il existe $f_0 \in G$ ayant un point fixe unique, alors G est un* GAG.

Nous verrons dans la partie 3 que chacun des mots "abélien" et "unique" est nécessaire.

Terminons cette partie par des remarques de nature algébrique. Nous renvoyons à [1] pour plus de détails et des preuves complètes.

1. La notion "globalisant" est compatible avec le produit : si (X_1, G_1) et (X_2, G_2) sont deux groupes de bijections globalisants, on vérifie facilement que l'action du groupe produit $G_1 \times G_2$ sur $X_1 \times X_2$ est globalisante.

2. La notion "globalisant" n'est en revanche pas compatible avec l'induction de Frobenius [11]. Précisément, soit G un groupe, H un sous-groupe de G et R un système de réprésentants des classes modulo H. Une action de H sur un ensemble Y induit une action de G sur $X = R \times Y$ définie par $g(r, y) = (r', h(y))$ où $r' \in R$ et $h \in H$ sont déterminés de manière unique par $gr = r'h$, cf. [21]. On peut trouver des exemples où l'action (Y, H) est globalisante sans que l'action induite ne le soit.

3. On peut introduire une notion intrinsèque de globalisation : Un groupe est dit *super-globalisant* si, pour tout ensemble X et tout morphisme $\rho : G \to \operatorname{Bij} X$, le couple $(X, \rho(G))$ est globalisant. Cette notion a finalement un intérêt assez limité : en considérant l'action du groupe sur l'ensemble de ses parties, on peut montrer qu'un groupe est super-globalisant si et seulement s'il est monogène.

En revanche, le groupe additif $\mathbb{Q}$ est *finiment super-globalisant* au sens suivant : si X est un ensemble fini et $\rho : \mathbb{Q} \to \operatorname{Bij} X$ un morphisme, alors $(X, \rho(\mathbb{Q}))$ est globalisant.

3 Groupes de bijections affines

La structure affine est la plus fondamentale des structures géométriques ; il est donc naturel de débuter notre étude par les groupes de bijections affines de $\mathbb{R}^n$. Les résultats sont plutôt négatifs sauf en dimension 1.

Proposition 3.1. *Le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}$ est globalisant.*

Preuve. Soit H un groupe d'applications affines de $\mathbb{R}$ qui est un GAF. Comme une bijection affine de $\mathbb{R}$ différente de l'identité a au plus un point fixe, il suffit de montrer que H est abélien puis d'appliquer la proposition 2.2. Si f et g sont dans H alors le commutateur $[f, g]$, qui a aussi un point fixe, n'est pas une translation. Puisque le groupe linéaire est abélien, il ne peut s'agir que de l'identité. □

La commutativité du groupe linéaire et l'unicité des points fixes sont les deux ingrédients de la proposition précédente. Ces deux ingrédients sont caractéristiques de la dimension 1. En dimension plus grande, ajouter une seule des hypothèses de commutativité ou d'unicité des points fixes ne suffit pas à prouver qu'un GAF est un GAG comme le montrent les exemples 3.2 et 3.3 ci-dessous.

Exemple 3.2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit f et g les transvections affines de $\mathbb{R}^2$ données par

$$f(x, y) = (x + y + 1, y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = (x + ay, y).$$

On vérifie que le groupe $G = \langle f, g \rangle$ est abélien et excentrique. En particulier, on trouve que $\operatorname{Fix}(f^m g^n)$ est la droite d'équation $y = \frac{-m}{m+na}$.

Remarques.

1. Si on munit $\mathbb{R}^2$ de la distance discrète, donnée par $d(a, b) = 1$ si $a \neq b$ et $d(a, a) = 0$, alors le groupe G de l'exemple précédent est un groupe abélien excentrique d'isométries. L'exemple 4.9 de la prochaine partie est un exemple de groupe abélien excentrique d'isométries dans un espace vectoriel de Hilbert de dimension infinie. Par contre, le théorème 4.8 montre qu'il n'existe pas de groupe abélien excentrique d'isométries de l'espace euclidien ou hyperbolique de dimension finie.

2. Ce qui précède montre que le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 1$) est globalisant si et seulement si $n = 1$: pour $n \geqslant 3$, il suffit de compléter les applications f et g précédentes par l'identité sur les $n - 2$ dernières composantes, comme cela sera fait dans la preuve de la proposition 5.5.

Exemple 3.3. Soit $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et soit $f, g \in \operatorname{Bij} \mathbb{R}^2$ les bijections affines

$$f : x \mapsto \overrightarrow{f}(x) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \overrightarrow{g}(x) + b,$$

où $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont les éléments de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ayant pour matrices :

$$\operatorname{Mat}(\overrightarrow{f}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Mat}(\overrightarrow{g}) = B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors le groupe $G_1 = \langle f, g \rangle$ est excentrique. Plus précisément, tout élément de $G_1 \setminus \{\mathbf{id}\}$ a un unique point fixe mais G_1 n'est pas un GAG.

La preuve repose sur les deux résultats suivants.

1. Soit G_0 le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ engendré par les matrices A et B précédentes. Alors G_0 est libre et toute matrice $M \in G_0 \setminus \{I\}$ a une trace différente de 2, cf. [17] Chapitre VIII ou [1]. On en déduit que 1 n'est pas valeur propre de M pour toute matrice $M \in G_0 \setminus \{I\}$, puisque $\det M = 1$.

2. Soit h une bijection affine sur $\mathbb{R}^n$ telle que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{h}$. Alors $\operatorname{Fix} h$ est un singleton. En effet, on a $h(x) = x \Leftrightarrow x - \overrightarrow{h}(x) = h(0) \Leftrightarrow x = (\mathbf{id} - \overrightarrow{h})^{-1}(h(0))$.

4 Groupes d'isométries

4.1 L'inégalité de la médiane

Le théorème du point fixe de Bruhat-Tits [6] donne une condition suffisante pour qu'un groupe d'isométries sur un espace métrique soit un GAG : il suffit que l'espace vérifie l'inégalité de la médiane ci-dessous et que le groupe possède une orbite bornée.

Définition 4.1. On dit qu'un espace métrique (X, d) *vérifie l'inégalité de la médiane* si

$$\forall x, y \in X \; \exists m \in X \; \forall z \in X \quad d(z, m)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\big(d(z, x)^2 + d(z, y)^2\big) - \tfrac{1}{4}\, d(x, y)^2. \tag{1}$$

Il est facile de montrer que le point m est unique et que $d(x,m) = d(y,m) = \frac{1}{2}\,d(x,y)$. On dit que m est *le milieu de* $\{x,y\}$ et on le note $m(x,y)$.

Lorsque X est un espace euclidien, ou plus généralement préhilbertien, (1) est en fait une égalité, appelée l'identité du parallélogramme, et m est le milieu usuel du segment $[x,y]$. Réciproquement, il est connu qu'un espace vectoriel normé vérifiant (1) est nécessairement préhilbertien.

Un arbre combinatoire muni de sa distance usuelle ne vérifie pas (1) (une arête n'a pas de milieu) mais sa réalisation comme espace métrique réel la vérifie. Les arbres sont d'ailleurs les seuls graphes avec cette propriété. Les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle négative, en particulier les espaces hyperboliques munis de leur distance usuelle, satisfont (1), cf. [6].

Le théorème du point fixe de Bruhat-Tits s'énonce ainsi.

Théorème 4.2. [6] *Soit G un groupe d'isométries d'un espace métrique complet (X,d) vérifiant l'inégalité de la médiane (1). S'il existe une partie bornée non vide de X invariante par tous les éléments de G, alors G est un* GAG.

Pour une preuve, voir [1]. On en déduit immédiatement le

Corollaire 4.3. *Soit G un groupe d'isométries d'un espace affine euclidien ou d'un espace hyperbolique. Si G admet une orbite bornée, alors G est un* GAG.

Certains des résultats qui suivent serviront dans la partie 6.

Définition 4.4. Soit (E,d) un espace métrique complet vérifiant (1). Une partie C de E est dite *à moitié convexe* si, pour tous $x,y \in C$, le milieu de $\{x,y\}$ est dans C.

On peut montrer qu'une partie fermée d'un espace de Banach est à moitié convexe si et seulement si elle est convexe au sens usuel.

La proposition qui suit démontre l'existence et l'unicité d'une "projection orthogonale" sur l'ensemble de points fixes d'un groupe d'isométries. Nous l'avons scindée en trois énoncés qui ont leur propre intérêt. On rappelle que $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$.

Proposition 4.5. *Soit (E,d) un espace métrique complet vérifiant* (1).

a. *Si $C \subset E$ est une partie fermée et à moitié convexe de E alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x,C) = d(x,y)$. On note ce point $y = \pi_C x$.*

b. *Si g est une isométrie de E, alors $\operatorname{Fix} g$ est fermée et à moitié convexe.*

c. *Si G est un groupe d'isométries de E, alors $\operatorname{Fix} G$ est fermée et à moitié convexe.*

Preuve. **a**. Posons $\delta = d(x,C)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in C$ tel que $d(x,y) < \delta + \varepsilon$. Si $y,z \in C$ satisfont cette inégalité, puisque $d\big(x, m(y,z)\big) \geqslant \delta$, (1) donne alors

$$d(y,z)^2 \leqslant 8\delta\varepsilon + 4\varepsilon^2. \tag{2}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $y_n \in C$ tel que $d(x,y_n) < \delta + \frac{1}{n}$. D'après ce qui précède, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est de Cauchy, donc converge vers un point $y \in C$ vérifiant $d(x,y) = \delta$, d'où l'existence. L'inégalité (2) montre aussi l'unicité.

b. et **c**. Vérification facile. $\square$

Théorème 4.6. *Soit (E,d) un espace métrique complet vérifiant (1), soit G un groupe d'isométries de E et soit $H \trianglelefteq G$ tel que G/H est monogène. Si G est un* GAF *et H un* GAG, *alors G est un* GAG.

Preuve. Soit $\varepsilon \in G$ tel que εH engendre G/H. Notons $F = \operatorname{Fix} H$. Puisque H est distingué dans G, on a $g(F) = F$ pour tout $g \in G$ d'après la proposition 2.1.c, en particulier $\varepsilon(F) = F$.

Soit $x \in \operatorname{Fix} \varepsilon$. Par unicité de la projection orthogonale et puisque ε est une isométrie, on a $\varepsilon(\pi_F x) = \pi_{\varepsilon(F)}\varepsilon(x) = \pi_F x$, donc $\pi_F x \in \operatorname{Fix} \varepsilon$, or $G = \langle \varepsilon, H\rangle$, donc $\pi_F x \in \operatorname{Fix} G$. □

Corollaire 4.7. *Soit* (E, d) *métrique complet vérifiant* (1) *et soient* $H \trianglelefteq G \leqslant \operatorname{Isom} E$ *tels que* G/H *est résoluble et fini. Si* H *est globalisant, alors* G *est globalisant. En particulier un groupe d'isométries de* E *est globalisant dès qu'il contient un sous-groupe globalisant d'indice* 2.

Preuve. On suppose d'abord que le quotient G/H est monogène. Soit $G_1 \leqslant G$ un GAF ; alors $H_1 = G_1 \cap H$ est un GAF, donc un GAG puisque H est globalisant. Par ailleurs G_1/H_1 est isomorphe à un sous-groupe de G/H, donc monogène, donc G_1 est un GAG d'après le théorème 4.6.

Comme les groupes abéliens finis sont produits de groupes monogènes, sous l'hypothèse G/H résoluble et fini, il existe une suite finie $H = H_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G$ telle que, pour chaque $i = 1, \dots, n$, le quotient H_i/H_{i-1} est monogène. On applique alors successivement le résultat aux quotients monogènes.

Pour la dernière assertion, si H est un sous-groupe d'indice 2 de G, alors H est distingué dans G et G/H est cyclique d'ordre 2. □

Remarque. Le fait que l'espace ambiant vérifie (1) est essentiel : nous verrons dans la partie 5.3 que $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ est globalisant, alors que $\operatorname{Isom} \mathbb{S}_3$ ne l'est pas.

4.2 Sous-groupes résolubles : les cas euclidien et hyperbolique

On fixe un entier $n \geqslant 0$. La notation $\mathbb{F}_n$ désignera ou bien l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ou bien l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_n$. Nous utiliserons que $\mathbb{F}_n$ vérifie (1).

Théorème 4.8. *Soit* G *un groupe* abélien *d'isométries de* $\mathbb{F}_n$*. Si* G *est un* GAF*, alors* G *est un* GAG.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur la dimension n. Pour $n = 0$ le résultat est trivial. À présent, soit $n \geqslant 1$ et supposons la propriété vraie pour tout $k < n$.

Si $G = \{\mathbf{id}\}$, on a fini. Sinon, soit $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Alors $F = \operatorname{Fix} f$ est un sous-espace (affine ou hyperbolique) strict de $\mathbb{F}_n$, de dimension $k < n$. Soit $g \in G$. Comme f et g commutent, on a $g(F) = F$ d'après la proposition 2.1.a. Ainsi, pour tout $g \in G$, la restriction de g à F, notée $g_{|F}$, est bien définie de F dans F et c'est une isométrie de F qui est lui-même isométrique à $\mathbb{F}_k$.

Par hypothèse, $\operatorname{Fix} g$ est non vide. Soit $x_g \in \operatorname{Fix} g$ et soit $y_g = \pi_F x_g$. Puisque g est une isométrie et par unicité de la projection orthogonale, on a $g(y_g) = \pi_{g(F)} g(x_g) = \pi_F x_g = y_g$. Ainsi, pour tout $g \in G$, $g_{|F}$ a au moins un point fixe y_g.

Soit $G_F = \{g_{|F} \; ; \; g \in G\}$. Alors G_F est un GAF sur un espace de dimension $k < n$, donc est un GAG par hypothèse de récurrence. Comme $\operatorname{Fix} G_F = F \cap \operatorname{Fix} G$, on en déduit que $\operatorname{Fix} G$ est non vide, donc G est un GAG. □

L'exemple qui suit montre que la dimension finie est nécessaire.

Exemple 4.9. Soit $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'espace des suites réelles de carré sommable ; c'est un espace hilbertien. Soit h_k la symétrie de centre 1 sur la k-ième composante, i.e. l'isométrie de E définie par

$$h_k(x_0, x_1, \dots) = (x_0, \dots, x_{k-1}, 2 - x_k, x_{k+1}, \dots).$$

Soit $G_n = \langle h_0, \dots, h_n\rangle$ et soit $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Il est immédiat que G est abélien. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de E et $s_n = \sum_{k=0}^{n} e_k$. On a $s_n \in \operatorname{Fix} f$ pour tout $f \in G_n$, donc G est un GAF. Par l'absurde, si G était un GAG et si $x = (x_0, x_1, \dots) \in \operatorname{Fix} G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aurait $x_n = 1$, mais la suite constante égale à 1 n'est pas dans E. Ainsi G est excentrique.

Le théorème 4.8 peut être généralisé en changeant le mot “abélien” en “résoluble”.

Théorème 4.10. *Soit G un groupe* résoluble *d'isométries de $\mathbb{F}_n$. Si G est un* GAF, *alors G est un* GAG.

Preuve. Rappelons qu'un groupe G est dit *résoluble* s'il existe une suite finie et croissante de sous-groupes, $\{\mathbf{e}_G\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_p = G$ (i.e. chacun distingué dans le suivant) tels que les quotients H_{k+1}/H_k sont tous abéliens. L'*indice de résolubilité de G* est le plus petit entier $p \geqslant 0$ vérifiant cette propriété. Cet entier est atteint par exemple en prenant la suite des groupes dérivés : on pose $G_0 = G$ puis, pour $k \geqslant 0$, $G_{k+1} = G'_k = [G_k, G_k]$, le groupe engendré par les commutateurs de G_k. Pour finir, on choisit $H_k = G_{p-k}$.

La preuve se fait par récurrence sur l'indice de résolubilité de G. La propriété est trivialement vraie pour $p = 0$. Supposons-la vraie pour tout groupe d'indice de résolubilité $p-1$ et montrons-la pour G.

Soit $G_1 = [G, G]$. Puisque G est un GAF, G_1 est un GAF, donc un GAG par hypothèse de récurrence, donc $F = \operatorname{Fix} G_1$ est non vide. Puisque G_1 est distingué dans G, on vérifie que $g(F) = F$ pour tout $g \in G$.

Maintenant le groupe G/G_1 agit naturellement sur F : si $\overline{g} = \{gh \; ; \; h \in G_1\}$ est un élément de G/G_1 et si $x \in F$, alors $\overline{g}(x) := g(x)$ ne dépend pas du choix du représentant $g \in \overline{g}$ puisque $h(x) = x$ pour tout $h \in G_1$.

Nous affirmons que le couple $(F, G/G_1)$ est un GAF. En effet, puisque G est un GAF, si $g \in G$ et $x \in \operatorname{Fix} g$ alors, comme dans la preuve du théorème 4.8, par unicité de la projection orthogonale, la projection $\pi_F x$ est aussi dans $\operatorname{Fix} g$. Ainsi, $F \cap \operatorname{Fix} g \neq \emptyset$, ce qui entraîne que $\operatorname{Fix} \overline{g} \neq \emptyset$ pour tout $\overline{g} \in G/G_1$ vu comme isométrie de F.

Comme G/G_1 est un groupe abélien et que F est un espace (euclidien ou hyperbolique) de dimension finie, G/G_1 est un GAG d'après le théorème 4.8. Tout point fixe global $x \in F$ de G/G_1 est alors fixé par n'importe quel élément de G, donc G est lui-même est un GAG. □

5 Groupes d'isométries des espaces classiques

Dans toute cette partie, n désigne un entier strictement positif.

5.1 Le cas des espaces euclidiens

Désignons par $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^n$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne usuelle. Il est connu que les éléments de $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^n$ sont des applications affines ; cf.[1] exercice 7.9 pour une preuve concise. On désigne par $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ le sous-groupe des isométries préservant l'orientation.

Dans cette partie, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^n$ *est globalisant si et seulement si* $n \leqslant 3$.

Nous laissons au lecteur le plaisir de montrer que $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^2$ est globalisant. Nous montrerons successivement que $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^3$ est globalisant, puis que $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ ne l'est pas, ce qui entraînera que $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^n$ ne l'est pas pour $n \geqslant 4$.

Le cas de la dimension 3

Rappelons que les éléments $f \in \operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ tels que $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$ sont l'identité et les rotations autour d'un axe $\operatorname{Fix} f$. Ceux ayant un ensemble de points fixes vide sont les translations et les vissages (un *vissage* est le produit commutatif d'une rotation r et d'une translation de vecteur non nul et parallèle à l'axe de r). Le lemme suivant est une étape clé pour prouver que $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^3$ est globalisant. On retrouve cette même étape pour prouver que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique de dimension 3 est globalisant, voir le lemme 5.9.

Lemme 5.2. *Si $f, g \in \mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ sont tels que $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g = \emptyset$, alors il existe $h \in \langle f, g\rangle$ tel que $\mathrm{Fix}\, h = \emptyset$.*

Preuve. Si $\mathrm{Fix}\, f$, $\mathrm{Fix}\, g$ ou $\mathrm{Fix}\,(f^{-1}g)$ est vide, on a fini. Sinon, soit $a \in \mathrm{Fix}\,(f^{-1}g)$ et soit $b = f(a) = g(a)$. On a $b \neq a$ puisque $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g = \emptyset$. Alors pour tout $c \in \mathrm{Fix}\, f$ on a $d(a,c) = d(f(a), f(c)) = d(b,c)$. Ainsi $\mathrm{Fix}\, f$ est dans $\mathrm{Med}\,(a,b)$, le plan médiateur de a et b. Il en est de même de $\mathrm{Fix}\, g$. Puisque $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g = \emptyset$ c'est que $\mathrm{Fix}\, f$ et $\mathrm{Fix}\, g$ sont deux droites parallèles. Il s'ensuit que $\overrightarrow{[f,g]} = \mathbf{id}$. Si f et g commutaient, on aurait $f(\mathrm{Fix}\, g) = \mathrm{Fix}\, g$ d'après la proposition 2.1.a., en contradiction avec $f \neq \mathbf{id}$. Ainsi $[f,g]$ est une translation non triviale, donc $\mathrm{Fix}\,[f,g] = \emptyset$. □

Proposition 5.3. *Le groupe $\mathrm{Isom}\, \mathbb{R}^3$ est globalisant.*

Preuve. D'après le corollaire 4.7, il suffit de montrer que $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ est globalisant. Soit $G \leqslant \mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^3$ un GAF. On doit montrer que $\mathrm{Fix}\, G \neq \emptyset$. Le lemme 5.2 implique déjà $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g \neq \emptyset$ pour tous $f, g \in G$.

Si $\mathrm{Fix}\, f = \mathrm{Fix}\, g$ pour tous $f, g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, on a fini. Sinon, soit $f, g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ avec $\mathrm{Fix}\, f \neq \mathrm{Fix}\, g$, soit Π le plan contenant les droites $\mathrm{Fix}\, f$ et $\mathrm{Fix}\, g$ et soit $\omega \in \Pi$ le point d'intersection de ces droites. Il nous reste à montrer que $\omega \in \mathrm{Fix}\, h$ pour tout $h \in G$. Par l'absurde, sinon, soit $h \in G$ tel que $\omega \notin \mathrm{Fix}\, h$, soit α tel que $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, h = \{\alpha\}$, et soit β tel que $\mathrm{Fix}\, g \cap \mathrm{Fix}\, h = \{\beta\}$. Alors on a $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta \in \Pi \cap \mathrm{Fix}\, h$, donc $\mathrm{Fix}\, h \subset \Pi$. En passant, on a montré

$$\forall k \in G \quad (\omega \notin \mathrm{Fix}\, k \Rightarrow \mathrm{Fix}\, k \subset \Pi). \tag{3}$$

Toujours avec le même h, soit $\delta \in \mathrm{Fix}\,(fh) \setminus \{\alpha\}$. On a $\delta \notin \mathrm{Fix}\, h$ (sinon $\delta \in \mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, h$, mais $\delta \neq \alpha$) donc $\mathrm{Fix}\, h \subset \mathrm{Med}\,(\delta, h(\delta))$. De même $\mathrm{Fix}\, f = \mathrm{Fix}\, f^{-1} \subset \mathrm{Med}\,(\delta, f^{-1}(\delta)) = \mathrm{Med}\,(\delta, h(\delta))$, ce qui entraîne $\mathrm{Med}\,(\delta, h(\delta)) = \Pi$. Il s'ensuit que $\delta \notin \Pi$ et donc que $\mathrm{Fix}\,(fh) \not\subset \Pi$. Maintenant la contraposée de (3) entraîne $\omega \in \mathrm{Fix}\,(fh)$, mais ceci implique $\omega \in \mathrm{Fix}\, h$, une contradiction. □

Le cas des dimensions supérieures

Proposition 5.4. *Le groupe $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ n'est pas globalisant. Par conséquent le groupe $\mathrm{Isom}\, \mathbb{R}^4$ n'est pas globalisant.*

Preuve. Nous reproduisons ci-dessous la construction par Wagon [23] d'un sous-groupe libre de rang 2 dans SO_4 dont l'action sur la sphère $\mathbb{S}_3$ est sans point fixe. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta$ soit transcendant, par exemple $\theta = 1$, et soit σ et τ les éléments de SO_4, de matrices respectivement

$$S_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Un examen approfondi montre les faits suivants.
▷ Tout mot non trivial du sous-groupe $\langle \sigma, \tau \rangle$, i.e. tout élément $w = a_1 \dots a_n$ avec $n \geqslant 1$, $a_i \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ et $a_i a_{i+1} \neq \mathbf{id}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} P & -Q & -R & -S \\ Q & P & -S & -R \\ R & S & P & -Q \\ S & -R & Q & P \end{pmatrix}$$

où P, R sont des polynômes en $\cos\theta$ à coefficients entiers et Q, S des produits de tels polynômes avec $\sin\theta$.

▷ Le degré de P est égal à n, la longueur du mot w.
▷ Le polynôme caractéristique de w est $\lambda^4 - 4P\lambda^3 + (4P^2+2)\lambda^2 - 4P\lambda + 1$.

Il s'ensuit, d'une part que le sous-groupe G_0 de SO_4 engendré par σ et τ est libre, et d'autre part que 1 n'est pas valeur propre de w pour tout $w \in G_0 \setminus \{\mathbf{id}\}$.

Choisissons à présent les rotations affines σ et $\widetilde{\tau} : x \mapsto \tau x + a$ avec $a \neq 0$, par exemple $a = (1,0,0,0)$. Soit $G = \langle \sigma, \widetilde{\tau} \rangle$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^4$ engendré par σ et $\widetilde{\tau}$. Alors G est libre et $\mathrm{Fix}\, g$ est un singleton pour tout $g \in G$. Comme $\mathrm{Fix}\, \sigma \cap \mathrm{Fix}\, \tau = \emptyset$, on en déduit que G est excentrique. □

Remarque. L'existence de sous-groupes libres de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et de SO_4 dont les éléments, hormis l'identité, n'admettent jamais 1 pour valeur propre, est l'ingrédient essentiel des contructions de sous-groupes excentriques d'applications affines ou d'isométries affines (exemple 3.3 et proposition 5.4). Nous avons utilisé des exemples explicites de tels sous-groupes. Ces sous-groupes, bien que parfois difficiles à exhiber, ne sont pas exceptionnels. En effet, on peut montrer grâce au théorème de Baire que, si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, alors l'ensemble des couples d'éléments de G qui engendrent un groupe libre est soit vide, soit contient un G_δ dense, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts denses de $G \times G$. On obtient le même résultat en ajoutant la contrainte supplémentaire sur la valeur propre 1. Ajoutons qu'A. Borel a prouvé un résultat très général englobant les constructions que nous avons utilisées, cf. [5] :

Si G est un groupe algébrique linéaire semi-simple défini sur $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des n-uplets de $G(\mathbb{R})^n$ engendrant un groupe libre contient un G_δ dense.

Proposition 5.5. *Pour tout entier $n \geqslant 4$, le groupe $\mathrm{Isom}\, \mathbb{R}^n$ n'est pas globalisant.*

Preuve. Pour $n \geqslant 5$, il suffit de compléter par $\mathbf{id}_{n-4}$ sur les $n-4$ dernières composantes : soit σ_n et τ_n les éléments de $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{R}^n$ de matrices

$$S_n = \begin{pmatrix} S_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{id}_{n-4} \end{pmatrix} \text{ et } T_n = \begin{pmatrix} T_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{id}_{n-4} \end{pmatrix}$$

et soit $G = \langle \sigma_n, \widetilde{\tau}_n \rangle$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}\, \mathbb{R}^n$ engendré par σ_n et $\widetilde{\tau}_n : x \mapsto \tau_n x + a$ avec $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On vérifie que G est libre et excentrique. □

Cas des normes non euclidiennes.

Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme quelconque, d'après le théorème de Mazur-Ulam, les éléments du groupe G des isométries associées à cette norme sont des applications affines, cf. [15] ou [1] exercice 7.11 et sa solution. Le groupe $\overrightarrow{G}$ des parties linéaires des éléments de G est fermé et borné dans l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, donc $\overrightarrow{G}$ est compact. Par un argument classique, on peut construire un produit scalaire invariant par les éléments de $\overrightarrow{G}$. Ainsi G peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{Isom}\, \mathbb{R}^n$ et G est donc globalisant si $n \leqslant 3$. Lorsque $n \geqslant 4$, la proposition 5.5 ne permet pas de conclure et en effet il se peut que G soit globalisant pour certaines normes.

Proposition 5.6. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit G le groupe des isométries associées à N. Si le groupe linéaire associé $\overrightarrow{G}$ est fini, alors G est globalisant. En particulier, si N est l'une des normes N_p usuelles avec $p \in [1,+\infty] \setminus \{2\}$, alors G est globalisant.*

Preuve. Soit H un sous-groupe GAF de G. Comme la seule translation dans H est $\mathbf{id}$, le morphisme $\varphi : H \to \overrightarrow{G}$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est injectif, donc H est fini. On vérifie que le point $\omega = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(\overrightarrow{0})$ est fixé par tous les éléments de H, donc H est un GAG.

Si $N = N_p$ alors $\overrightarrow{G}$ contient toutes les permutations des axes, donc un produit scalaire invariant par les éléments de $\overrightarrow{G}$ est nécessairement proportionnel au produit scalaire euclidien usuel. La sphère euclidienne unité touche la boule unité pour N_p exactement aux sommets de l'« hyper-octaèdre » $E = \{\pm \overrightarrow{e}_1, \dots, \pm \overrightarrow{e}_n\}$. E est invariant par $\overrightarrow{G}$, donc $\overrightarrow{G}$ est fini. □

5.2 Le cas des espaces hyperboliques

Nous utilisons le modèle du demi-espace de Poincaré : $\mathbb{H}_n = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni de la métrique de Poincaré donnée par $ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2$.

Théorème 5.7. *Si $n \leqslant 3$, alors* $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ *est globalisant. Si $n \geqslant 5$, alors* $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ *n'est pas globalisant.*

Nous conjecturons que le groupe $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_4$ n'est pas globalisant.

Nous montrerons tout d'abord que $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ n'est pas globalisant si $n \geqslant 5$, puis que $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$ est globalisant, et nous en déduirons que $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_2$ est globalisant. Une preuve directe de ce dernier résultat est aussi possible. Le cas $n = 1$ est évident.

Le cas des dimensions supérieures à 5

Proposition 5.8. *Pour $n \geqslant 5$, le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ *n'est pas globalisant.*

Preuve. À chaque isométrie de l'espace euclidien de dimension $n-1$, on associe une isométrie de l'espace hyperbolique de dimension n de la manière suivante : si f est une isométrie de $\mathbb{R}^{n-1}$ alors l'application $F : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$ définie par $F(x,t) = (f(x),t)$ est une isométrie de $\mathbb{H}_n$. L'application $f \in \operatorname{Isom} \mathbb{R}^{n-1} \mapsto F \in \operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ est un morphisme de groupes et on a $\operatorname{Fix} F = \operatorname{Fix} f \times \mathbb{R}_{>0}$. Par conséquent l'image par ce morphisme d'un sous-groupe excentrique de $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^{n-1}$ est un sous-groupe excentrique de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$. Puisque, pour $n \geqslant 5$, $\operatorname{Isom} \mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas globalisant, $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_n$ ne l'est pas non plus. □

Le cas de la dimension 3

On note $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$ le groupe des isométries de $\mathbb{H}_3$ et $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ celui des isométries positives. Nous commençons par l'analogue hyperbolique du lemme 5.2 sur $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}^3$.

Lemme 5.9. *Soit $f, g \in \operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$. Si $\operatorname{Fix} f \cap \operatorname{Fix} g = \emptyset$, alors il existe $h \in \langle f, g \rangle$ tel que* $\operatorname{Fix} h = \emptyset$.

Preuve. La démonstration se fait en plusieurs étapes en montrant que l'une des isométries f, g, $f^{-1}g$, $gfg^{-1}f^{-1}$ ou $gfgf^{-1}$ n'a pas de point fixe.

Soit $h = f^{-1}g$; si $\operatorname{Fix} f, \operatorname{Fix} g$ ou $\operatorname{Fix} h$ est vide, on a fini, sinon soit $x_0 \in \operatorname{Fix} h$. On a $f(x_0) = g(x_0)$ et, comme $\operatorname{Fix} f \cap \operatorname{Fix} g$ est vide, on a $f(x_0) = g(x_0) \neq x_0$. Soit $P_0 = \operatorname{Med}(x_0, f(x_0))$; c'est un plan hyperbolique, cf. [1] lemme 8.6. Comme f et g sont des isométries, $\operatorname{Fix} f$ et $\operatorname{Fix} g$ sont inclus dans P_0.

Nous affirmons que $\operatorname{Fix} g \cap f(\operatorname{Fix} g)$ est vide. Sinon, soit $x_1 \in \operatorname{Fix} g$ tel que $y_1 = f(x_1) \in \operatorname{Fix} g$. On sait que les ensembles de points fixes des éléments de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ sont des droites hyperboliques lorsqu'ils ne sont pas vides. Par conséquent il existe un unique point $z_1 = \pi_{\operatorname{Fix} f} x_1$ réalisant la distance de x_1 à $\operatorname{Fix} f$. Les trois points x_1, y_1 et z_1 sont distincts puisque $\operatorname{Fix} f \cap \operatorname{Fix} g$ est vide. Notons γ la géodésique passant par x_1 et z_1. Comme x_1 et $\operatorname{Fix} f$ sont dans le plan P_0, γ est une droite hyperbolique du plan P_0, orthogonale à $\operatorname{Fix} f$ en z_1. Comme $f(x_1) \in \operatorname{Fix} g \subset P_0$, le plan P_0 est stable par f. Par conséquent $f(\gamma)$ est une droite hyperbolique de P_0. Elle est aussi orthogonale à $\operatorname{Fix} f$ en z_1 car f conserve les angles. Il en résulte que $f(\gamma) = \gamma$ et que la restriction de f à γ est une symétrie par rapport à z_1. Comme $y_1 = f(x_1) \in f(\gamma) = \gamma$, y_1 est le symétrique sur γ de x_1 par rapport à z_1. Il s'ensuit que $\gamma = \operatorname{Fix} g$, et donc que z_1 appartient à $\operatorname{Fix} g$ et $\operatorname{Fix} f$, en contradiction avec $\operatorname{Fix} f \cap \operatorname{Fix} g$ vide.

Soit $\widetilde{g} = fgf^{-1}$; c'est une rotation hyperbolique de même angle θ que g au signe près (l'angle n'est défini qu'au signe près). On a $\operatorname{Fix} \widetilde{g} = f(\operatorname{Fix} g)$ donc $\operatorname{Fix} \widetilde{g} \cap \operatorname{Fix} g = \emptyset$ d'après ce qui précède. De même que précédemment, si $\operatorname{Fix}(g\widetilde{g}^{-1})$ est vide on a fini ; sinon, avec $x_1 \in \operatorname{Fix}(g\widetilde{g}^{-1})$, le plan $P = \operatorname{Med}(x_1, g(x_1))$ contient $\operatorname{Fix} g$ et $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$.

Nous allons montrer que $\operatorname{Fix}(g\widetilde{g})$ ou $\operatorname{Fix}(g\widetilde{g}^{-1})$ est vide.

Soit σ_P la réflexion par rapport au plan P. Il existe un plan hyperbolique S contenant la droite $\operatorname{Fix} g$ et faisant un angle $\pm\frac{\theta}{2}$ avec P tel que $g = \sigma_S \sigma_P$, cf. [1] lemme 8.12 pour une preuve.

Comme $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$ est aussi inclus dans P, on peut trouver deux plans hyperboliques $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$, contenant $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$ et faisant les angles $\pm\frac{\theta}{2}$ avec le plan P. On a $\widetilde{g}$ ou $\widetilde{g}^{-1} = \sigma_P \sigma_{\widetilde{S}}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\widetilde{g} = \sigma_P \sigma_{\widetilde{S}}$; on a alors $\widetilde{g}^{-1} = \sigma_P \sigma_{\widetilde{S}'}$.

Nous clamons que l'une au moins des intersections $S \cap \widetilde{S}$ ou $S \cap \widetilde{S}'$ est vide. En effet, quitte à conjuguer par un élément de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$, on peut supposer que $\operatorname{Fix} g$ est une demi-droite verticale d'extrémité a dans le plan horizontal $\partial \mathbb{H}_3$; P et S sont alors des demi-plans verticaux contenant la demi-droite $\operatorname{Fix} g$. La frontière de P est une droite affine Δ du plan horizontal qui contient a ainsi que les extrémités b et c de la droite hyperbolique $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$ (il se pourrait que la droite hyperbolique $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$ n'ait qu'une extrémité ; elle est alors verticale et la suite se simplifie). Comme les droites hyperboliques $\operatorname{Fix} g$ et $\operatorname{Fix} \widetilde{g}$ ne se rencontrent pas, les points b et c sont du même côté de a sur la droite Δ, donc un des points, disons b, est entre a et c. Soit V le plan vertical contenant b et parallèle au plan S. Comme les angles des plans hyperboliques $\widetilde{S}$ et $\widetilde{S}'$ avec le plan P sont $\pm\frac{\theta}{2}$, l'un des plans $\widetilde{S}$ ou $\widetilde{S}'$ est tangent à V. Supposons que ce soit $\widetilde{S}$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer $\widetilde{g}$ par $\widetilde{g}^{-1}$. Le plan $\widetilde{S}$ ne rencontre pas S car il est situé d'un seul côté de V et son adhérence contient c alors que celle de S contient a. On a $g\widetilde{g} = \sigma_S \sigma_P \sigma_P \sigma_{\widetilde{S}} = \sigma_S \sigma_{\widetilde{S}}$.

On conclut en montrant que $\operatorname{Fix}(\sigma_S \sigma_{\widetilde{S}})$ est vide. Par l'absurde, sinon, soit $x \in \operatorname{Fix}(\sigma_S \sigma_{\widetilde{S}})$; ainsi $\sigma_S(x) = \sigma_{\widetilde{S}}(x)$. Puisque $\operatorname{Fix} \sigma_{\widetilde{S}} \cap \operatorname{Fix} \sigma_S = S \cap \widetilde{S} = \emptyset$, on aurait $\sigma_S(x) \neq x$, donc les plans hyperboliques S et $\widetilde{S}$ seraient tous les deux inclus dans le plan $\operatorname{Med}(x, \sigma_S(x))$, donc coïncideraient, en contradiction avec $S \cap \widetilde{S} = \emptyset$. □

Corollaire 5.10. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$ *est globalisant.*

Preuve. Comme $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$, d'après le corollaire 4.7, il suffit de montrer que $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ est globalisant. Soit $G \leqslant \operatorname{Isom}^+ \mathbb{H}_3$ un GAF. D'après le lemme 5.9, on a $\operatorname{Fix} f \cap \operatorname{Fix} g \neq \emptyset$ pour tous $f, g \in G$. En recopiant mot pour mot la preuve de la proposition 5.3, on en déduit alors que G est un GAG. □

Le cas de la dimension 2

Corollaire 5.11. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_2$ *est globalisant.*

Preuve. Soit G un GAF de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_2$. Identifions $\mathbb{H}_3$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{H}_2$. Pour chaque $g \in G$, soit $\varphi(g) : \mathbb{H}_3 \to \mathbb{H}_3$, $(x, y) \mapsto (x, g(y))$. On vérifie que $\varphi(g) \in \operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$ et que $\operatorname{Fix} \varphi(g) = \mathbb{R} \times \operatorname{Fix} g \neq \emptyset$. Ainsi $H := \varphi(G)$ est un GAF de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$, donc un GAG puisque $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_3$ est globalisant, et de plus $\operatorname{Fix} H$ est de la forme $\mathbb{R} \times A$. On obtient $\operatorname{Fix} G = A \neq \emptyset$, donc G est un GAG de $\operatorname{Isom} \mathbb{H}_2$.
□

Remarque. Ironiquement, le groupe de Möbius

$$M(\widehat{\mathbb{R}}) = \left\{ \varphi : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}},\, x \mapsto \tfrac{ax+b}{cx+d} \;;\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\, ad - bc = \pm 1 \right\}$$

agissant sur $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ au lieu de $\mathbb{H}_2$ n'est pas globalisant, alors que la dimension est moindre. En effet, on peut vérifier en utilisant les résultats de [17] que le groupe engendré par les matrices A et B de l'exemple 3.3 est excentrique.

5.3 Le cas des espaces sphériques

On sait qu'une isométrie de $\mathbb{S}_n$ est la restriction à $\mathbb{S}_n$ d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^{n+1}$, cf. [4], chap. 18, ou bien [1] exercice 7.13 et sa solution. Précisément, si O_{n+1} désigne le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, alors on a un isomorphisme de groupes

$$\varphi : \mathrm{O}_{n+1} \to \operatorname{Isom} \mathbb{S}_n$$

qui, à un élément $f \in \mathrm{O}_{n+1}$, associe sa restriction à $\mathbb{S}_n$. On a $\operatorname{Fix} f = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si $\operatorname{Fix} \varphi(f) = \emptyset$. Par abus de langage, nous dirons qu'un sous-groupe G de O_{n+1} est un GAF, resp. un GAG, resp. excentrique, si son image $\varphi(G)$ est un GAF, resp. un GAG, resp. un sous-groupe excentrique, de $\operatorname{Isom} \mathbb{S}_n$.

Théorème 5.12. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{S}_n$ *est globalisant si et seulement si* $n = 1$.
Le groupe $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ *est globalisant si et seulement si* $n = 1$ *ou* $n = 3$.

Notons que le corollaire 4.7 ne s'applique pas ici car l'inégalité de la médiane n'est pas vraie dans les espaces elliptiques. La preuve du théorème 5.12 est scindée en plusieurs parties.

Pour $n = 1$, les seuls GAF de $\operatorname{Isom} \mathbb{S}_1$ sont le groupe trivial $\{\mathbf{id}\}$ et les groupes $\{\mathbf{id}, s\}$ où s est une symétrie axiale, qui sont évidemment des GAG.

Proposition 5.13. *Si* $n \geqslant 2$*, alors* $\operatorname{Isom} \mathbb{S}_n$ *n'est pas globalisant.*

Preuve. On se place dans O_{n+1}. Commençons par le cas $n = 2$. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Soit $f, g, h \in \mathrm{O}_3$ les isométries vectorielles de matrices respectivement $\operatorname{Mat} f = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$, $\operatorname{Mat} g = \operatorname{diag}(-1, 1, -1)$ et $\operatorname{Mat} h = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)$. L'ensemble $G = \{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est un groupe isomorphe au groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$: on a $f^2 = g^2 = h^2 = \mathbf{id}$, $fg = gf = h$, $gh = hg = f$ et $hf = fh = g$. On a donc $\operatorname{Fix} k \neq \{\overrightarrow{0}\}$ pour tout $k \in G$ mais $\operatorname{Fix} G = \{\overrightarrow{0}\}$.

Pour $n \geqslant 3$, on complète les matrices de f et g par des -1 et la matrice de h par des 1 : dans une base orthonormée, on choisit $\operatorname{Mat} f = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, \ldots, -1)$, $\operatorname{Mat} g = \operatorname{diag}(-1, 1, -1, -1, \ldots, -1)$ et $\operatorname{Mat} h = \operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1, \ldots, 1)$. On vérifie que $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est encore isomorphe au groupe de Klein, et qu'il est excentrique. □

Traitons à présent le cas de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$. L'isomorphisme $\varphi : \mathrm{O}_{n+1} \to \operatorname{Isom} \mathbb{S}_n$ induit par restriction un isomorphisme de SO_{n+1} dans $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$, qui sera noté par la même lettre.

Proposition 5.14. *Si* n *est pair alors* $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ *est excentrique.*

Preuve. Soit $g \in \operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ et soit $f = \varphi^{-1}(g) \in \mathrm{SO}_{n+1}$. Les valeurs propres de f sont toutes de module 1 et ont un produit égal à 1. De plus, si λ est valeur propre de f alors $\overline{\lambda}$ aussi, avec la même multiplicité. Comme $n + 1$ est impair, 1 est une valeur propre de f, donc $\operatorname{Fix} f \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Ainsi $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ est un GAF, mais n'est évidemment pas un GAG. □

Il nous reste à traiter le cas n impair. Pour $n = 1$, $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_1$ ne contient qu'un GAF : le groupe trivial $\{\mathbf{id}\}$, qui est évidemment un GAG.

Proposition 5.15. *Si* n *est impair et* $n \geqslant 5$*, alors* $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ *n'est pas globalisant.*

Preuve. On se place dans SO_{n+1} et on reprend l'exemple de la preuve de la proposition 5.13 en remplaçant 1 par I_2 et -1 par $-I_2$:

Pour $n = 5$, soit $f, g, h \in \mathrm{SO}_6$ les isométries de matrices diagonales par blocs respectivement $\operatorname{Mat} f = \operatorname{diag}(I_2, -I_2, -I_2)$, $\operatorname{Mat} g = \operatorname{diag}(-I_2, I_2, -I_2)$ et $\operatorname{Mat} h = \operatorname{diag}(-I_2, -I_2, I_2)$. On vérifie que $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est isomorphe au groupe de Klein et excentrique.

Pour n impair, $n \geqslant 7$, on complète les matrices de f et g par des $-I_2$ et la matrice de h par des I_2, et le groupe $\{\mathbf{id}, f, g, h\}$ est encore isomorphe au groupe de Klein et excentrique. □

Proposition 5.16. *Le groupe* $\mathrm{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ *est globalisant.*

Preuve. Par l'absurde, soit $G \leqslant \mathrm{SO}_4$ un groupe excentrique. Un élément de $G \setminus \{\mathbf{id}\}$ a pour ensemble de points fixes un plan (i.e. un sous-espace de dimension 2).

Étape 1. On a $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g \neq \{\overrightarrow{0}\}$ *pour tous* $f, g \in G$.

Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Fix}\,(f^{-1}g) \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ (qui est non vide par hypothèse sur G). Si $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g$, on a fini. Sinon, on a $f(\overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{u}) \neq \overrightarrow{u}$. Alors $\mathrm{Fix}\, f$ et $\mathrm{Fix}\, g$ sont deux plans inclus dans l'hyperplan (i.e. le sous-espace de dimension 3) $\mathrm{Med}\,(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$, donc s'intersectent. □

À présent fixons $f_0 \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Puisque $\mathrm{Fix}\, G = \{\overrightarrow{0}\}$, il existe $g_0 \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ tel que $\mathrm{Fix}\, f_0 \neq \mathrm{Fix}\, g_0$. D'après l'étape 1, $\mathrm{Fix}\, f_0 \cap \mathrm{Fix}\, g_0$ est une droite notée D, et $\mathrm{Fix}\, f_0 + \mathrm{Fix}\, g_0$ un hyperplan noté H.

Étape 2. Pour tout $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, *on a* $\mathrm{Fix}\, f \subset H$.

En effet, soit $h_0 \in G$ tel que $\mathrm{Fix}\, h_0$ ne contient pas D. Un tel h_0 existe puisque $\mathrm{Fix}\, G = \{\overrightarrow{0}\}$. On a $\mathrm{Fix}\, f_0 \neq \mathrm{Fix}\, g_0 \neq \mathrm{Fix}\, h_0$. D'après l'étape 1, $\mathrm{Fix}\, f_0 \cap \mathrm{Fix}\, h_0$ est une droite notée D', et $\mathrm{Fix}\, g_0 \cap \mathrm{Fix}\, h_0$ une droite notée D''. On a $D' \neq D''$ (sinon $D' = D'' = D$, en contradiction avec $D \not\subset \mathrm{Fix}\, h_0$) et $\mathrm{Fix}\, h_0$ est de dimension 2, donc $\mathrm{Fix}\, h_0 = D' + D'' \subset H$. Notons au passage que les trois droites D, D' et D'' ne sont pas coplanaires, donc $H = D + D' + D''$, si bien que les rôles de f_0, g_0 et h_0 sont symétriques.

Maintenant, soit $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$. Alors $\mathrm{Fix}\, f$, de dimension 2, ne peut pas contenir à la fois D, D' et D'' donc, d'après ce qui précède, $\mathrm{Fix}\, f$ est inclus dans l'un des trois sous-espaces $\mathrm{Fix}\, f_0 + \mathrm{Fix}\, g_0$, $\mathrm{Fix}\, g_0 + \mathrm{Fix}\, h_0$ ou $\mathrm{Fix}\, h_0 + \mathrm{Fix}\, f_0$, qui sont en fait tous les trois égaux à H. □

On note Δ l'orthogonal de H : $\Delta = H^\perp$.

Étape 3. On a $f(\Delta) = \Delta$ *pour tout* $f \in G$.

Sinon, soit $f \in G$ tel que $f(\Delta) \neq \Delta$ et soit $g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ arbitraire. Montrons que $(\mathrm{Fix}\, g)^\perp = \Delta + f(\Delta)$.

On a $\Delta \subset (\mathrm{Fix}\, h)^\perp$ pour tout $h \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$ et, comme f est une isométrie, $f(\Delta) \subset (f(\mathrm{Fix}\, h))^\perp$. Pour $h = f^{-1}gf$, cela donne $f(\Delta) \subset (f(\mathrm{Fix}\, h))^\perp = (\mathrm{Fix}\, g)^\perp$. Ainsi $\Delta + f(\Delta) \subset (\mathrm{Fix}\, g)^\perp$, qui ont même dimension, d'où l'égalité.

Puisque ceci est vrai pour tout $g \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, on obtient $\mathrm{Fix}\, G = (\Delta + f(\Delta))^\perp \neq \{\overrightarrow{0}\}$, une contradiction. □

En résumé, on a trouvé un hyperplan H tel que, pour tout $f \in G \setminus \{\mathbf{id}\}$, $\mathrm{Fix}\, f \subset H$ et $f(H^\perp) = H^\perp$. Il s'ensuit que la restriction de f à $H^\perp$ est $-\mathbf{id}$, donc f n'a que 1 et -1 comme valeurs propres, donc $f^2 = \mathbf{id}$ pour tout $f \in G$, donc G est abélien (on a $\mathbf{id} = f^2 g^2 = (fg)^2$ donc, en simplifiant, $fg = gf$ pour tous $f, g \in G$).

Comme G est abélien, les éléments de $G \setminus \{\pm\mathbf{id}\}$ sont diagonalisables dans une base commune avec 1 et -1 comme valeurs propres doubles (ce sont des isométries positives de $\mathbb{R}^4$). Considérons les endomorphismes f_1, f_2 et f_3 dont les matrices dans la base diagonalisant G sont respectivement $\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$, $\mathrm{diag}(1, -1, 1, -1)$ et $\mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)$. Ainsi G est un sous-groupe de $G_0 = \{\pm\mathbf{id}, \pm f_1, \pm f_2, \pm f_3\}$.

La liste des seize sous-groupes de G_0 se répartit en

▷ onze GAG : $\{\mathbf{id}\}$, $\{\mathbf{id}, f_n\}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 3$, $\{\mathbf{id}, -f_n\}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 3$, $\{\mathbf{id}, f_1, f_2, f_3\}$ qui fixe $\overrightarrow{i}$, $\{\mathbf{id}, f_1, -f_2, -f_3\}$ qui fixe $\overrightarrow{j}$, $\{\mathbf{id}, -f_1, f_2, -f_3\}$ qui fixe $\overrightarrow{k}$, $\{\mathbf{id}, -f_1, -f_2, f_3\}$ qui fixe $\overrightarrow{\ell}$,

▷ et cinq contenant $-\mathbf{id}$ donc pas GAF : $\{\mathbf{id}, -\mathbf{id}\}$, $\{\mathbf{id}, f_n, -\mathbf{id}, -f_n\}$ avec $1 \leqslant n \leqslant 3$ et G_0.

Ainsi G_0 ne contient aucun excentrique, une contradiction. □

5.4 Le cas des espaces projectifs

On rappelle que $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, ou encore le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ; \ x = ty.$$

La distance entre deux droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie comme la mesure de l'angle non orienté entre ces deux droites (un nombre réel entre 0 et $\frac{\pi}{2}$).

On identifiera aussi $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ au quotient de $\mathbb{S}_n$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x = -y.$$

Pour $x \in \mathbb{S}_n$, on note $\dot{x} = \{x, -x\}$ la classe correspondante dans $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$. Étant donnés $\dot{x} = \{x, -x\}$ et $\dot{y} = \{y, -y\}$ dans $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$, la distance entre $\dot{x}$ et $\dot{y}$ est alors donnée par $d(\dot{x}, \dot{y}) = |\arccos(x \cdot y)|$, où $x \cdot y$ est le produit scalaire entre x et y.

Étant donnée une isométrie f de $\mathbb{S}_n$, la classe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est la même que celle de $f(-x) = -f(x)$, donc on peut définir une application de $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ dans $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$, notée $\psi(f)$, qui, à $\dot{x} = \{x, -x\}$, associe la classe de $f(x)$. Il est connu que l'application

$$\psi : \operatorname{Isom} \mathbb{S}_n \to \operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$$

ainsi définie est un morphisme surjectif, de noyau $\{\pm \mathbf{id}\}$; cf. [4], chap. 19.

On définit le groupe $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ comme étant l'image de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ par ψ. Lorsque n est pair, $-\mathbf{id} : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ inverse l'orientation, donc $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est égal à $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$.

Théorème 5.17. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ *est globalisant si et seulement si* $n = 1$.
Le groupe $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ *est globalisant si* $n = 1$ *et non globalisant si* n *est impair et supérieur ou égal* à 5.

Remarques.
1. Nous ne savons pas si $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_3$ est globalisant ou non.

2. Notons que les rotations de $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ ont un unique point fixe. Ainsi le groupe des rotations de $\mathbb{R}\mathbf{P}_2$ est un autre exemple de groupe non globalisant, qui n'est pas abélien et dont tous les éléments ont un unique point fixe. Ceci complète l'exemple 3.3.

Preuve. Il est facile de vérifier que $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_1$ est globalisant.

Si n est pair et $\dot{f} = \psi(f) \in \operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$, alors la matrice de f, vue comme isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^{n+1}$, est de dimension impaire, donc admet toujours 1 ou -1 comme valeur propre, donc il existe $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) \in \{x, -x\}$. Ainsi toute isométrie de $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ a au moins un point fixe $\dot{x}$, mais aucun point de $\mathbb{R}\mathbf{P}_n$ ne peut être fixé par tous les éléments de $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$. Le groupe $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ est donc lui-même excentrique, donc non globalisant.

On étudie à présent le cas n impair. Pour $n = 5$, notons

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et considérons les isométries f, g, h de $\mathbb{S}_5$ dont les matrices sont les diagonales par blocs suivantes :

$$\operatorname{Mat} f = \operatorname{diag}(I, R, R), \ \operatorname{Mat} g = \operatorname{diag}(R, I, R) \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat} h = \operatorname{diag}(R, R, I).$$

Ce sont des isométries positives. Notons G_5 le sous-groupe de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_5$ engendré par f, g et h. On trouve pour G_5 le groupe d'ordre 32 suivant :

$$G_5 = \{\operatorname{diag}(\pm I, \pm I, \pm I), \operatorname{diag}(\pm I, \pm R, \pm R), \operatorname{diag}(\pm R, \pm I, \pm R), \operatorname{diag}(\pm R, \pm R, \pm I)\}$$

et on vérifie que son image $\psi(G_5)$ dans $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_5$ est excentrique. La vérification est un peu fastidieuse mais sans difficulté.

Ainsi $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_5$ n'est pas globalisant, et donc $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_5$ non plus.

Pour n impair, $n \geqslant 7$, on considère les isométries positives f, g, h de $\mathbb{S}_n$ dont les matrices sont diagonales par blocs : $\operatorname{Mat} f = \operatorname{diag}(I, R, R, R, \ldots, R)$, $\operatorname{Mat} g = \operatorname{diag}(R, I, R, R, \ldots, R)$ et $\operatorname{Mat} h = \operatorname{diag}(R, R, I, R, \ldots, R)$. On vérifie de même que l'image $\psi(G_n)$ du sous-groupe G_n de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_n$ engendré par f, g et h est excentrique, donc ni $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ ni $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_n$ ne sont globalisants.

Il nous reste le cas $n = 3$. Soit $f, g \in \operatorname{Isom} \mathbb{S}_3$ de matrices

$$\operatorname{Mat} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat} g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous écrivons f et g comme des permutations signées : $f = (1\ 2\ 3\ 4)$ et $g = (1\ 2\ \ -3\ \ -4)$. Le calcul donne $fg = (1\ 3)(2\ \ -4) = -gf$ et $f^2 = (1\ 3)(2\ 4) = -g^2$. Ainsi le groupe engendré par $\pm f$ et $\pm g$ est

$$G_3 = \{\pm \mathbf{id}, \pm f, \pm f^2, \pm f^3, \pm g, \pm fg, \pm f^2 g, \pm f^3 g\}.$$

En regardant un à un tous les éléments, on vérifie que $\psi(G_3)$ est excentrique dans $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_3$, donc $\operatorname{Isom} \mathbb{R}\mathbf{P}_3$ n'est pas globalisant. Nous n'avons pas trouvé de sous-groupe excentrique de $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{R}\mathbf{P}_3$, ni réussi à adapter au cas projectif la preuve que $\operatorname{Isom}^+ \mathbb{S}_3$ et globalisant (proposition 5.16). □

6 Groupes agissant sur des ensembles discrets

6.1 Le groupe symétrique

Proposition 6.1. *Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ agissant sur $\{1, \ldots, n\}$ est globalisant si et seulement si $n \leqslant 4$.*

Preuve. On vérifie "à la main" que $\mathcal{S}_n$ est globalisant si $n \leqslant 4$. Pour $n = 4$, on peut distinguer si le GAF contient un cycle d'ordre 3 ou non. La preuve est détaillée dans [1].

Pour $\mathcal{S}_5$, on pose $f = (123)$ et $g = (12)(45)$; pour $\mathcal{S}_6$, on pose $f = (12)(34)$ et $g = (12)(56)$; pour $\mathcal{S}_n$, $n \geqslant 7$, on pose $f = (123)(6 \ldots n)$ et $g = (12)(45)(6 \ldots n)$. Dans chacun de ces trois cas, on vérifie que le groupe $\langle f, g \rangle$ est excentrique. □

6.2 Les isométries de $\mathbb{Z}^n$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On munit $\mathbb{Z}^n$ de la norme euclidienne, notée $\| \ \|$. Pour $f \in \operatorname{Isom} \mathbb{Z}^n$ arbitraire, on peut montrer que f se prolonge en une isométrie de $\mathbb{R}^n$, notée par la même lettre, cf. [1] exercice 7.14 et sa solution.

Théorème 6.2. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathbb{Z}^n$ *est globalisant.*

Preuve. Par l'absurde, soit G un sous-groupe excentrique de $\operatorname{Isom} \mathbb{Z}^n$ avec n minimal.

Étape 1. G est fini.
Soit $\mathcal{C}_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_i = -1,\ 0 \text{ ou } 1\}$ l'hypercube unité de $\mathbb{Z}^n$. Comme la seule

translation de G est **id**, le morphisme de G dans $\operatorname{Isom}\mathcal{C}_n$ qui, à une isométrie f, associe sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est injectif, or $\operatorname{Isom}\mathcal{C}_n$ est fini, donc G aussi. $\square$

Notons N le cardinal de G et ω le barycentre de l'orbite de $\overrightarrow{0}$ par G, donné par $\omega = \frac{1}{N}\sum_{f\in G} f(\overrightarrow{0})$.

Étape 2. Les coordonnées ω_i de ω sont toutes congrues à $\frac{1}{2}$ modulo 1.
En effet, ω est fixé par tous les éléments de G. Comme G est excentrique, $\omega \notin \mathbb{Z}^n$. Soit

$$\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n \ ; \ d(\omega, \mathbb{Z}^n) = \|\omega - x\|\}.$$

Soit $I = \big\{i \in \{1,\dots,n\} \ ; \ \exists x, y \in \Omega,\ x_i \neq y_i\big\}$. On a $\omega_i \equiv \frac{1}{2} \bmod 1 \Leftrightarrow i \in I$. En effet, si $x, y \in \Omega$ sont tels que $x_i \neq y_i$, alors $|x_i - y_i| = 1$ et $|x_i - \omega_i| = |y_i - \omega_i| = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $\omega_i \equiv \frac{1}{2} \bmod 1$ et $x \in \Omega$, alors $x_i = \omega_i \pm \frac{1}{2}$ et le point y de mêmes coordonnées que x sauf la i-ème égale à $\omega_i \mp \frac{1}{2}$ est aussi dans Ω. En résumé, on a

$$\Omega = \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}^n \ ; \ x_i = \omega_i \pm \tfrac{1}{2} \text{ si } i \in I \text{ et } x_i = [\omega_i] \text{ si } i \notin I\big\},$$

où $[\omega_i]$ est l'entier le plus proche de ω_i (unique puisque $\omega_i \not\equiv \frac{1}{2} \bmod 1$ lorsque $i \notin I$). Soit $E = \mathbb{Z}^n \cap \operatorname{Aff}\Omega$. C'est un "réseau" isométrique à $\mathbb{Z}^k$, où k est le cardinal de I. Précisément, posons $E_i = \mathbb{Z}$ si $i \in I$ et $E_i = \{[\omega_i]\}$ sinon ; on a alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

Pour tout $f \in G$ on a $f(\Omega) = \Omega$, donc $f(\operatorname{Aff}\Omega) = \operatorname{Aff}\Omega$, et de plus $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, donc $f(E) = E$. Ceci permet de définir G_E l'ensemble des restrictions à E des éléments de G. Ce sont de isométries de E. Comme G n'est pas un GAG, G_E non plus. De plus, pour tout $f \in G$ et tout $x \in \operatorname{Fix} f$, la projection orthogonale $\pi_E x$ est aussi dans $\operatorname{Fix} f$, donc G_E est un GAF. Par minimalité de n, on en déduit que $k = n$, donc $I = \{1,\dots,n\}$. $\square$

Étape 3. On se ramène à $\omega = \overrightarrow{0}$ et on change $\mathbb{Z}^n$ en $(2\mathbb{Z}+1)^n$.
Soit $\varphi : \mathbb{Z}^n \to (2\mathbb{Z}+1)^n$, $x \mapsto 2x - 2\omega$ et $f \in G$. Alors l'isométrie $\widetilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$ fixe $\overrightarrow{0}$ et va de $(2\mathbb{Z}+1)^n$ dans $(2\mathbb{Z}+1)^n$. Par ailleurs un petit calcul montre que $\widetilde{f} = \overrightarrow{f}$, la partie linéaire associée à f, donc $\widetilde{f}$ fixe aussi le réseau $\mathbb{Z}^n$, et sa matrice ne contient que des 0, 1 ou -1. $\square$

Pour ne pas multiplier les notations, on note à nouveau par G le conjugué de G par φ. Pour chaque $f \in G$, la matrice de f est ainsi une matrice de permutation signée : $\operatorname{Mat} f = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec, sur chaque ligne et chaque colonne, un et un seul $a_{i,j}$ non nul, égal à 1 ou -1.

Étape 4. Les éléments diagonaux de $\operatorname{Mat} f$ ne peuvent jamais être -1.
Comme G est un GAF, $\operatorname{Fix} f$ est une partie non vide de $(2\mathbb{Z}+1)^n$. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \operatorname{Fix} f$. C'est un élément de $(2\mathbb{Z}+1)^n$, donc $x_i \neq 0$ pour tout $i = 1,\dots,n$. Si $a_{i,i} \neq 0$, la i-ème coordonnée de $f(x) = x$ est $a_{i,i}x_i = x_i$, donc $a_{i,i} = 1$. $\square$

Notons $\sigma : G \to \mathcal{S}_n$, $f \mapsto \sigma_f$ l'application qui, à f de matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$, associe la permutation de matrice $(|a_{i,j}|)_{1\leqslant i\leqslant n}$. C'est clairement un morphisme, qui est injectif d'après l'étape 5.

Étape 5. Vers la construction d'un point fixe global.
Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et considérons sur $\{1,\dots,n\}$ les deux relations :
$i \sim j$ s'il existe $f \in G$ tel que $f(e_i) \in \{e_j, -e_j\}$,
$i \approx j$ s'il existe $f \in G$ tel que $f(e_i) = e_j$.

On vérifie aisément que ce sont des relations d'équivalence. Soit p le nombre de classes pour la relation $\sim$. Pour chaque $k = 1,\dots,p$, la classe C_k pour $\sim$ est partitionnée en deux classes pour $\approx$ (éventuellement, l'une des classes est vide). Notons C_k^+ l'une de ces classes (choisie arbitrairement) et $C_k^- = C_k \setminus C_k^+$. Notons

$$C^+ = C_1^+ \cup \cdots \cup C_p^+ \text{ et } C^- = C_1^- \cup \cdots \cup C_p^-.$$

D'après l'étape 5, étant donnés $i \sim j$, il n'est pas possible d'avoir $f(e_i) = e_j$ pour l'un des $f \in G$ et $g(e_i) = -e_j$ pour un autre, donc on a $i \approx \sigma_f(i) \Leftrightarrow f(e_i) = e_{\sigma_f(i)}$.

Fixons $f \in G$ et notons

$$C_f^{++} = C^+ \cap \sigma_f^{-1}(C^+), \quad C_f^{+-} = C^+ \cap \sigma_f^{-1}(C^-),$$
$$C_f^{-+} = C^- \cap \sigma_f^{-1}(C^+), \quad C_f^{--} = C^- \cap \sigma_f^{-1}(C^-).$$

On a ainsi $f(e_i) = e_{\sigma_f(i)}$ si $i \in C_f^{++} \cup C_f^{--}$ et $f(e_i) = -e_{\sigma_f(i)}$ si $i \in C_f^{+-} \cup C_f^{-+}$. On a aussi

$$C^+ = C_f^{++} \cup C_f^{+-}, \quad C^- = C_f^{-+} \cup C_f^{--}$$

et

$$\sigma_f(i) \in C^+ \Leftrightarrow i \in C_f^{++} \cup C_f^{-+}, \quad \sigma_f(i) \in C^- \Leftrightarrow i \in C_f^{+-} \cup C_f^{--}.$$

Étape 6. Le point $x = (x_1, \dots, x_n)$ donné par $x_i = 1$ si $i \in C^+$ et $x_i = -1$ si $i \in C^-$ est invariant par tout élément de G.
En effet, pour $f \in G$ arbitraire, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{i \in C^+} e_i\Big) - f\Big(\sum_{i \in C^-} e_i\Big) \\ &= \Big(\sum_{i \in C_f^{++}} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{i \in C_f^{+-}} e_{\sigma_f(i)}\Big) - \Big(\sum_{i \in C_f^{--}} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{i \in C_f^{-+}} e_{\sigma_f(i)}\Big) \\ &= \sum_{\sigma_f(i) \in C^+} e_{\sigma_f(i)} - \sum_{\sigma_f(i) \in C^-} e_{\sigma_f(i)} \\ &= \sum_{j \in C^+} e_j - \sum_{j \in C^-} e_j = x. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Fix} G$ serait non vide, une contradiction. □

6.3 Questions sur les isométries des graphes finis

Soit $X = (S, A)$ un graphe simple non orienté connexe. L'ensemble S des sommets est muni de la distance d définie par le minimum du nombre d'arêtes joignant deux sommets. Nous désignons par $\operatorname{Isom} X$ le groupe des isométries de l'espace métrique (S, d). Il y a plusieurs questions simples et naturelles dans ce cadre :

1. Quels sont les graphes finis dont le groupe des isométries est globalisant ?

2. Quels sont les groupes finis admettant un système générateur définissant un graphe de Cayley dont le groupe d'isométries est globalisant ?

3. Trouver des familles infinies de graphes dont le groupe des isométries est globalisant.

Les deux premières questions sont ambitieuses et probablement difficiles. Par contre la troisième question admet des réponses partielles simples.

Considérons le graphe complet K_n sur n sommets. Son groupe d'isométries est le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Par conséquent, d'après la proposition 6.1, il est globalisant si et seulement si $n \leqslant 4$.

Soit $\mathcal{C}_n$ le graphe du cube n-dimensionnel. L'ensemble des sommets de $\mathcal{C}_n$ est le cube unité $\{0, 1\}^n$ de $\mathbb{R}^n$ et les arêtes sont les paires de sommets dont exactement une des coordonnées diffère.

Proposition 6.3. *Le groupe* $\operatorname{Isom} \mathcal{C}_n$ *est globalisant pour tout entier* $n \geqslant 1$.

Preuve. Elle est analogue, en plus simple, à celle du théorème sur $\mathbb{Z}^n$. On démontre qu'une isométrie de $\mathcal{C}_n$ se prolonge à $\mathbb{R}^n$ en une isométrie pour la norme euclidienne. Le centre du cube $\omega = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ est fixé par toutes les isométries du cubes. En conjugant par l'application $x \mapsto 2x-2\omega$, on se ramène au cas où les isométries sont des isométries linéaires dont les matrices sont des matrices de permutations signées. On constate que les matrices des isométries d'un sous-groupe GAF n'ont jamais de -1 sur la diagonale, ce qui permet de conclure à l'existence d'un point fixe global comme dans les étapes 6 et 7 de la démonstration du théorème 6.2. □

6.4 Un résultat dans les graphes infinis

Soit $X = (S, A)$ un graphe simple non orienté connexe dont les arêtes sont colorées. La couleur des arêtes est donnée par une application définie sur l'ensemble A des arêtes et à valeurs dans un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$. On rappelle qu'un cycle est dit *simple* s'il ne repasse pas deux fois par une même arête, et qu'il est dit *élémentaire* s'il ne repasse pas deux fois par un même sommet (sauf le début et la fin). Il est facile de voir qu'un cycle élémentaire de longueur au moins 3 est simple et qu'un cycle, simple ou non, contient toujours au moins un cycle élémentaire.

On fait les hypothèses suivantes :

– les arêtes d'un cycle élémentaire du graphe ont toutes la même couleur,
– pour chaque $c \in \mathcal{C}$, les composantes connexes du graphe partiel X_c, obtenu en ne conservant que les arêtes de couleur c, sont des graphes complets.

Pour chaque $c \in \mathcal{C}$, nous appellerons *cellule* de couleur c une composante connexe du graphe partiel X_c. Chaque arête de X appartient à une unique cellule.

Notons que le graphe de Cayley du produit libre de deux groupes finis G_1 et G_2 vérifie les hypothèses ci-dessus si l'on choisit $(G_1 \cup G_2) \setminus \{e\}$ pour ensemble de générateurs et si l'on colorie les arêtes $\{w, wg\}$, $g \in G_1$ en bleu et les autres en rouge.

Voici une généralisation du théorème de Serre [20] sur les groupes de type fini d'isométries des arbres.

Théorème 6.4. *On suppose que chaque cellule du graphe X a au plus 4 sommets. Soit G un sous-groupe de type fini de* Isom X. *Si G est un* GAF *alors G est un* GAG.

Remarquons que l'hypothèse sur le cardinal des cellules est nécessaire : si X est un graphe complet à au moins cinq sommets alors, d'après la proposition 6.1, Isom X contient un sous-groupe excentrique. Il en est de même pour le graphe de Cayley du produit libre de deux groupes dont l'un au moins a un cardinal au moins cinq. Avant la preuve du théorème 6.4, nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

Lemme 6.5. *Étant donnés deux sommets x, y du graphe X, il existe un unique chemin les joignant dont deux arêtes consécutives ne sont jamais de la même couleur. De plus ce chemin est l'unique géodésique de x à y. Par conséquent, un chemin est une géodésique si et seulement si deux arêtes consécutives n'ont jamais la même couleur.*

Preuve. Soit $x, y \in S$. Par connexité il existe un chemin joignant x à y, et donc au moins une géodésique. Comme les cellules du graphe sont des graphes complets, cette géodésique ne peut pas avoir deux arêtes consécutives de la même couleur, d'où l'existence.

Pour l'unicité, remarquons d'abord que tous les sommets d'un chemin vérifiant la propriété de changement de couleur des arêtes sont distincts. En effet, si deux sommets du chemin coïncidaient, alors le cycle extrait du chemin ainsi constitué contiendrait un cycle élémentaire de longueur au moins 2, contredisant la propriété de changement de couleur.

Si deux chemins distincts $[a_0 = x, \ldots, a_m = y]$ et $[b_0 = x, \ldots, b_n = y]$ joignent x à y et possèdent la propriété de changement de couleur, alors il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que $a_i = b_i$ et

$a_{i+1} \neq b_{i+1}$. Considérons le premier sommet a_j du chemin $[a_{i+1}, \ldots, a_m]$ qui appartient aussi au chemin $[b_{i+1}, \ldots, b_n]$. On a donc $a_j = b_k$ pour un certain $k > i$. On choisit k minimal avec cette propriété. Par choix de j et k, les sommets du chemin $[a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j = b_k, b_{k-1}, \ldots, b_i = a_i]$ sont tous distincts (hormis les deux extrémités). Ce cycle a au moins trois arêtes (sinon $a_{i+1} = b_{i+1}$), il est élémentaire et a au moins deux couleurs, une contradiction. □

Lemme 6.6. *Soit s une isométrie de X ayant au moins un point fixe et x un sommet de X qui n'est pas un point fixe de s. Soit F l'ensemble des points $y \in \operatorname{Fix} s$ tels que $d(x,y) = d(x, \operatorname{Fix} s)$.*

a. *Alors F est inclus dans une cellule dont la couleur est celle de la dernière arête de la géodésique allant de x à n'importe quel élément de F.*

b. *De plus :*

- **(i)** *Si $d(x, s(x))$ est paire, alors le milieu z de la géodésique joignant x à $s(x)$ appartient à F.*
- **(ii)** *Si $d(x, s(x))$ est impaire, alors F est inclus dans la cellule Y contenant l'arête centrale $[a,b]$ de la géodésique allant de x à $s(x)$. De plus $s(Y) = Y$ et $s(a) = b$.*

Preuve. **a**. Soit u et v deux points de F. Considérons les géodésiques $[u_0 = x, \ldots, u_n = u]$ et $[v_0 = x, \ldots, v_n = v]$ (avec $n = d(x, \operatorname{Fix} s)$). Comme s est une isométrie qui fixe u et v, elle fixe chaque sommet de la géodésique $[w_0 = u, \ldots, w_m = v]$ joignant u à v. Soit i le plus petit entier tel que $u_i = v_i$ et $u_{i+1} \neq v_{i+1}$. On vérifie, comme dans la preuve du lemme 6.5, que les trois branches de géodésiques $[u_i, \ldots, u_n = u]$, $[u, \ldots, v]$ et $[v_n, \ldots, v_i = u_i]$ forment un cycle élémentaire. Par conséquent, toutes les arêtes de ce cycle ont la même couleur c et les sommets u et v sont joints par une arête de couleur c. On conclut en remarquant que c est la couleur de l'arête $[u_{n-1}, u_n]$.

b. Soit u un point de F et $[u_0 = x, \ldots, u_n = u]$ la géodésique joignant x à u. D'après le **a.**, F est inclus dans une cellule Y dont la couleur c est celle de l'arête $[u_{n-1}, u_n]$. Considérons l'image $[s(x), \ldots, s(u_n) = u]$ de cette géodésique par s. Soit c' la couleur de l'arête $[s(u_{n-1}), u]$.

(i) Si $c \neq c'$ alors $[u_0, \ldots, u_n = s(u_n), s(u_{n-1}), \ldots, s(u_0) = s(x)]$ est une géodésique car les couleurs de deux arêtes consécutives de ce chemin ne sont jamais les mêmes. Il s'agit donc de la géodésique joignant x à $s(x)$. La longueur de cette géodésique est $2n$ et son milieu est $u \in F$.

(ii) Si $c = c'$ alors $s(u_{n-1})$ est un sommet de Y qui est complet, donc $[u_{n-1}, s(u_{n-1})]$ est aussi une arête de Y. Deux arêtes consécutives du chemin $[u_0, \ldots, u_{n-1}, s(u_{n-1}), \ \ldots, s(u_0)]$ n'ont jamais la même couleur. Ce chemin est donc la géodesique joignant x à $s(x)$. Par construction, la longueur de cette géodésique est impaire et son arête centrale $[u_{n-1}, s(u_{n-1})]$ est de couleur c. Il reste à voir que $s(Y) = Y$. Soit y un sommet de Y. L'image par s du triangle u_{n-1}, u, y est un triangle qui contient l'arête $[s(u_{n-1}), u]$ qui est une arête de Y. Par conséquent l'image de ce triangle est un triangle de Y et donc $s(y)$ est un sommet de Y. □

Preuve du théorème 6.4. On procède par récurrence sur le nombre de générateurs de G. Supposons que G est engendré par une isométrie s qui fixe au moins un sommet et un sous-groupe G_0 ayant un point fixe global x_0. Si $s(x_0) = x_0$ on a fini. Sinon, considérons la géodésique allant de x_0 à $s(x_0)$. Observons que c'est aussi la géodésique allant de x_0 à $st(x_0) = s(x_0)$ pour n'importe quel $t \in G_0$.

Si cette géodésique a une longueur paire alors, d'après le lemme précédent, son milieu z est un point fixe de s mais aussi de tous les st, $t \in G_0$. Comme s est injective, $s(t(z)) = z = s(z)$ entraîne $t(z) = z$, donc z est un point fixe de t. Ainsi z est un point fixe global de G.

Si cette géodésique a une longueur impaire, alors d'après le lemme 6.6, la cellule Y contenant l'arête centrale de cette géodésique est stable par tous les st, $t \in G_0$. Elle est donc stable par G. De plus, cette cellule contient des points fixes de st. Par conséquent, le groupe H des restrictions à Y des éléments de G est un GAF. Or Isom Y est le groupe des permutations des sommets de Y et par hypothèse la cellule Y a au plus 4 sommets donc, d'après la proposition 6.1, Isom Y est globalisant. Par conséquent H est un GAG et donc G aussi. □

Références

[1] G. Ahumada, B. Brighi, N. Chevallier, A. Fruchard, Groupes globalisants, prépublication.

[2] R. Antetomaso, Un théorème de point fixe en dimension finie : application aux sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$, *R.M.S.* **2** (1993-1994) 145–146.

[3] K. Anzai et S. Ishikawa, On common fixed points for several continuous affine mappings, *Pacific J. Math.* **72** (1977) 1–4.

[4] M. Berger, *Géométrie*, Cedic-Nathan, Paris, 1977.

[5] A. Borel, Free subgroups of semi-simple groups, *L'Enseignement Mathématique* **29** (1983) 151–164.

[6] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, *Publ. Math. IHES* **41** (1972) 5–252.

[7] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, W. R. Parry, *Flavors of Geometry*, MSRI Publications, Volume **31**, 1997.

[8] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators, 1 : general theory*, Pure and Applied Mathematics, Academic press, London, New York, Sydney, 1957.

[9] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford–American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, 1975.

[10] M. Fréchet, Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, *Ann. Math.* **36** (1935) 705–718.

[11] F.G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, *Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin (1898), 5001–5015.

[12] P. Jordan, J. von Neuman, On inner products in linear, metric spaces, *Ann. Math.* **36** (1935) 719–723.

[13] S. Kakutani, Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **14** (1938) 242–245.

[14] A. Markov, Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens, *Doklady Akad. Nauk. SSSR.* **10** (1936) 311–314.

[15] S. Mazur, S. Ulam, Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci.* **194** (1932) 946–948.

[16] J. W. Morgan, P. B. Shalem, Valuations, Trees and Degenerations of Hyperbolic Structures I, *Ann. Math.* **120** (1984) 401-476.

[17] M. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New-york and London, 1972.

[18] J. G. Ratcliff, *Fundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag, 1994.

[19] W. Rudin, *Functional Analysis* Mc Graw-Hill Inc., 2ème édition, 1991.

[20] J.P. Serre, *Arbres, Amalgames, SL_2*, Astérisque, S.M.F., 1977.

[21] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1988.

[22] J. Väisälä, A proof of the Mazur-Ulam theorem, *Amer. Math. Monthly* **110-7** (2003) 633–635.

[23] S. Wagon, *Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.