Mesures quasi-invariantes sur le tore $\mathbb{T}^d$

Nicolas Chevallier

1 Introduction

Soit X un espace métrique compact, T un homéomorphisme de X et $h : X \to]0, \infty[$ une fonction continue strictement positive. Notre objectif est d'étudier l'unicité des solutions de l'équation de quasi-invariance

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

dont l'inconnue μ est une probabilité sur X.
Cette équation intervient de manière naturelle dans l'étude d'une chaîne de Markov d'espace d'états X. Soit $p, q : X \to]0, 1[$ deux fonctions continues de somme constante 1. Un calcul simple montre qu'une solution de l'équation

$$T^{-1}(\mu) = \frac{p}{q \circ T}\mu,$$

est invariante par le noyau de transition $Pf(x) = p(x)\, f(Tx) + q(x)\, f(T^{-1}x)$. La réciproque est plus subtile car l'équation de quasi-invariance n'a pas toujours de solution. Elle a été étudiée dans [3] par J.P. Conze et Y. Guivarc'h. Ils ont aussi prouvé les deux résultats suivants (cf. [3]) :

1. *Si T admet une unique probabilité invariante ν, alors l'équation de quasi-invariance admet des solutions si et seulement si $\int_X \ln h\, d\nu = 0$.*

2. *Si T est une translation irrationnelle du tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, si $\int_X \ln h\, d\nu = 0$ et si $\ln h$ est à variation bornée, alors l'équation de quasi-invariance admet une unique solution.*

Ce dernier résultat repose sur un argument de recouvrement (cf. [7]). Lorsque l'hypothèse de régularité sur h est affaiblie, il n'y a plus nécessairement unicité. J. Brémont ([1]) a construit une fonction continue h telle que pour chaque rationnel x de $\mathbb{T}^1$, il existe une solution de l'équation de quasi-invariance portée par la trajectoire de x.
Dans ce travail nous donnons des résultats de non unicité et nous prouvons l'unicité générique dans les cas des translations du tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Théorème 1 *Soit (X, d) un espace métrique, T un homéomorphisme de X dans X et K un compact de X dont les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.*
a. *Alors il existe une fonction continue bornée $h : X \to]0, +\infty[$ telle que pour toute mesure de probabilité ν portée par K il existe une mesure μ de masse finie, portée par $\cup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(K)$, telle que*

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

et $\mu_{|K} = \nu$.
b. *Si de plus, T est une isométrie, K est fini et si*

$$\exists \alpha \in]0, 1[,\ \exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(K, T^n(K)) \geq cn^{-\alpha},$$

alors la conclusion précédente est valable avec la propriété supplémentaire : $\ln h$ est lipschitzienne.

Fixons une norme N sur $\mathbb{R}^d$ et posons pour $\Theta \in \mathbb{T}^d$

$$\|\Theta\| = \inf_{x\in\Theta} N(x).$$

Corollaire 1 *Soit $X = \mathbb{T}^d$, $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et T la translation $x \to x + \Theta$. On suppose $d \geq 2$ et que Θ vérifie la condition diophantiennne*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|n\Theta\| \geq cn^{-\alpha}$$

où $c > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. Alors il existe une fonction lipschitzienne $h : \mathbb{T}^d \to]0, \infty[$ telle que l'équation de quasi-invariance

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

admette plusieurs solutions distinctes.

Cherchons la "grosseur" de l'ensemble des h continues telles que l'équation de quasi-invariance ait une unique solution. Appelons $E = \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{R}$. Munissons E de la norme uniforme $\|.\|_\infty$et considérons $U = \{h \in E : \forall x \in \mathbb{T}^d,\ h(x) > 0\}$ et $U_0 = \{h \in U : \int_{\mathbb{T}^d} \ln h(x)dx = 0\}$. L'ensemble U est ouvert dans E et U_0 est fermé dans U. Donc U_0 muni de la topologie induite par E est un espace de Baire.

Théorème 2 *Soit $X = \mathbb{T}^d$, $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et T la translation $x \to x + \Theta$. Supposons la translation T ergodique. Alors l'ensemble des h appartenant à U_0 telles que l'équation de quasi-invariance*

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

admette une unique solution μ dans l'ensemble des probabilités, contient un G_δ dense.

1.1 Notations

1. Soit (X, d) un espace métrique A une partie de X et $r \geq 0$. Nous noterons

$$A_r = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

2. Soit (X, d) un espace métrique et $s \geq 0$. $\mathcal{H}^s(A)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension s d'une partie A de X.
3. $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ sont identifiés et $\mathbf{p}$:$\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ désigne la projection canonique, $\mathbf{p}(x) = x + \mathbb{Z}^d$.
4. Soit $T : X \to X$ une transformation bijective et h une application de X dans $\mathbb{R}^*$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, h_k désigne l'application de X dans $\mathbb{R}^*$ définie par

$$h_k(x) = \begin{cases} \Pi_{i=0}^{k-1} h \circ T^i & \text{si } k \geq 10, \\ 1 & \text{si } k = 0, \\ \left(\Pi_{i=1}^{-k} h \circ T^{-i}\right)^{-1} & \text{si } k \leq -1. \end{cases}$$

2 Preuve du théorème 1

2.1 Construction de mesures quasi-invariantes

Le principe pour démontrer le théorème 1 réside dans la proposition suivante qui se trouve dans [2] et [3] pour les mesures atomiques. La démonstration de cette proposition n'est qu'une vérification purement algébrique.

Proposition 1 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $T : X \to X$ une bijection bimesurable et K est un élément de $\mathcal{T}$ dont les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Si $h : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable strictement positive telle que la fonction*

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} h_N$$

soit bornée sur K alors pour toute mesure ν de masse finie portée par K, il existe une mesure μ de masse finie qui coïncide avec ν sur K, telle que

$$T^{-1}(\mu) = h\mu.$$

Preuve de la proposition.

Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable strictement positive. Pour tout $N \in \mathbb{Z}$, nous avons $h_N = h_{N-1} \times h \circ T^{N-1}$. Par conséquent, si ν est une mesure positive sur X alors la mesure définie par

$$\mu(g) = \sum_{N\in\mathbb{Z}} \nu(h_N\, g \circ T^N)$$

pour g mesurable positive, vérifie l'équation de quasi-invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$. La mesure μ est de masse totale finie si

$$\mu(1) = \sum_{N\in\mathbb{Z}} \nu(h_N) < +\infty.$$

Or ν est de masse finie et la fonction $\sum_{N\in\mathbb{Z}} h_N$ est bornée sur K donc μ est de masse finie. $\square$

Nous utiliserons la proposition pour démontrer le théorème 1. En posant $H = \ln h$ la condition de la proposition devient

$$(1) \qquad \sum_{N\geq 0} \exp \sum_{j=0}^{N} H \circ T^j \text{ et } \sum_{N\geq 1} \exp(-\sum_{j=1}^{N} H \circ T^{-j}) \text{ bornées sur } K.$$

Si la fonction H est bornée, on peut faire démarrer toutes les sommes à $N = 0$ et $j = 0$.

2.2 Construction de la fonction $H = \ln h$

Soit (X, d) un espace métrique, T un homéomorphisme et K un compact de X. On suppose que tous les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Notre but est de construire une fonction continue bornée H vérifiant (1) sur K.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers > 0. Pour chaque n posons

$$d_n = \inf\{d(T^k(K), T^l(K)) : -2p_n \leq k < l \leq 2p_n\}.$$

Comme K est compact et que T est un homéomorphisme il existe $t_n > 0$ tel que

$$T^k(K_{t_n}) \subset (T^k(K))_{\frac{1}{3}d_n}$$

pour tous les k de l'intervalle $\{-2p_n, ..., 2p_n\}$. Notons que $t_n \leq \frac{1}{3}d_n$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série convergente à termes positifs.

Pour chaque n fixons une fonction positive continue $f_n : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = a_n \text{ pour tout } x \text{ de } K,$$
$$\|f_n\|_\infty = a_n \text{ et } \operatorname{supp} f_n \subset K_{t_{n+1}}.$$

Finalement, posons

$$F_n = \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} (f_n \circ T^k - f_n \circ T^{-k}),$$
$$H = \sum_{n\geq 1} F_n.$$

Pour k tel que $|k| \in \{p_{n-1} + 1, ..., p_n\}$ nous avons

$$\operatorname{supp}(f_n \circ T^k) = T^{-k}(\operatorname{supp} f_n) \subset T^{-k}(K_{t_{n+1}}) \subset (T^{-k}(K))_{\frac{1}{3}d_n}$$

donc les fonctions $f_n \circ T^k$ ont des supports deux à deux disjoints, et par conséquent $\|F_n\|_\infty = a_n$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, la fonction H est continue bornée. Nous allons maintenant estimer les sommes $S_N(x_0) = \sum_{j=0}^{N} H \circ T^j(x_0)$ et $S_{-N}(x_0) = \sum_{j=0}^{N} H \circ T^{-j}(x_0)$ pour $N \in \mathbb{N}$ et x_0 quelconque dans K.

Il existe un entier n tel que $N \in]p_n, p_{n+1}]$. Estimons la somme

$$\sum_{j=0}^{N} F_m \circ T^j(x_0)$$

dans les quatre cas

$$\begin{aligned}
&m > n+1, \\
&m = n, \\
&m = n+1, \\
&m \in \{1, ..., n-1\}.
\end{aligned}$$

1. Soit $m > n+1$. Si $0 \leq j \leq N \leq p_{n+1}$ et si $p_{m-1} < k \leq p_m$ alors $j < k$ et $|j \pm k| \leq 2p_m$; par conséquent la distance du point $T^{j\pm k}(x_0)$ à K est supérieure à d_m. Or $d_m > t_{m+1}$ donc $f_m \circ T^{j\pm k}(x_0) = 0$ et

$$F_m \circ T^j(x_0) = \sum_{k=p_{m-1}+1}^{p_m} (f_m \circ T^{j+k}(x_0) - f_m \circ T^{j-k}(x_0)) = 0.$$

2. Si $0 \leq j \leq N$ et $p_{n-1} < k \leq p_n$ alors $|j \pm k| \leq p_n + N \leq 2p_{n+1}$, par conséquent

$$d(T^{j\pm k}(x_0), K) \geq d_{n+1} \text{ si } j \pm k \neq 0,$$

ainsi,

$$\forall j \in \{0, ..., N\},\ \forall k \in \{p_{n-1}+1, ...p_n\},\ j \pm k \neq 0 \Rightarrow f_n \circ T^{j\pm k}(x_0) = 0.$$

Comme $N > p_n$ pour chaque $k \in \{p_{n-1}+1, ..., p_n\}$ il existe exactement un $j \in \{0, ..., N\}$ tel que $j - k = 0$ donc

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} (f_n \circ T^{j+k}(x_0) - f_n \circ T^{j-k}(x_0)) = -(p_n - p_{n-1})a_n$$

et

$$\sum_{j=0}^{N} F_n \circ T^j(x_0) = -(p_n - p_{n-1})a_n.$$

Notons que l'hypothèse $\operatorname{supp} f_n \subset K_{t_{n+1}}$ a été utile dans le calcul précédent.
3. De la même manière on montre que

$$\sum_{j=0}^{N} F_{n+1} \circ T^j(x_0) = -(N - p_n)a_{n+1}.$$

4. Soit $m \leq n-1$. Majorons la somme $\sum_{j=0}^{n} F_m \circ T^j(x_0)$. Pour chaque $k \in \{p_{m-1}+1, ..., p_m\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{j=0}^{N} (f_m \circ T^{k+j}(x_0) - f_m \circ T^{-k+j}(x_0)) \\
&= \sum_{j=k}^{N+k} f_m \circ T^j(x_0) - \sum_{j=-k}^{N-k} f_m \circ T^j(x_0) \\
&\leq \sum_{j=N-k+1}^{N+k} f_m \circ T^j(x_0).
\end{aligned}$$

Nous avons une majoration grossière suffisante pour la première partie du théorème 1,

$$A_k \leq 2ka_m \leq 2p_m a_m.$$

On en déduit

$$\sum_{j=0}^{N} F_m \circ T^j(x_0) \leq 2p_m^2 a_m.$$

Dans le cas où T est une isométrie et K un ensemble fini on peut améliorer l'inégalité précédente : si i et $j \in \{N-k+1, ..., N+k\}$ on a $|i-j| \leq 2k \leq 2p_m$ et comme T est une isométrie

$$d(T^j(x_0), T^i(x_0)) = d(x_0, T^{|i-j|}(x_0)) \geq d_m.$$

Par conséquent le nombre de $j \in \{N-k+1, ..., N+k\}$ tel que $T^j(x_0) \in \operatorname{supp} f_m$ est au plus $\operatorname{card} K$. Cela donne les majorations plus fines

$$A_k \leq a_m \operatorname{card} K \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{N} F_m \circ T^j(x_0) \leq 2p_m a_m \operatorname{card} K.$$

Finalement, on obtient les majorations suivantes

$$(2) \qquad S_N(x_0) \leq \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m^2 a_m - (p_n - p_{n-1})a_n - (N - p_n)a_{n+1}$$

et si T est une isométrie et K fini

$$(3) \qquad S_N(x_0) \leq \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m a_m \operatorname{card} K - (p_n - p_{n-1})a_n - (N - p_n)a_{n+1}.$$

Le même raisonnement donne les minorations suivantes de S_{-N}

$$S_{-N}(x_0) \geq -\sum_{m=1}^{n-1} 2p_m^2 a_m + (p_n - p_{n-1})a_n + (N - p_n)a_{n+1}$$

et si T est une isométrie et K fini

$$S_{-N}(x_0) \geq -\sum_{m=1}^{n-1} 2p_m a_m \operatorname{card} K + (p_n - p_{n-1})a_n + (N - p_n)a_{n+1}.$$

2.3 Fin de la preuve du théorème 1 a

Pour achever la démonstration du théorème 1 il suffit de vérifier (1), pour cela il nous reste à choisir les suites (p_n) et (a_n) de telle sortes que les fonctions

$$\sum_{N=0}^{\infty} \exp(S_N(x_0)) \text{ et } \sum_{N=0}^{\infty} \exp(-S_{-N}(x_0))$$

soient bornées sur K.
Prenons $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et p_n vérifiant $p_n \geq 32p_{n-1}^2$ ($p_0 = 1$). Pour tout $n \geq 1$ on a

$$p_n \geq 32p_{n-1}^2 \frac{1}{4} \times \frac{(n+1)^2}{n^2},$$

d'où

$$p_n a_n \geq 8p_{n-1}^2 a_{n-1} \text{ et } p_n^2 a_n \geq 8p_{n-1}^2 a_{n-1}.$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m^2 a_m \leq 2p_{n-1}^2 a_{n-1},$$

d'où

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m^2 a_m \leq \frac{1}{4} p_n a_n,$$

et pour $N \in \{p_n+1, ..., p_{n+1}\}$ on a d'après (2)

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &\le \frac{1}{4} p_n a_n - (p_n - p_{n-1}) a_n - (N - p_n) a_{n+1} \\ &\le -\frac{1}{4} p_n a_n - (N - p_n) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(S_N(x_0)) &\le \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n) \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(-a_{n+1}(N - p_n)) \\ &\le \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n) \frac{1}{1 - \exp(-a_{n+1})} \\ &\ll (n+1)^2 \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n), \end{aligned}$$

la condition de croissance de la suite (p_n) assure que la série de terme général $(n+1)^2 \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n)$ converge. La série $\sum_{N=0}^{\infty} \exp(S_N)$ converge donc. Le même calcul montre que la série $\sum_{N=0}^{\infty} \exp(-S_{-N})$ converge. □

2.4 Preuve du théorème 1 b

Lorsque nous avons construit la fonction H à la section 2.2., notre seul objectif de régularité était la continuité. Nous devons maintenant avec les hypothèses supplémentaires du b du théorème 1, construire une fonction H lipschitzienne ; la construction de cette nouvelle fonction H est identique à l'estimation près des normes de Lipschitz des fonctions f_n. La démonstration du théorème se termine comme la précédente, l'inégalité (3) remplaçant l'inégalité (2).
Choisissons la suite (p_n) de la forme $p_n = A^n$ où A est un entier ≥ 2 et la suite (a_n) de la forme $a_n = \lambda^{-n}$ où $\lambda \in]1, A[$. A et λ seront précisés ultérieurement. Par hypothèse $d(K, T^n(K)) \ge cn^{-\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc comme T est une isométrie nous avons

$$\begin{aligned} d_n &= \inf\{d(T^k(K), T^l(K)) : -2p_n \le k < l \le 2p_n\} \\ &= \inf\{d(T^k(K), K) : 0 < k \le 4p_n\} \ge c(4A^n)^{-\alpha} \end{aligned}$$

et

$$t_n = \frac{1}{3} d_{n+1} \ge cA^{-\alpha n}$$

avec une nouvelle constante $c > 0$. Définissons maintenant les fonctions f_n :

$$f_n(x) = \max(a_n \frac{t_n - d(x, K)}{t_n}, 0).$$

Le support de f_n est K_{t_n}, donc les fonctions $f_n \circ T^k$, $|k| \in \{p_{n-1}+1, ..., p_n\}$ ont des supports deux à deux disjoints et comme la fonction f_n est lipschitzienne de rapport $\frac{a_n}{t_n}$, la fonction F_n est lipschitzienne de rapport $k_n = \frac{a_n}{t_n}$. D'autre part, comme précédemment, $\|F_n\|_\infty = a_n$. La fonction H est donc lipschitzienne si la série $\sum_{n \ge 1} \frac{a_n}{t_n}$ converge. Comme $\frac{a_n}{t_n} \le \frac{1}{c} \lambda^{-n} A^{\alpha n}$, la série $\sum_{n \ge 1} \frac{a_n}{t_n}$ converge si on choisit $\lambda > A^{\alpha}$.

Pour finir la démonstration, utilisons l'inégalité (3) qui est valable car T est une isométrie et K est fini : $N \in \{p_n+1, ..., p_{n+1}\}$

$$S_N(x_0) \text{ et } -S_{-N}(x_0) \le 2 \operatorname{card} K \sum_{m=1}^{n-1} p_m a_m - (p_n - p_{n-1}) a_n - (N - p_n) a_{n+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &\le 2 \operatorname{card} K \sum_{m=1}^{n-1} A^m \lambda^{-m} - A^{n-1}(A-1)\lambda^{-n} - (N - A^n)\lambda^{-n-1} \\ &\le (2 \operatorname{card} K \frac{A/\lambda}{A/\lambda - 1} + \frac{1-A}{\lambda})(A/\lambda)^{n-1} - (N - A^n)\lambda^{-n-1}. \end{aligned}$$

Fixons $\beta \in]\alpha, 1[$ et choisissons $\lambda = A^{\beta \cdot}$. On a bien $\lambda > A^{\alpha \cdot}$ et

$$C = -2\,\mathrm{card}\,K \frac{A/\lambda}{A/\lambda - 1} + \frac{A-1}{\lambda} = -2\frac{A^{1-\beta}}{A^{1-\beta}-1} + \frac{A-1}{A^{\beta \cdot}} > 0$$

dès que A est assez grand. Pour un tel A on a

$$S_N(x_0) \text{ et } -S_{-N}(x_0) \leq -CA^{(1-\beta)(n-1)} - (N - A^n)A^{-\beta(n+1)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(S_N(x_0)) &\leq \exp(-CA^{(1-\beta)(n-1)}) \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(-(N-A^n)A^{-\beta(n+1)}) \\ &\leq \exp(-CA^{(1-\beta)(n-1)}) \frac{1}{1-\exp(-A^{\beta(n+1)})} \\ &\leq \frac{1}{1-\exp(-A^{\beta \cdot})} \times \exp(-CA^{(1-\beta)(n-1)})\end{aligned}$$

et les séries $\sum_{N\geq 1} \exp S_N(x_0)$ et $\sum_{N \geq 1} \exp(-S_{-N}(x_0))$ sont majorées sur K. $\square$

3 Preuve du corollaire 1

Soit $\Theta = \mathbf{p}(\theta) \in \mathbb{T}^d$ ($\mathbf{p}$ désigne la projection de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{T}^d$). Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|n\Theta\| \geq cn^{-a}$$

où $c > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$. Considérons le compact $K = \{0, \Theta' = \mathbf{p}(\frac{1}{2}\theta)\}$ et T la translation $x \to x + \Theta$. On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(T^n(K), K) \geq \delta n^{-\alpha},$$

où δ est une constante strictement positive. On conclut an appliquant le théorème 1 **b** à T et K.

4 Un autre corollaire

Corollaire 2 *Soit $X = \mathbb{T}^d$ et T une transformation du tore dans lui même. Alors, dans chacun des deux cas suivants :*

1. *T est une translation ergodique du tore, $T : x \to x + \Theta$ où $\Theta \in \mathbb{T}^d$,*
2. *$d = 2$ et T est un automorphisme ergodique de $\mathbb{T}^2$, $T : x \to Ax$ où $A \in GL_2(\mathbb{Z})$,*

pour tout $s \in [0, d[$, il existe une fonction continue $h : X \to]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \leq s$ il existe une mesure de probabilité μ vérifiant :
μ ne charge pas les ensembles de dimension de Hausdorff $< t$,
μ est portée par un ensemble de dimension t et
μ vérifie l'équation de quasi-invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$.

Démonstration.
Nous avons besoin de l'existence de partie assez grosse du tore $\mathbb{T}^1$ dont les itérés par la rotation $T : x \in \mathbb{T}^1 \to x + \Theta \in \mathbb{T}^1$ sont deux à deux disjoints. Cette existence est une conséquence de résultats classiques d'analyse harmonique (cf. [5]) :
Un sous ensemble K du tore $\mathbb{T}^1$ est un ensemble de Kronecker si toute fonction continue de $\mathbb{T}^1$ dans le cercle, $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, est limite uniforme sur K de caractères.
De cette définition il résulte :
i. *Si $K \subset \mathbb{T}^1$ est ensemble de Kronecker et si $x_1, ..., x_k$ sont des éléments distincts de K alors $x_1, ..., x_k$ et 1 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.*
ii. *Si $\Theta \in K$ alors les translatés $K + n\Theta$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.*
Le résultat suivant est plus difficile ([6]):

iii. *Si Θ un élément irrationnel de $\mathbb{T}^1$ alors il existe un ensemble de Kronecker de dimension de Hausdorff 1 contenant Θ.*
Cas 1. Soit $\Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_d) \in \mathbb{T}^d$ tel que $\mathbb{N}\Theta$ soit dense et $s \in [d-1, d[$. Il existe un ensemble de Kronecker K de dimension 1 contenant Θ_1. Comme $\mathcal{H}^{s-d+1}(K) = \infty$, il existe un compact K' inclus dans K tel que $0 < \mathcal{H}^{s-d+1}(K') < \infty$ (cf. [4] p.62). Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1 au compact $K' \times \mathbb{T}^{d-1}$ dont la dimension de Hausdorff est supérieure à $s-d+1+(d-1) = s$ (cf. [4] ou [5] chapitre 7).

Notons que pour presque tous les Θ, on peut aussi construire à partir du théorème de Jarnick un compact K de $\mathbb{T}^1$ dont les itérés par T sont deux à deux disjoints (cf. [2]).

Cas 2. (preuve abrégée)

Lemme 1 *Soit K une ensemble de Kronecker de $\mathbb{T}^1$ et A un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ dont l'action T sur $\mathbb{T}^2$ est ergodique. Alors les ensembles $T^n(K \times K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.*

Le lemme résulte facilement de **i** et du fait suivant :

Si A est ergodique, 1 n'est jamais valeur propre de A^n (cf. [8] p. 31).

On conclut comme dans le cas 1 en remplaçant $K' \times \mathbb{T}^{d-1}$ par $K' \times K'$. $\square$

5 Unicité générique, preuve du théorème 2

Pour démontrer le théorème 2, on peut remarquer que si h est un cobord de la forme $h = \exp(f - f \circ T)$ où f est borélienne majorée, alors

$$\mu(\mathbb{T}^d) = 1 \text{ et } T^{-1}(\mu) = h\mu \Longrightarrow T^{-1}(\exp f\, \mu) = \exp f\, \mu \text{ et } (\exp f\, \mu)(\mathbb{T}^d) < +\infty.$$

Donc si T est une translation ergodique du tore, la mesure $\exp f\, \mu$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue du tore ce qui donne l'unicité. Cependant l'ensemble des cobords continues de la forme $f - f \circ T$, où f est une fonction borélienne, est maigre dans $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) : \int_{\mathbb{T}^d} f\, dx = 0\}$ (il est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide) ; ceci est vrai sous l'hypothèse plus générale, T est un homéomorphisme uniquement ergodique d'un espace métrique compact dont la probabilité invariante est non atomique ([9]). Une utilisation un peu plus détournée des cobords permet de prouver le théorème 2.

Soit $\Theta \in \mathbb{T}^d$ tel que $\overline{\mathbb{N}\Theta} = \mathbb{T}^d$ et T la translation du tore $\mathbb{T}^d$ définie par $T(x) = x + \Theta$. Si μ vérifie l'équation de quasi invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$ alors $T^{-k}(\mu) = h_k\mu$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et nous avons

$$1 = \mu(1 \circ T^{-k}) = \mu(h_k).$$

Par suite, si h est une fonction de U_0 telle que la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit totale dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, alors la solution de l'équation de quasi-invariance est unique. Ainsi, pour démontrer l'unicité générique, il suffit de montrer que l'ensemble G des $h \in U_0$ telles que la suite (h_k) soit totale dans E, est une intersection dénombrable d'ouverts denses de U_0.

1. Soit $h \in U_0$ et $f \in U$ telles que $h = f \circ T/f$. Nous avons $h_k = f \circ T^k/f$.

Lemme 2 *Si, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, les coefficients de Fourier de $\widehat{f}(n)$ sont différents de 0 alors la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale dans E.*

Preuve du lemme. Soit ν une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une mesure bornée sur $\mathbb{T}^d$. Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous ayons $\nu(h_k) = 0$. Avec $\mu = \frac{1}{f}\nu$ et $g(x) = f(-x)$, nous avons

$$\nu(h_k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x + k\Theta)\, \frac{d\nu(x)}{f(x)} = \int_{\mathbb{T}^d} g(-k\Theta - x)\, d\mu(x) = (g * \mu)(-k\Theta).$$

Comme $g * \mu$ est continue et la suite $(k\Theta)_{k\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{T}^d$, nous avons $g * \mu = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, $\widehat{g * \mu}(n) = \widehat{g}(n)\widehat{\mu}(n) = \widehat{f}(-n)\widehat{\mu}(n)$, donc d'après l'hypothèse sur f, nous avons $\widehat{\mu}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ et $\mu = 0$, d'où $\nu = 0$. $\square$

2. Montrons que G est dense dans U_0. D'après le lemme, il suffit de prouver que l'ensemble des fonctions de la forme $f \circ T/f$ où f est une fonction appartenant à U dont les coefficients de

Fourier ne sont jamais nuls, est dense dans U_0.
Soit $h \in U_0$ et $\varepsilon > 0$.
En approchant $\ln h$ par des polynômes trigonométriques de moyenne nulle, on voit qu'il existe $f \in U$ telle que $\|h - f \circ T/f\|_\infty \leq \varepsilon$.
Par continuité de l'application $S : \phi \in U \to \phi \circ T/\phi \in E$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f - \phi\|_\infty \leq \delta$ entraîne $\|S(f) - S(\phi)\|_\infty \leq \varepsilon$. Choisissons une fonction $\phi_0 \in E$ dont tous les coefficients de Fourier sont non nuls. En dehors d'un ensemble dénombrable de $t > 0$, les coefficients de Fourier de la fonction $f_t = f - t\phi_0$ sont tous différents de 0. Il existe donc $t > 0$ tel que $f_t \in U$, $\|f - f_t\|_\infty \leq \delta$ et les coefficients de Fourier de f_t sont tous différents de 0. Finalement, $\|h - S(f_t)\|_\infty \leq \|h - S(f)\|_\infty + \|S(f) - S(f_t)\|_\infty \leq 2\varepsilon$ et G est dense dans U_0.

3. Il reste à montrer que G est une intersection dénombrable d'ouverts.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Pour $k \in \mathbb{N}$, appelons S_k l'application $\phi \in U_0 \to \phi_k \in E$. Appelons $\mathcal{R}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies des S_k. Les éléments de $\mathcal{R}$ sont des applications continues de U_0 dans E car les applications S_k le sont. Donc, pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$G_{n,\varepsilon} = \bigcup_{R\in\mathcal{R}} R^{-1}(B(f_n, \varepsilon))$$

est un ouvert de U_0, et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}^*} G_{n,1/p}$$

est une intersection dénombrable d'ouverts. Or par définition de G, nous avons

$$\begin{aligned} G &= \{h \in U_0 : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \exists R \in \mathcal{R},\ R(h) \in B(f_n, 1/p)\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}^*} G_{n,1/p} \end{aligned}$$

donc G est une intersection dénombrable d'ouverts denses. □

RÉFÉRENCES

[1] : J. Bremont, *Comportement des sommes ergodiques pour les rotations et des fonctions peu régulières*, Publications des Séminaires de Rennes (1999).
[2] : N. Chevallier, M. Weber, *Ensemble de divergence des moyennes de Cesaro de certaines fonctions de* $\mathcal{S}^1$, C.R.A.S., t. 320, Serie I, p.153-158 (1995).
[3] : J.P. Conze, Y. Guivarc'h, *Marche en milieu aléatoire et mesure quasi-invariantes pour un système dynamique*, Dedicated to the memory of Anzelm Iwanick. Colloq. Math. 84/85, p. 457-480 (2000).
[4] : K. Falconer, Fractal Geometry, John Whiley & Sons, Chichester, 1990.
[5] : H. Federer, Geometric measure theory, Classics in Mathemetics, Springer-Verlag ,xvi (1966).
[6] : J.P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 50, Springer-Verlag (1970).
[7] : W. de Melo, S. van Strien : One dimensional dynamics, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bande 25, Springer-Verlag (1993).
[8] : P. Walters, An Introduction to ergodic Theory, Springer-Verlag, New-York (1982).
[9] : B. Weiss, correspondance privée.