

Meilleures approximations diophantiennes simultanées

Nicolas Chevallier

décembre 2001

Contents

1	Introduction	1
2	Meilleures approximations diophantiennes	2
2.1	Définition et inégalité fondamentale	2
2.2	Coefficients	3
2.3	Travaux existants	3
2.4	Meilleures approximations et répartition	4
2.5	Résultats sur s_n et b_n	6
2.6	Utilisation du réseau dual	7
2.7	Remarques sur le calcul des meilleures approximations.	8
2.8	Exemple	10
2.9	Discrépance et discrétance isotrope de suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}^*}$	13
3	Extensions du théorème des trois distances	14
3.1	Dans le tore de dimension 1	15
3.2	Dans le tore de dimension d	15
3.3	Recouvrements	16
4	Inégalités complémentaires	16
4.1	Extension de l'inégalité $q_{n+2}(x) \geq 2q_n(x)$	17
4.2	Extension de l'inégalité $r_n(x) \geq 2r_{n+2}(x)$	17
4.3	Changement de norme	17
4.4	Liaison entre les coordonnées de θ	18
5	Démonstrations	18
5.1	Preuve des propriétés P1, P2, P3 et P4	18
5.2	Démonstration de l'inégalité (2)	18
5.3	Démonstration de l'inégalité (3)	19
5.4	Démonstration de l'inégalité (4)	19
5.5	Preuve du lemme 1 (paragraphe 2.6)	19
5.6	Preuve du théorème 6	20
5.7	Recouvrements, preuve de la proposition 2	21
5.8	Changement de norme, preuve de la proposition 4	22
5.9	Liaison entre les coordonnées de θ , preuve de la proposition 5	23
5.10	Appendice : Minima d'un réseau	24
6	Exemple de $\theta \in \mathbb{R}^2$ dont la trajectoire est mal répartie	25
6.1	Construction	25
6.2	Application : un exemple de Yoccoz.	26
7	Bibliographie	29

1 Introduction

Soit $\Theta \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les points $0, \Theta, 2\Theta, \dots, n\Theta$ découpent le tore \mathbb{T}^1 en $n + 1$ intervalles qui ont plus 3 longueurs distinctes. Ce résultat connu sous le nom de théorème des 3 distances, est intimement liée au développement en fraction continue. Dans le tore de dimension supérieure à 2, ni le théorème des trois distances, ni le développement en fraction continue n'ont de généralisations évidentes. Ces généralisations constituent le cadre de notre travail.

Il est remarquable que l'algorithme du développement en fraction continue unidimensionnel donne les meilleures approximations d'un réel par des rationnels. Cette propriété de meilleure approximation devrait être importante pour l'extension du théorème des trois distances car la répartition de la suite $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend fortement des meilleures approximations. Malheureusement, à partir de la dimension deux, le point vue algorithmique devient difficile à concilier avec la recherche des meilleures approximations. Les travaux consacrés aux généralisations multidimensionnels du développement en fraction continue sont nombreux et débutent au 19^{ième} siècle mais l'étude directe des meilleures approximations diophantiennes simultanées ne commence qu'en 1979 par une série d'articles de J.C. Lagarias ([Lag1],..., [Lag6]). D'autres auteurs ont contribué à cette étude, on peut citer A. J. Brentjes ([Br1], [Br2]), G. Larcher ([Lar1]), V. T. Sós et G. Szekeres ([Só, Sz]). Les articles [Ch1],..., [Ch5] sont dans la même ligne et ce texte en est une synthèse avec quelques compléments.

La section 2 est consacrée aux meilleures approximations diophantiennes ; l'essentiel des résultats est donné dans les paragraphes 2.1, 2.4, 2.5 et 2.6. L'utilisation du réseau dual, présentée au paragraphe 2.6, est nouvelle et conduit à un nouveau résultat (théorème 6).

La section 3 est consacrée aux extensions du théorème des trois distances contenues dans les publications [Ch2], [Ch3] et [Ch4]. Nous avons aussi inclus une généralisation en dimension ≥ 2 d'un résultat de recouvrement lié au développement en fraction continue (cf. proposition 2).

L'ensemble des relations vérifiées par le développement en fraction continue unidimensionnelle ne se transpose pas aux meilleures approximations mais des inégalités plus faibles restent vraies, elles se déduisent du principe des tiroirs. Certaines de ces inégalités ont été prouvées par J. C. Lagarias, nous les rappelons section 4, il y figure aussi deux inégalités non publiées.

Les démonstrations des résultats non publiés sont données section 5.

La section 6 ne contient pas de résultats nouveaux, elle donne la construction d'éléments Θ appartenant au tore de dimension 2 dont la suite des multiples est de plus en plus mal répartie. L'existence de ces Θ est une des principales différences entre la dimension 1 et les dimensions ≥ 2 . La construction que nous indiquons est dans l'esprit de ce qui précède et nous l'utilisons pour retrouver le résultat de J. -C. Yoccoz sur la disparition de la propriété de Denjoy en dimension 2.

Notations.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x et $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche.
2. On note $|x|$ la norme euclidienne usuelle d'un vecteur x de \mathbb{R}^d et $x.y$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^d .
3. Pour x et $y \in \mathbb{R}^d$, $x \equiv y$ signifie $x - y \in \mathbb{Z}^d$.
4. $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. On note \mathbf{p} la projection canonique de \mathbb{R}^d sur \mathbb{T}^d .
5. Pour une norme N fixée sur \mathbb{R}^d et pour $X \in \mathbb{T}^d$, on note $\|X\| = \inf\{N(x) : x \in X\}$.
6. Pour Λ un réseau de \mathbb{R}^d muni d'une norme, $\lambda_1(\Lambda), \dots, \lambda_d(\Lambda)$ désignent les minima successifs de Λ .
7. Si f et g sont deux applications définies sur \mathbb{N} , $f(n) \sim g(n)$ lorsque n tend vers l'infini signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.
8. La relation entre réels $A(x, y, \dots) \ll B(x, y, \dots)$ signifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant pas de x, y, \dots telle que $A(x, y, \dots) \leq cB(x, y, \dots)$.
9. La relation $A(x, y, \dots) \asymp B(x, y, \dots)$ signifie $A(x, y, \dots) \ll B(x, y, \dots)$ et $A(x, y, \dots) \gg B(x, y, \dots)$.
10. Soit G un groupe et a un élément de G . Le sous-groupe engendré par a est noté $\langle a \rangle$.

2 Meilleures approximations diophantiennes

2.1 Définition et inégalité fondamentale

On suppose que \mathbb{R}^d est muni d'une norme N et pour $X \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ on note

$$\|X\| = \inf\{N(x) : x \in X\}.$$

On obtient ainsi une distance $d(X, Y) = \|X - Y\|$ invariante par translation sur le tore.

Convention et notation : Dans toute la suite θ désigne un point de \mathbb{R}^d et $\Theta = \mathbf{p}(\theta)$ sa projection dans le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Définition 1 Soit Θ un élément de \mathbb{T}^d et q un entier ≥ 1 . On dit que q est une meilleure approximation de Θ si, pour tout entier k strictement positif et strictement inférieur à q , on a $\|q\Theta\| < \|k\Theta\|$.

On dit que q est une meilleure approximation de θ si q est une meilleure approximation de la projection Θ de θ dans le tore \mathbb{T}^d .

Ordonnons par ordre croissant la suite des meilleures approximations. Posons $q_0(\Theta) = q_0(\theta) = 1$ et désignons par $q_n(\Theta) = q_n(\theta)$ la $n + 1$ -ième meilleure approximation de Θ si elle existe.

Lorsque $d = 1$, $q_n(\theta)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ ou $(n + 1)^{\text{ième}}$ réduite du développement en fraction continue de θ . À chaque meilleure approximation $q_n(\theta)$ d'un élément θ de \mathbb{R}^d correspond une approximation de θ par un point à coordonnées rationnelles, il s'agit du point $\frac{1}{q_n(\theta)}P_n$ où P_n est l'élément de \mathbb{Z}^d vérifiant

$$N(q_n(\theta)\theta - P_n) = \|q_n(\theta)\Theta\|$$

(P_n est unique dès que n est assez grand). L'élément $(P_n, q_n(\theta))$ de \mathbb{Z}^{d+1} s'appelle le *vecteur meilleure approximation* correspondant à $q_n(\theta)$. La précision de l'approximation rationnelle est donnée par la quantité

$$r_n(\Theta) = r_n(\theta) = \|q_n(\Theta)\Theta\|.$$

Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté nous écrirons simplement q_n et r_n . Enfin nous appellerons $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta) = q_n\theta - P_n$ le *résidu* de la meilleure approximation q_n .

L'inégalité $q_{n+1}r_n \leq 1$ valable en dimension 1 se généralise facilement :

Inégalité fondamentale. Il existe une constante C ne dépendant que de la norme N , telle que pour tout Θ de \mathbb{T}^d on ait

$$q_{n+1}r_n^d \leq C.$$

L'inégalité se déduit aisément du théorème de Dirichlet mais on peut aussi remarquer que les boules ouvertes $B(k\Theta, r_n/2)$, $k = 0, \dots, q_{n+1} - 1$, sont des boules disjointes de \mathbb{T}^d dont le volume total est donc inférieur à 1. Dans le cas particulier de la norme sup on obtient

$$q_{n+1}r_n^d \leq 1. \square$$

L'inégalité fondamentale a été remarquée par plusieurs auteurs et A. J. Brentjes a démontré une inégalité un peu plus générale à l'aide du théorème de Minkowski sur les convexes symétriques ([Br2]).

La notion de meilleure approximation n'est pas aussi satisfaisante en dimension d qu'en dimension 1 car des exemples simples montrent que la suite des meilleures approximations dépend de la norme choisie (cf. paragraphe 2.8).

2.2 Coefficients

Si x est un réel, la suite des coefficients du développement en fraction continue de x peut se reconstituer à partir des dénominateurs ou des "restes" :

$$a_n = \left[\frac{q_n(x)}{q_{n-1}(x)} \right] = \left[\frac{r_{n-2}(x)}{r_{n-1}(x)} \right].$$

Cela suggère deux manières de définir les coefficients d'un élément Θ de \mathbb{T}^d ,

$$a_n(\Theta) = \frac{q_n(\Theta)}{q_{n-1}(\Theta)} \text{ et } b_n(\Theta) = \left(\frac{r_{n-2}(\Theta)}{r_{n-1}(\Theta)} \right)^d.$$

2.3 Travaux existants

Nous résumons ici brièvement un certain nombre de travaux sur les meilleures approximations.

C. A Rogers. Dans [Ro] Rogers définit les meilleures approximations associées à la norme sup. Il montre que deux meilleures approximations consécutives ne sont jamais dans le même quadrant. Il donne aussi une version affaiblie de l'inégalité fondamentale ($q_n r_n^d < 1$).

J. C. Lagarias. Lagarias est le premier à avoir étudié de manière systématique les meilleures approximations d'un élément $\theta \in \mathbb{R}^d$. La définition que nous avons donnée apparaît dans le premier article qu'il a écrit sur les meilleures approximations [Lag1]. Lagarias s'est intéressé en particulier aux points suivants :

1. Minorer la croissance de la suite des meilleures approximations [Lag1], [Lag2]. Il montre par exemple que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (q_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{2^{d+1}},$$

cette inégalité étant indépendante de la norme sur \mathbb{R}^d (voir aussi les inégalités complémentaires section 4).

2. Définir les meilleures approximations simultanées de formes linéaires et minorer leurs croissances [Lag4].

3. Étudier le déterminant de $d + 1$ vecteurs meilleures approximations consécutifs. Il montre l'existence de $\theta \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier L il existe un entier k tel que

$$\det \begin{pmatrix} P_k, q_k \\ P_{k+1}, q_{k+1} \\ P_{k+2}, q_{k+2} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} P_{k+L}, q_{k+L} \\ P_{k+L+1}, q_{k+L+1} \\ P_{k+L+2}, q_{k+L+2} \end{pmatrix} = 0.$$

4. Donner des résultats sur les meilleures approximations des $\theta \in \mathbb{R}^d$ mal approximables, c'est-à-dire tels que $\inf_{q>0} q \|q\theta\| > 0$.

5. Étudier en particulier les couples (α_1, α_2) de \mathbb{R}^2 où $(1, \alpha_1, \alpha_2)$ forment une base d'un corps cubique ([Lag1]).

6. Calculer la complexité de problèmes liés aux meilleures approximations ([Lag5]). Grâce à l'algorithme de réduction des réseaux de Lovasz, il montre que lorsque la dimension est fixée, le calcul des meilleures approximations peut s'effectuer en un temps polynomial en la longueur des données.

7. Enfin, dans [Lag6] il définit la notion de base de Minkowski lexicographiquement réduite d'un réseau. Il construit ainsi un algorithme additif mais non positif qui donne une suite infinie de meilleures approximations pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$.

A. J. Brentjes ([Br1], [Br2]). Il étudie une notion plus générale de meilleure approximation : Soit l une droite de \mathbb{R}^{d+1} et Λ un réseau de \mathbb{R}^{d+1} . Il définit les meilleures approximations de la direction l par les points du réseau Λ . Sur l'hyperplan l^* orthogonal à l on se donne une norme N et on fixe une forme linéaire h de \mathbb{R}^{d+1} , nulle sur l^* . Notons enfin π la projection orthogonale sur l'hyperplan l^* . Un point B de Λ est une meilleure approximation de l s'il n'y a pas de point $M \in \Lambda$ tel que

$$\begin{cases} N(\pi(M)) \leq N(\pi(B)) \text{ et } |h(M)| < |h(B)| \\ \text{ou } N(\pi(M)) < N(\pi(B)) \text{ et } |h(M)| = |h(B)|. \end{cases}$$

Pour cette notion de meilleure approximation il donne une inégalité du même type que l'inégalité fondamentale. Sa contribution principale est un algorithme additif en dimension 2 ($d + 1 = 3$) qui donne toutes les meilleures approximations lorsque N est la norme euclidienne. Il applique cet algorithme à la recherche des unités dans les corps cubiques.

V. T. Sós et G. Szekeres ([Só, Sz]). Les résidus $\varepsilon_n = q_n \theta - p_n$ du développement en fractions continues unidimensionnelles sont alternativement positifs et négatifs. En dimension 2, avec la norme sup, V. T. Sós et G. Szekeres étudient la signature des résidus des meilleures approximations pour la norme "sup" (voir plus haut, C.A. Rogers), ils montrent :

Étant donnée une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de quadrants telle que $Q_{n+1} \neq Q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément θ de \mathbb{R}^2 tel que ε_n appartienne à Q_n pour tout n .

G. Larcher ([Lar1], [Lar2]). Il étudie la discrédance isotrope des suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$, $\Theta \in \mathbb{T}^d$. Dans ce but, il estime la discrédance isotrope aux instants q_n , c'est-à-dire la discrédance isotrope des suites finies de la forme $\{0, \dots, (q_n - 1)\theta\}$ où q_n est une meilleure approximation de Θ ; puis, grâce à une majoration presque-sûre des coefficients a_n , il en déduit une majoration globale de la discrédance isotrope. Il donne aussi une minoration de la discrédance isotrope dont la démonstration s'appuie essentiellement sur le théorème des minima de Minkowski. Dans [Ch3], nous redonnons une démonstration simple de la minoration de Larcher grâce à une généralisation de l'inégalité fondamentale aux meilleures approximations simultanées de formes linéaires.

2.4 Meilleures approximations et répartition

Les inégalités présentées dans cette section (cf. (1), (2), (3) et (4) plus loin) sont en partie nouvelles, elles sont sous-jacentes dans [Ch1]. Leurs démonstrations sont simples, nous les donnons section 5.

Soit $\Theta \in \mathbb{T}^d$. Notre but est d'étudier, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la répartition dans le tore de l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$. Nous dirons qu'un sous-ensemble fini \mathcal{X} de \mathbb{T}^d est bien réparti si le diamètre de la plus grande boule ouverte de \mathbb{T}^d qui ne rencontre pas \mathcal{X} est du même ordre de grandeur que la distance des deux points (distincts) de \mathcal{X} les plus rapprochés. Plus précisément, posons

$$e(\mathcal{X}) = \sup\{r : \exists a \in \mathbb{T}^d, B(a, r) \cap \mathcal{X} = \emptyset\},$$

$$r(\mathcal{X}) = \{d(x, y) : x, y \in \mathcal{X}, x \neq y\},$$

nous utiliserons le rapport

$$\frac{e(\mathcal{X})}{r(\mathcal{X})}$$

comme mesure de la qualité de la répartition de \mathcal{X} . Notons que $e(\mathcal{X})$ s'appelle la dispersion de \mathcal{X} et a été introduite par Hlawka ([Hla]). Dans le cas d'une suite $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$, $\frac{e(\mathcal{X})}{r(\mathcal{X})}$ représente le rapport entre les approximations diophantiennes inhomogènes et les approximations diophantiennes homogènes. Remarquons que si $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ est une suite de \mathbb{T}^d , l'équirépartition de cette suite ne découle pas de l'inégalité

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{e(\{x_0, \dots, x_N\})}{r(\{x_0, \dots, x_N\})} < +\infty.$$

Cette inégalité entraîne seulement que les valeurs d'adhérence faible de la suite de mesures $(\frac{1}{n}(\delta_{x_0} + \dots + \delta_{x_{n-1}}))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des mesures équivalentes à la mesure de Lebesgue. Inversement il est facile de trouver des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équiréparties telles que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e(\{x_0, \dots, x_N\})}{r(\{x_0, \dots, x_N\})} = +\infty$.

Nous avons adopté le rapport $\frac{e(\mathcal{X})}{r(\mathcal{X})}$ comme mesure de la répartition car il représente une quantité géométrique naturelle et il est facile d'en obtenir des majorations et des minoration à l'aide des meilleures approximations. En complément, nous rappelons quelques résultats sur la discrédance dans le paragraphe 2.9.

Répartition de $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$. L'utilisation des meilleures approximations repose sur la remarque simple :

Si q_n est une meilleure approximation de Θ alors Θ est proche d'un élément de \mathbb{T}^d d'ordre fini égal à q_n ; par conséquent l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ est proche d'un sous-groupe fini de \mathbb{T}^d (cf. figures 1 et 3, paragraphe 2.8).

Comme les sous-groupes finis de \mathbb{T}^d correspondent aux réseaux de \mathbb{R}^d qui contiennent \mathbb{Z}^d , les outils de la géométrie des réseaux sont très utiles, en particulier le théorème de Minkowski sur les minima (cf. appendice). Introduisons quelques notations afin d'énoncer les propriétés qui précisent le lien entre meilleures approximations et sous-groupes.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^d$, q_n une meilleure approximation de Θ et $\varepsilon_n = q_n\theta - P_n$ le résidu. L'approximation rationnelle correspondant à q_n est

$$\theta_n = \frac{1}{q_n}P_n = \theta - \frac{\varepsilon_n}{q_n}, \quad \Theta_n = \mathbf{p}(\theta_n)$$

(\mathbf{p} désigne la projection de \mathbb{R}^d dans le tore \mathbb{T}^d). On lui associe le réseau

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}\theta_n + \mathbb{Z}^2 = \mathbf{p}^{-1}(\langle \Theta_n \rangle).$$

Ce réseau a été utilisé par Larcher pour estimer la discrédance isotrope de la suite $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$ (cf. [Lar1]). Le transfert des propriétés du réseau Λ_n ou du sous-groupe $\langle \Theta_n \rangle$ à l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ se fait grâce aux propriétés suivantes :

(P1). L'ensemble $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ et le sous groupe engendré par Θ_n sont proches :

$$\forall k \in \{0, \dots, q_n - 1\}, d(k\Theta, k\Theta_n) \leq r_n(\Theta)$$

(la distance de Hausdorff entre $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ et $\langle \Theta_n \rangle$ est inférieure à r_n)

(P2). Les points du sous-groupe $\langle \Theta_n \rangle$ sont à une distance les uns des autres du même ordre de grandeur que ceux de $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$:

$$2r_{n-1}(\Theta) \geq r(\Lambda_n) = r(\langle \Theta_n \rangle) = \lambda_1(\Lambda_n) \geq r_{n-1}(\Theta)/2$$

($\lambda_1(\Lambda_n)$ désigne le premier minimum du réseau Λ_n).

(P3). Le sous-groupe $\langle \Theta_n \rangle$ a q_n éléments :

$$\forall k \in \{1, \dots, q_n - 1\}, k\Theta_n \neq 0.$$

(P4). $\det \Lambda_n = \frac{1}{q_n}$.

Ces propriétés sont faciles à vérifier, elles sont formulées dans [Ch2] et plusieurs articles en donnent implicitement la démonstration (cf. section 5 pour une démonstration). Utilisons-les pour estimer le rapport $\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}$.

Cas de la dimension 1 : la situation est limpide car \mathbb{T}^1 ne contient qu'un seul sous groupe d'ordre q_n et les éléments de ce sous-groupe sont régulièrement espacés à une distance $\frac{1}{q_n}$. La propriété **(P1)** montre que

$$e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) \leq e(\langle \Theta_n \rangle) + r_n = \frac{1}{2q_n} + r_n$$

et la propriété **(P2)** montre que

$$\frac{1}{q_n} = r(\langle \Theta_n \rangle) \leq 2r_{n-1}.$$

Or par définition de q_n on a $r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) = r_{n-1}$ donc

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \leq \frac{\frac{1}{2q_n} + r_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} + r_n}{r_{n-1}} \leq 2$$

Un raisonnement plus fin, basé sur le théorème des trois distances, montre que

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \leq 1.$$

Cas des dimensions ≥ 2 : La situation est moins simple car \mathbb{T}^d n'a pas qu'un seul type de sous-groupe d'ordre q_n , le rapport $\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}$ s'estime à l'aide de la quantité

$$s_n = \frac{1}{q_n r_{n-1}^d}.$$

D'après la propriété **(P2)**, $q_n \lambda_1(\Lambda_n)^d \asymp q_n r_{n-1}^d = \frac{1}{s_n}$ et d'après le théorème de Minkowski sur les minima d'un réseau

$$\lambda_1(\Lambda_n) \times \dots \times \lambda_d(\Lambda_n) \asymp \det \Lambda_n = \frac{1}{q_n},$$

donc $\lambda_1^{d-1} \lambda_d \ll \frac{1}{q_n}$ et $\frac{\lambda_d}{\lambda_1} \ll \frac{1}{q_n \lambda_1^d} \asymp s_n$. Comme $e(\Lambda_n) \asymp \lambda_d$ (cf. appendice, corollaire) on en déduit que

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \leq \frac{e(\Lambda_n) + r_n}{r_{n-1}} \leq \frac{e(\Lambda_n)}{r(\Lambda_n)/2} + 1 \ll s_n + 1,$$

or d'après l'inégalité fondamentale s_n est minoré par une constante strictement positive donc

$$(1) \quad \frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \ll s_n,$$

(voir [Ch1] pour le cas de la dimension 2). On démontre de même l'inégalité (cf. section 5)

$$(2) \quad \frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \gg s_n^{\frac{1}{d-1}}.$$

Répartition de $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$ pour $q_n \leq q < q_{n+1}$. Décrivons la transition d'une meilleure approximation à la suivante. La trajectoire se construit à partir des points $a\Theta$, $a = 0, \dots, q_n - 1$ et de ε_n . En effet, chaque $q \in \{q_n, \dots, q_{n+1} - 1\}$ s'écrit sous la forme $q = a + kq_n$ avec $a < q_n$ et $1 \leq k \leq \lfloor \frac{q_{n+1} - 1 - a}{q_n} \rfloor$. On obtient

$$q\theta = (kq_n + a)\theta = a\theta + k(P_n + \varepsilon_n) \equiv a\theta + k\varepsilon_n.$$

Lorsque q croît la trajectoire progresse depuis les points $a\Theta$, $a < q_n$, par translations successives de ε_n . Par définition des meilleures approximations, toutes les autres distances entre les points de la trajectoire sont supérieures à la longueur de ε_n (cf. figure 2, paragraphe 2.8).

Le rapport $\frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}$ s'estime à l'aide de $t_n = \frac{1}{q_n r_n^d}$:

$$(3) \quad \frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} \ll t_n,$$

$$(4) \quad \frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} \geq ct_n^{\frac{1}{d-1}} - \lfloor \frac{q}{q_n} \rfloor$$

(cf. section 5 pour une démonstration). D'après l'inégalité (3), si $q_n r_n^d$ n'est pas petit, alors $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$ est bien réparti pour tous les $q_n < q < q_{n+1}$. D'après l'inégalité (4), si $q_n r_n^d$ est petit alors $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$ est mal réparti tant que $\frac{q}{q_n}$ n'est pas trop grand (cf figure 7, paragraphe 2.8).

Dans [Ch1] on peut trouver un exemple de $\Theta \in \mathbb{T}^d$ tel que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} = \infty,$$

et dans [Ca] on peut trouver un exemple analogue pour les formes linéaires. L'existence de tels Θ montre la différence entre la dimension 1 et les dimensions supérieures. Nous redonnons, section 6, une construction (légèrement simplifiée) d'un tel Θ et nous l'utilisons pour retrouver l'exemple de J.C. Yoccoz sur la disparition de l'inégalité de Denjoy-Koksma en dimension 2.

2.5 Résultats sur s_n et b_n

Les inégalités (1), (2), (3) et (4) montrent que s_n et t_n jouent un rôle important pour décrire la répartition de la suite $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$. D'autre part s_n et t_n sont liés au coefficient b_{n+1} par la relation $t_n = s_n b_{n+1}$. Dans [Ch5] on montre les résultats suivants sur s_n et b_n (\mathbb{R}^d est muni de la norme sup) :

Théorème 1 *Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ $\liminf_{n \rightarrow \infty} q_n(\Theta) r_{n-1}^d(\Theta) = 0$ i.e. $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.*

Théorème 2 *Il existe une constante c ne dépendant que de la dimension telle que pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ on ait $\limsup_{n \rightarrow \infty} q_n(\Theta) r_{n-1}^d(\Theta) \geq c$.*

Les coefficients (b_n) vérifient un théorème du type Borel-Bernstein :

Théorème 3 Soit g et h deux applications décroissantes de \mathbb{N} dans \mathbb{R}^{+*} telles que $\sum_{n \geq 0} g(n) < \infty$ et $\sum_{n \geq 0} h(n) = \infty$.

1) Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ il existe au plus un nombre fini de n tels que

$$b_{n+1}(\Theta) = \left(\frac{r_{n-1}(\Theta)}{r_n(\Theta)} \right)^d \geq \frac{1}{g(n)}.$$

2) Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ il existe une infinité de n tels que

$$b_{n+1}(\Theta) = \left(\frac{r_{n-1}(\Theta)}{r_n(\Theta)} \right)^d \geq \frac{1}{h(n)}.$$

2.6 Utilisation du réseau dual

Le contenu de ce paragraphe est nouveau, il donne une meilleure compréhension de certains résultats de [Ch2] et [Ch5] (les théorèmes 4 et 5 plus loin) et en permet la généralisation (théorème 6). Nous supposons que \mathbb{R}^d est muni de la norme euclidienne usuelle notée N .

Pour $\Theta \in \mathbb{T}^2$, des images d'ordinateur font souvent apparaître un réseau de droites parallèles autour duquel l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ est régulièrement réparti (voir les figures du paragraphe 2.8). Ce phénomène s'explique facilement à l'aide du réseau dual Λ_n^*

$$\begin{aligned} \Lambda_n^* &= \{X \in \mathbb{R}^d : \forall Y \in \Lambda_n, X.Y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{X \in \mathbb{Z}^d : X.\theta_n \in \mathbb{Z}\} \text{ car } \Lambda_n = \mathbb{Z}^d + \theta_n \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Appelons X_n un plus court vecteur du réseau Λ_n^* . Le vecteur X_n détermine un réseau d'hyperplans $\mathcal{H}_n = \{X \in \mathbb{R}^2 : X.X_n \in \mathbb{Z}\}$ qui contient Λ_n . Le réseau \mathcal{H}_n est le meilleur possible :

1. la distance entre deux hyperplans consécutifs de \mathcal{H}_n est $\frac{1}{N(X_n)}$,
2. la distance entre deux hyperplans consécutifs d'un réseau d'hyperplans qui contient Λ_n , est inférieure à $\frac{1}{N(X_n)}$.

Examinons les figures 5 et 6 de la section 2.8. Les points $0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta$ sont très proches d'un réseau de droites. Pour l'expliquer il suffit de comparer la distance entre deux hyperplans consécutifs du réseau \mathcal{H}_n et la distance de la trajectoire au réseau \mathcal{H}_n . D'après la propriété **(P1)** (paragraphe 2.4) la distance de $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ au sous-groupe $\langle \Theta_n \rangle$ est inférieure à r_n donc la distance de $\{0, \theta, \dots, (q_n - 1)\theta\} + \mathbb{Z}^d$ à \mathcal{H}_n est inférieure à r_n , alors que la distance entre deux hyperplans successifs de \mathcal{H}_n est $\frac{1}{N(X_n)}$. Il faut donc comparer r_n et $\frac{1}{N(X_n)}$. D'après le théorème sur les minima d'un réseau on a

$$(N(X_n))^d = (\lambda_1(\Lambda_n^*))^d \leq \lambda_1(\Lambda_n^*)\lambda_2(\Lambda_n^*)\dots\lambda_n(\Lambda_n^*) \ll \det \Lambda_n^* = q_n,$$

et donc

$$N(X_n) \ll q_n^{\frac{1}{d}}$$

Ainsi dès que $q_n r_n^d$ est petit, r_n est petit devant la distance entre deux hyperplans consécutifs du réseau \mathcal{H}_n et l'ensemble $\{0, \theta, \dots, (q_n - 1)\theta\}$ est situé à proximité du réseau \mathcal{H}_n comme dans les figures 5 et 6; au contraire, lorsque $q_n r_n^d$ n'est pas petit la trajectoire peut s'éloigner du réseau \mathcal{H}_n comme dans la figure 3.

Le vecteur X_n permet aussi de distinguer les meilleures approximations entre elles. Dans la transition de q_n à q_{n+1} deux cas peuvent se produire :

1. Soit le plus court vecteur du réseau dual Λ_n^* appartient aussi au réseau Λ_{n+1}^* , i.e. $X_n.\theta_{n+1} \in \mathbb{Z}$.
 2. Soit le plus court vecteur du réseau dual Λ_n^* n'appartient pas au réseau Λ_{n+1}^* , i.e. $X_n.\theta_{n+1} \notin \mathbb{Z}$.
- Le lemme suivant précise le premier cas (cf. section 5 pour la démonstration).

Lemme 1 1) Tant que $X_n.\theta_{n+p} \in \mathbb{Z}$, les points $k\theta$, $k = 0, \dots, q_{n+p} - 1$, sont à proximité du réseau d'hyperplan \mathcal{H}_n . Plus précisément, si $p \geq 0$ et $X_n.\theta_{n+p} \in \mathbb{Z}$ alors

$$\forall k \in \{0, \dots, q_{n+p} - 1\}, \|k\theta.X_n\| \ll q_n^{\frac{1}{d}} r_{n+p}.$$

2) Si $N(X_n)r_n < \frac{1}{2}$ alors $X_n.\theta_{n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow N(X_{n+1}) = N(X_n)$.

Décrivons la transition de q_n à q_{n+1} lorsque $X_n.\theta_{n+1} \notin \mathbb{Z}$ et $q_n r_n^d$ est petit. À l'instant $q = q_n - 1$ la trajectoire est à proximité du réseau d'hyperplans $\mathcal{H}_n = \{X \in \mathbb{R}^2 : X.X_n \in \mathbb{Z}\}$ et pour chaque $a < q_n$ les points $(kq_n + a)\theta \equiv a\theta + k\varepsilon_n$, $k = 0, \dots, \lfloor \frac{q_{n+1}}{q_n} \rfloor - 1$, traversent l'espace compris entre deux hyperplans du réseau \mathcal{H}_n (voir les figures paragraphe 2.8 et pour une démonstration voir le lemme 2 section 5). Si on combine cette observation avec le fait qu'en dimension 2, \mathcal{H}_n est un réseau de droites sur lequel les points de Λ_n sont régulièrement répartis on obtient l'inégalité :

Théorème 4 ([Ch 2]) *Soit $\Theta \in \mathbb{T}^2$. Si $\mathbb{N}\Theta$ est dense dans \mathbb{T}^2 alors il existe une infinité d'entiers n tels que $q_n r_{n-1} r_{n-2} \geq 1/100$.*

En dimension 3 ou plus, les points de Λ_n peuvent être mal répartis sur le réseau d'hyperplans \mathcal{H}_n . Cette différence explique le résultat :

Théorème 5 ([Ch5]) *Il existe $\Theta \in \mathbb{T}^3$ tel que $\mathbb{N}\Theta$ soit dense dans \mathbb{T}^3 et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n r_{n-1} r_{n-2} r_{n-3} = 0.$$

Pour obtenir une extension en dimension ≥ 3 du théorème 4, il faut changer sa formulation et utiliser la forme linéaire $X \in \mathbb{R}^d \rightarrow X_n.X$.

Théorème 6 *Il existe une constante strictement positive $c(d)$ ne dépendant que de la dimension telle que pour tout Θ de \mathbb{T}^d de trajectoire dense l'une des inégalités*

$$\begin{aligned} q_n r_n^d &\geq c(d), \\ q_{n+1} \|X_n.\theta\| &\geq c(d) \end{aligned}$$

soit vérifiée par une infinité de $n \in \mathbb{N}$.

Ce théorème est démontré section 5, on peut en déduire une démonstration du théorème 4 légèrement différente de celle de [Ch2].

2.7 Remarques sur le calcul des meilleures approximations.

La suite des vecteurs meilleures approximations (P_n, q_n) ne peut pas être obtenue à l'aide d'un algorithme "classique" de développement en fraction continue multidimensionnelle ; en effet, Lagarias a montré que la suite (P_n, q_n) des vecteurs meilleures approximations d'un élément $\theta \in \mathbb{R}^d$ ne satisfait en général pas la propriété d'unimodularité (cf. [Lag3] et section 2.3) (Il est bien sûr possible d'affaiblir les conditions que l'on exige d'un développement en fraction continue, cf. [Lag6]). Cependant Lagarias a montré comment utiliser l'algorithme de réduction des réseaux de Lovasz pour calculer les meilleures approximations ([Lag5],[Lag6]). Nous voulons simplement ajouter deux remarques à sa méthode.

L'idée de Lagarias est d'introduire pour $t > 0$ le réseau de \mathbb{R}^{d+1}

$$\Lambda_t = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \dots \oplus \mathbb{Z}e_d \oplus \mathbb{Z}(te_{d+1} - (\theta_1 e_1 + \dots + \theta_d e_d))$$

où e_1, \dots, e_{d+1} sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d et $t > 0$. Supposons \mathbb{R}^{d+1} muni de la norme euclidienne. Soit $v_t = \sum_{i=1}^d p_i e_i + q_t (te_{d+1} - \sum_{i=1}^d \theta_i e_i)$ le plus court vecteur de Λ_t , un calcul simple montre que q_t est une meilleure approximation de θ . En effet, si q est un entier compris entre 1 et $q_t - 1$ alors pour tout $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ on a

$$N\left(\sum_{i=1}^d k_i e_i + q(te_{d+1} - \sum_{i=1}^d \theta_i e_i)\right) \geq N(v_t)$$

donc

$$N^2\left(\sum_{i=1}^d (k_i - q\theta) e_i^2\right) + q^2 t^2 \geq N^2\left(\sum_{i=1}^d (p_i - q_t \theta) e_i^2\right) + q_t^2 t^2$$

et

$$N^2\left(\sum_{i=1}^d (k_i - q\theta)e_i\right) > N^2\left(\sum_{i=1}^d (p_i - q_t\theta)e_i\right).$$

L'algorithme de Lovasz fournit une bonne base b_1, \dots, b_{d+1} du réseau Λ_t pour laquelle $N(b_1) \leq 2^{(d-1)/2}N(v_t)$ (cf. [G.L.S.] page 143, theorem 5.3.13). Babai ([Ba]) a démontré que cette base vérifie :

pour tout $k \in \{1, \dots, d+1\}$ le sinus de l'angle entre b_k et le sous-espace engendré par les autres vecteurs de base est supérieur à $(\sqrt{3}/2)^{d+1}$.

Il suffit donc de chercher le plus court vecteur de Λ_t parmi les vecteurs dont les coordonnées dans la base b_1, \dots, b_{d+1} sont inférieures à $(2/\sqrt{3})^{d+1}$. Notre première remarque porte sur le choix du paramètre $t > 0$.

Supposons que pour une certaine valeur de t nous ayons trouvé une meilleure approximation q_t , quelle nouvelle valeur t' faut-il choisir pour être sûr d'obtenir une nouvelle meilleure approximation $q_{t'} > q_t$?

La réponse se déduit facilement de l'inégalité fondamentale. Soit n l'entier tel que $q_n = q_t$; nous avons $r_n = r_t = N(\sum_{i=1}^d (p_i - q_t\theta)e_i)$. Appelons C la constante intervenant dans l'inégalité fondamentale. Considérons le plus petit entier k tel que $r_{n+k} < \frac{1}{2}r_n$. Pour $p < k$ nous avons

$$q_{n+p+1}r_n^d \leq q_{n+p+1}2^d r_{n+p}^d \leq 2^d C$$

donc

$$q_{n+k} \leq \frac{2^d C}{r_n^d}.$$

Choisissons

$$t' = \frac{r_n^{d+1}}{2^{d+1}C}.$$

Soit $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ les coordonnées du point P_{n+k} de \mathbb{Z}^d vérifiant $r_{n+k} = N(P_{n+k} - q_{n+k}\theta)$. Le vecteur $w = \sum_{i=1}^d k_i e_i + q_{n+k}(t' e_{d+1} - \sum_{i=1}^d \theta_i e_i)$ appartient à Λ_{n+k} et

$$\begin{aligned} N(w)^2 &= N^2\left(\sum_{i=1}^d (k_i - q_{n+k}\theta_i)e_i + q_{n+k}t'e_{d+1}\right) \\ &= r_{n+k}^2 + \left(q_{n+k} \frac{r_n^{d+1}}{2^{d+1}C}\right)^2 \\ &< \frac{1}{4}r_n^2 + \left(\frac{1}{2}r_n\right)^2 < r_n^2. \end{aligned}$$

Par conséquent la meilleure approximation $q_{t'} = q_{n'}$ déduite du plus court vecteur $v_{t'}$ de $\Lambda_{t'}$, est telle que $r_{n'} \leq N(w) < r_n$ et $q_{t'} > q_t$. Ce choix de t' en fonction de r_t combiné avec la méthode Lagarias donne un algorithme qui détermine une sous-suite de la suite des meilleures approximations.

Un "bon" algorithme multidimensionnel de développement en fraction continue devrait détecter la présence d'une relation linéaire entre les coordonnées de θ . Cela peut se faire grâce au réseau dual Λ_n^* . En effet, on vérifie facilement que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des entiers non tous nuls, a_1, \dots, a_d , tels que $a_1\theta_1 + \dots + a_d\theta_d \in \mathbb{Z}$.
2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n.\theta \in \mathbb{Z}$.
3. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X_n.\theta \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq n_0$.

Il suffit donc pour détecter une relation linéaire, de déterminer à l'aide de la méthode précédente une sous-suite q_{n_k} de la suite des meilleures approximations et pour chaque k de calculer successivement une base de Λ_{n_k} (cf. [G.L.S.] page 154, corollary 5.4.8) puis une base de $\Lambda_{n_k}^*$ et enfin le plus court vecteur de $\Lambda_{n_k}^*$.

2.8 Exemple

Considérons l'élément $\theta = (0, 963729, 0, 153624) \in \mathbb{R}^2$ et examinons le déroulement du début de la trajectoire de Θ dans le tore \mathbb{T}^2 . Un calcul sur machine montre que pour \mathbb{R}^2 muni de la norme

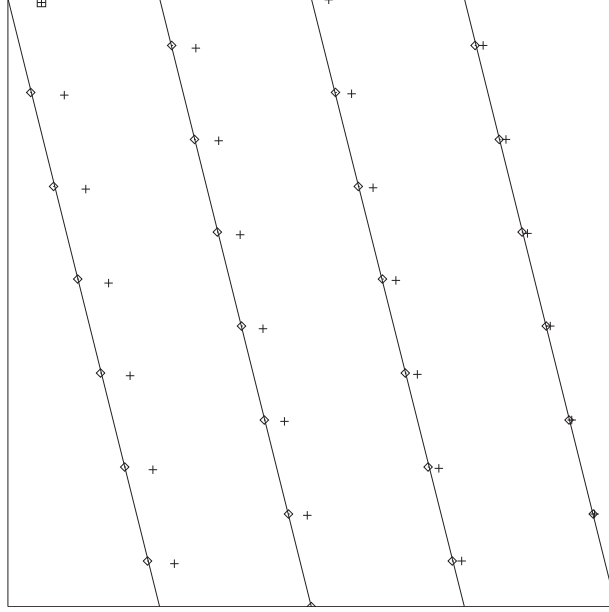


Figure 1

euclidienne, les meilleures approximations sont :

$q_0 = 1, q_1 = 26, q_2 = 137, q_3 = 221, q_4 = 332, q_5 = 358, q_6 = 1048, q_7 = 1406, q_8 = 16625, q_9 = 30796, q_{10} = 32202$ etc...

Lorsque \mathbb{R}^2 est muni de la norme sup les meilleures approximations sont :

$q'_0 = 1, q'_1 = 26, q'_2 = 111, q'_3 = 137, q'_4 = 332, q'_5 = 358, q'_6 = 1048, q'_7 = 1406, q'_8 = 32202$ etc...

Dans les figures qui suivent le tore est représenté par le carré $[0, 1]^2$. Les points de la trajectoire $q\Theta$ sont représentés par des croix et les approximations $q\Theta_n$ par des petits losanges. Sur chaque figure le point correspondant à la plus grande meilleure approximation est représenté par le petit carré contenant une croix (sauf sur la figure 4).

La figure 1 correspond à la première phase de la trajectoire : $q\Theta, q = 1, \dots, q_1$. Le point Θ se trouve en bas à droite et $2\Theta, 3\Theta, 4\Theta \dots$ apparaissent successivement le long des droites représentant \mathcal{H}_1 pour aboutir au point $q_1\Theta$ situé en haut à gauche. On a $s_1 \simeq 1,5$ et $t_1 \simeq 11,7$.

La figure 2 représente les points $q\Theta, q = 1, \dots, 52$. Elle illustre la progression pour les q compris entre deux meilleures approximations, des points $q\Theta$ à partir des points $k\Theta, k \leq q_1$, par translations de vecteur ε_1 . Ici les points $q\Theta$ traversent la partie comprise entre les droites du réseau \mathcal{H}_1 par conséquent $X_1 \cdot \theta_2 \notin \mathbb{Z}$.

La figure 3 représente l'ensemble $\{\Theta, \dots, q'_2\Theta\}$. On a , $s_2 \simeq 2,2$ et $t_2 \simeq 2,3$ ($s_3 = 1,5, t_3 = 1,7, s_4 \simeq 1,1, t_4 \simeq 1,7, s_5 \simeq 1,6$ et $t_5 \simeq 12,1$).

La figure 4 représente l'ensemble $\{\Theta, \dots, 600\Theta\}$.

Les figures 5 et 6 représentent les ensembles $\{\Theta, \dots, q_6\Theta\}$ et $\{\Theta, \dots, q_7\Theta\}$. Le réseau de droites ne change pas, la trajectoire ne traverse pas l'espace compris entre les droites du réseau \mathcal{H}_6 . On a $s_6 \simeq 4,1, t_6 \simeq 6,4, s_7 \simeq 4,8$ et $t_7 = 20,3$.

Enfin la figure 7 représente l'ensemble $\{\Theta, \dots, 4000\Theta\}$. Comme l'approximation r_7 est très bonne les points sont très rapprochés et leur lente progression d'une droite de $\mathcal{H}_6 = \mathcal{H}_7$ à une autre, est clairement visible. On a $s_8 \simeq 2, t_8 \simeq 2, s_9 \simeq 1,1, t_9 \simeq 1,3, s_{10} \simeq 1,2$ et $t_{10} \simeq 19,6$.

2.9 Discrédance et discrédance isotrope de suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$.

La discrédance est la mesure de l'équirépartition communément utilisée. Elle est naturelle mais privilégie les directions des axes de coordonnées. La discrédance isotrope a l'avantage de ne pas privilégier de direction. Nous rappelons ces définitions et quelques résultats sur ces discrédances. Ils conduisent à une appréciation très différente de la répartition des suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$:

- Pour la discrédance (usuelle) les suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$ sont presque-sûrement proches (à des facteurs

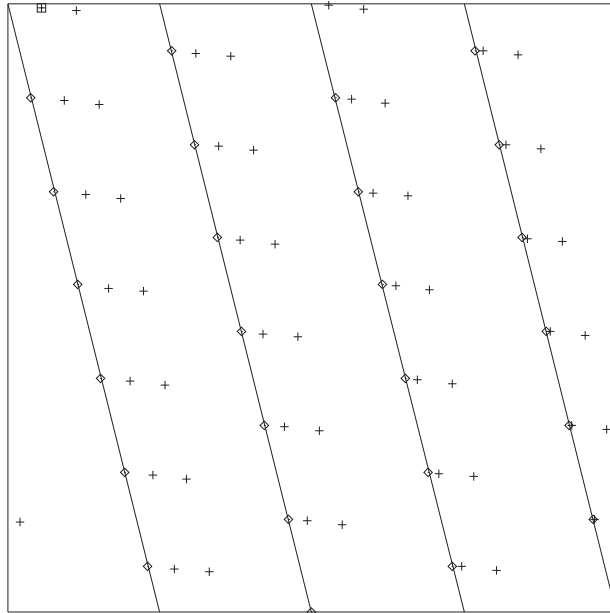


Figure 2

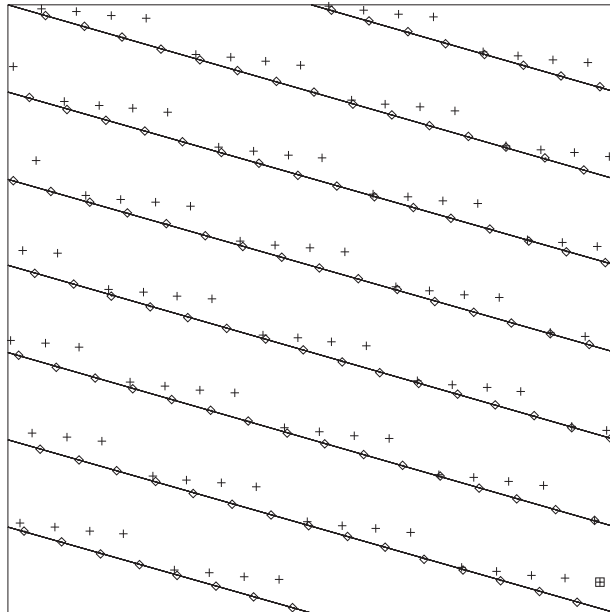


Figure 3

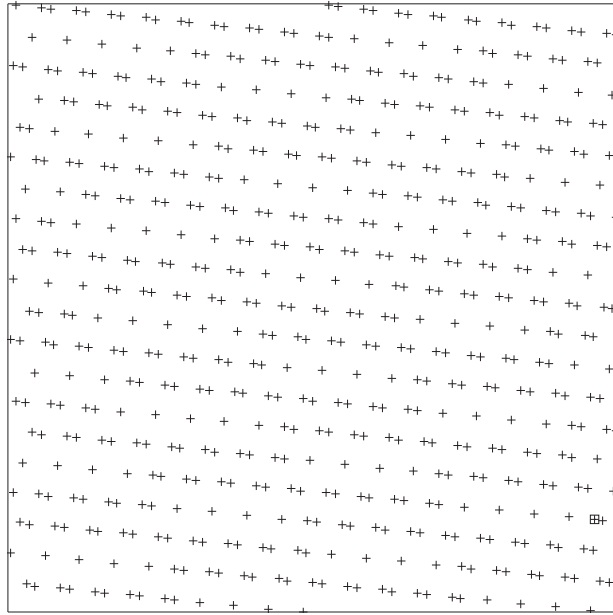


Figure 4

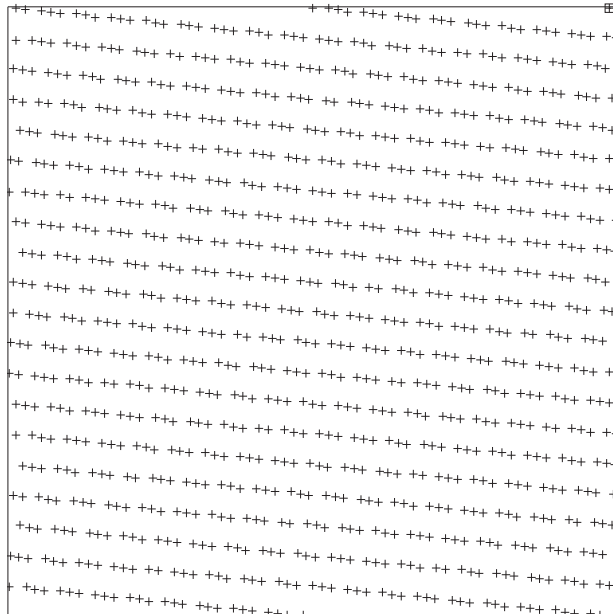


Figure 5

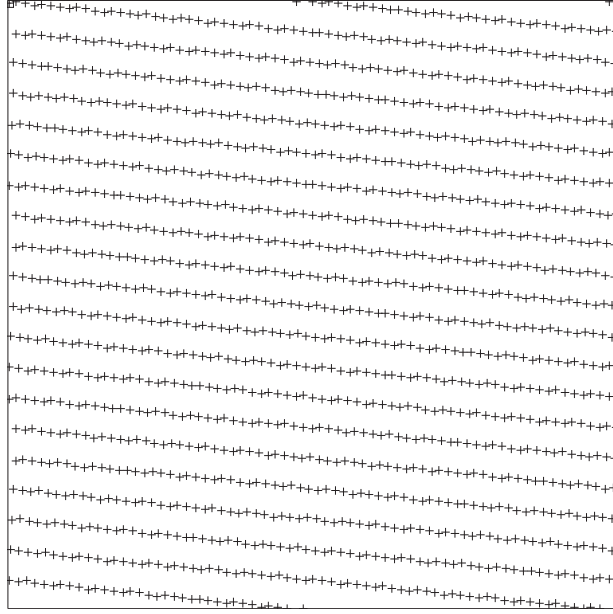


Figure 6

log près) de la répartition optimale et beaucoup mieux réparties que les suites aléatoires.
- Pour la discrédance isotrope les suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$ sont loin de la répartition optimale alors que les suites aléatoires ont une répartition presque optimale.

Définition 2 Soit X un sous-ensemble à N éléments de $[0, 1]^d$ ou de \mathbb{T}^d que nous identifions à $[0, 1]^d$.

1) La discrédance de X est le nombre $D_N(X)$ défini par

$$D_N(x) = \sup \{ |\text{card}(X \cap [0, x_1[\times \dots \times [0, x_n[) - Nx_1 \dots x_n| : (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^d \}.$$

2) La discrédance isotrope de X est le nombre $J_N(X)$ défini par

$$J_N(x) = \sup \{ |\text{card}(X \cap \mathcal{C}) - N\mu(\mathcal{C})| : \mathcal{C} \subset [0, 1]^d, \mathcal{C} \text{ convexe} \}$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue.

W. M. Schmidt a démontré que pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$

$$D_N(\{0, \Theta, \dots, (N-1)\Theta\}) \ll (\ln N)^{d+1+\varepsilon}$$

où $\varepsilon > 0$ (Cf. [Sch1]). Ce résultat a été amélioré par J. Beck qui a prouvé l'estimation suivante dont la démonstration est très difficile:

Soit ϕ une fonction croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Alors

$$D_N(\{0, \Theta, \dots, (N-1)\Theta\}) \ll (\ln N)^d \phi(\ln \ln N) \text{ pour presque tout } \Theta \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi(n)} < +\infty.$$

D'autre part J. F. Roth a donné la minoration :

Si X est un ensemble à N éléments de \mathbb{T}^d alors

$$D_N(X) \gg (\ln N)^{\frac{d-1}{2}}$$

(en dimension 2, on conjecture que pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^2$, $D_N(\{0, \Theta, \dots, (N-1)\Theta\}) \gg (\ln N)^2$). Pour les suites aléatoires les ordres de grandeur sont très différents. En effet, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans $[0, 1]^d$ alors presque-sûrement

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{D_N(\{X_0, \dots, X_{N-1}\})}{\sqrt{N \log \log N}} > 0$$

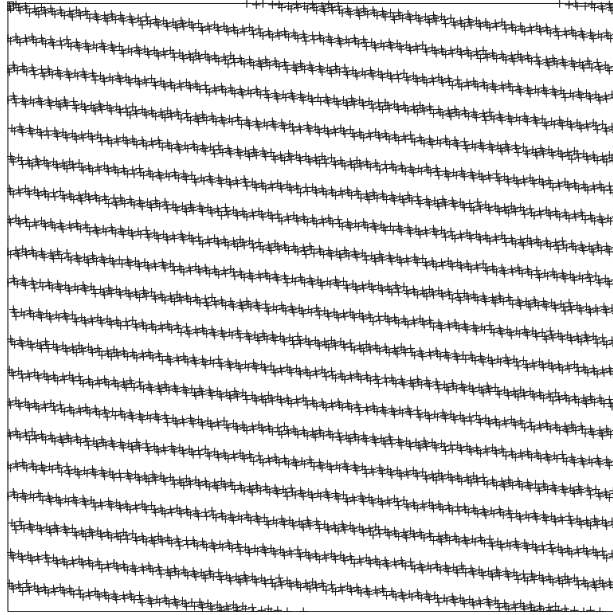


Figure 7

(il suffit de fixer un rectangle non dégénéré R de $[0, 1]^d$ et d'appliquer la loi du logarithme itéré à la suite $Y_n = 1_R(X_n)$). Ces résultats montrent que presque toutes les suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$, $\Theta \in \mathbb{T}^d$, sont beaucoup mieux réparties que les suites aléatoires. L'inverse se produit avec la discrédance isotrope. W.M. Schmidt a montré que pour tout ensemble fini X à N éléments de $I_d = [0, 1]^d$ on a $J_N(X) \geq cN^{1-\frac{2}{d+1}}$ ([Sch2]). W. Stute ([St]) a étudié la discrédance isotrope d'une suite aléatoire de N points de I_d . Pour $d = 3$ il a obtenu l'estimation

$$J_N(X) = O(N^{1/2}(\ln N)^{2/3}) \text{ presque sûrement.}$$

À des facteurs log près les suites aléatoires de I_3 ont donc une discrédance isotrope optimale. Pour les suites qui nous intéressent, $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$, G. Larcher a prouvé que

$$J(\{0, \Theta, \dots, (N-1)\Theta\}) \gg N^{1-\frac{1}{d}} \text{ pour tout } \Theta \text{ de } \mathbb{T}^d$$

(Cf. G. Larcher, On the distribution of the multiples of an s -tuple of reals numbers, Journal of Number Theory 31, 367-372 (1989), voir aussi [Ch3]). Une puissance strictement positive de N sépare donc la discrédance isotrope optimale de la discrédance des suites $(n\Theta)_{n \in \mathbb{N}}$. Rappelons enfin un résultat presque-sûr dû à Larcher ([Lar1]) :
pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$

$$J_N(\{0, \Theta, \dots, (N-1)\Theta\}) \ll N^{1-\frac{1}{d}}(\ln N)^{\frac{d-1}{d}+\varepsilon}.$$

3 Extensions du théorème des trois distances

Soit Θ un élément de \mathbb{T}^1 et n un entier. Le théorème des trois distances affirme que l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, (n-1)\Theta\}$ découpe le tore \mathbb{T}^1 en n intervalles ayant au plus trois longueurs distinctes. Il a été démontré pour la première fois en 1958 et 1959 par V.T. Sós et S. Świerczkowski (cf. [Só1,2,3] et [Św]) ; il admet de nombreuses démonstrations et peut être relié au développement en fraction continue de Θ . Nous allons présenter plusieurs extensions de ce théorème.

3.1 Dans le tore de dimension 1

En 1976, F. R. K. Chung et R. L. Graham ont étendu ce résultat au cas de la réunion de plusieurs suites arithmétiques :

Soit $\Theta, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ des éléments de \mathbb{T}^1 et n_1, \dots, n_d des entiers positifs. Alors les points $\alpha_i + k\Theta$, $i = 1, \dots, d$, $k = 0, \dots, n_i - 1$, divisent \mathbb{T}^1 en intervalles ayant au plus $3d$ longueurs distinctes.

Ce résultat est connu sous le nom de “théorème des trois d -distances” et en 1978, F. M. Liang en a donné une démonstration très simple ([Li]). En 1993, J. F. Geelen et R. J. Simpson ont prouvé une version 2-dimensionnelle du théorème des trois distances :

Soit Θ_1, Θ_2 deux éléments de \mathbb{T}^1 et n_1, n_2 deux entiers positifs. Alors les points $k_1\Theta_1 + k_2\Theta_2$, $k_1 = 0, \dots, n_1 - 1$, $k_2 = 0, \dots, n_2 - 1$, divisent \mathbb{T}^1 en intervalles ayant au plus $n_1 + 3$ longueurs distinctes .

Ils ont formulé la conjecture suivante :

Soit $\Theta_1, \dots, \Theta_d$ des éléments de \mathbb{T}^1 et n_1, \dots, n_d des entiers positifs. Alors les points $k_1\Theta_1 + \dots + k_d\Theta_d$, $k_1 = 0, \dots, n_1 - 1, \dots, k_d = 0, \dots, n_d - 1$, divisent \mathbb{T}^1 en intervalles ayant au plus $\prod_{i=1}^{d-1} n_i + C_d$ longueurs distinctes où C_d est une constante qui ne dépend que de d .

Nous avons prouvé dans [Ch4] un résultat qui n’est pas très éloigné de la conjecture de Geelen et Simpson.

Théorème 7 *Supposons $d \geq 2$. Soit $\Theta_1, \dots, \Theta_d$ des éléments de \mathbb{T}^1 et n_1, \dots, n_d des entiers positifs. Alors les points $k_1\Theta_1 + \dots + k_d\Theta_d$, $k_1 = 0, \dots, n_1 - 1, \dots, k_d = 0, \dots, n_d - 1$, divisent \mathbb{T}^1 en intervalles ayant au plus $\prod_{i=1}^{d-1} n_i + 3 \prod_{i=1}^{d-2} n_i + 1$ longueurs distinctes.*

3.2 Dans le tore de dimension d

Il est naturel de chercher une généralisation du théorème des trois distances valable dans le tore à d dimensions. Un énoncé pourrait être :

Soit $\Theta \in \mathbb{T}^2$ et n un entier ≥ 1 . Existe-t-il une triangulation du tore \mathbb{T}^2 dont les sommets sont les points $0, \Theta, \dots, (n-1)\Theta$ et telle que le nombre de triangles différents à isométrie près soit majoré par une constante qui ne dépende ni de n ni de Θ ?

Cette question ne semble pas apparaître dans la littérature et nous n’avons pu qu’y répondre partiellement. En dimension 1 le théorème des trois distances est relié à l’existence de certains tours de Rokhlin :

Soit Θ un élément de \mathbb{T}^1 et $(q_n)_{n \geq 0}$ la suite des dénominateurs des réduites de Θ . Appelons A et B les intervalles $[0, \|q_n\Theta\|$ [et $[-\|q_{n+1}\Theta\|, 0[$. Pour n pair, on a la partition

$$\mathbb{T}^1 = \{\cup_{0 \leq k < q_{n+1}} (A + k\Theta)\} \cup \{\cup_{0 \leq k < q_n} (B + k\Theta)\}.$$

(Une partition analogue est valable pour n impair.) En fait, plutôt que d’étudier directement l’énoncé sur les triangulations nous avons recherché de “bonnes” tours de Rokhlin. Dans ce but, nous avons utilisé un diagramme de Voronoï, cela permet d’utiliser le caractère isométrique des translations $x \in \mathbb{T}^d \rightarrow x + \Theta$. Rappelons la définition d’un diagramme de Voronoï.

Définition 3 *Soit (X, D) un espace métrique, E une partie de X et x un élément de E . La région de Voronoï associée à l’ensemble E et au site $x \in E$ est définie par $V_D(E, x) = \{y \in X : \forall x' \in E, D(x, y) \leq D(x', y)\}$.*

Soit N une norme sur \mathbb{R}^d . Pour $\Theta \in \mathbb{T}^d$, m et $n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, désignons la région de Voronoï associée à $E = \{0, \Theta, \dots, n\Theta\}$ et au site $m\Theta$ par $V_N(\Theta, n, m)$. Lorsque la norme N est euclidienne les régions de Voronoï sont des polyèdres convexes dont les intérieurs sont disjoints.

Théorème 8 *([Ch3]) 1) Il existe une constante C_d telle que pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et chaque meilleure approximation q_n de Θ associée à la norme euclidienne usuelle, la propriété suivante soit vraie : Il existe une norme euclidienne $N(\cdot) = N_n(\cdot)$ sur \mathbb{R}^d et une partition de l’intervalle $\{0, \dots, q_n - 2\}$ en au plus C_d sous-intervalles I_1, \dots, I_k telles que pour chaque intervalle I_j et tout entier m ,*

$$(m \text{ et } m + 1 \in I_j) \Rightarrow (V_N(\Theta, q_n - 2, m) + \Theta = V_N(\Theta, q_n - 2, m + 1)).$$

2) De plus, si $N\Theta$ est dense dans \mathbb{T}^d alors le diamètre pour la norme usuelle de ces régions de Voronoï tend vers 0 quand q_n tend vers l’infini.

La triangulation de Delaunay, duale du diagramme de Voronoï, fournit une réponse positive à la question sur les triangulations mais seulement pour certains entiers n . Le théorème précédent est démontré dans [Ch3] mais le principe de la démonstration se trouve dans [Ch2] qui contient aussi un résultat pour les nombres mal approximables :

Proposition 1 *On suppose que \mathbb{R}^d est muni de la norme euclidienne. Si $\Theta \in \mathbb{T}^2$ est mal approximable, c'est-à-dire si*

$$c = \inf\{n \|\mathbf{n}\Theta\|^d : n \in \mathbb{N}^*\} > 0$$

alors il existe une constante C ne dépendant que de c , telle que pour tout n il existe une partition de l'intervalle $\{0, \dots, n\}$ en au plus C sous-intervalles I_1, \dots, I_k telle que pour chaque intervalle I_j et tout entier m ,

$$(m \text{ et } m+1 \in I_j) \Rightarrow (V(\Theta, q_n - 2, m) + \Theta = V(\Theta, q_n - 2, m+1)).$$

3.3 Recouvrements

La recherche de bons recouvrements du tore \mathbb{T}^d par les translations successives d'une même partie est un problème voisin de celui des tours de Rokhlin. En dimension 1, il y a de bons recouvrements par des intervalles :

Soit Θ est un élément du tore \mathbb{T}^1 et (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de Θ alors

$$\bigcup_{k=0}^{q_n-1} [k\Theta - q_{n-1}\Theta, k\Theta + q_{n-1}\Theta] = \mathbb{T}^1$$

et tout point de \mathbb{T}^d appartient à au plus deux intervalles $[k\Theta - q_n\Theta, k\Theta + q_n\Theta]$, $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$.

Pour généraliser ce recouvrement au tore \mathbb{T}^d nous allons utiliser les réseaux Λ_n associés à un élément Θ du tore. Pour une base $e_{1,n}, \dots, e_{d,n}$ de Λ_n posons

$$D_n = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_{i,n} : \forall i, x_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\};$$

D_n est un domaine fondamental du réseau Λ_n (à la frontière près).

Proposition 2 *Soit Θ un élément du tore \mathbb{T}^d tel que $\mathbb{N}\Theta$ soit dense dans \mathbb{T}^d . Alors pour chaque n on peut choisir la base $e_{1,n}, \dots, e_{d,n}$ de telle sorte que*

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } D_n = 0$,

2) *il existe un entier a qui ne dépend que de la dimension tel que*

$$\bigcup_{k=0}^{q_n-1} (\mathbf{p}(aD_n) + k\Theta) = \mathbb{T}^d,$$

3) *il existe un entier b qui ne dépend que de la dimension tel que tout élément de \mathbb{T}^d appartienne à au plus b parties de la forme $\mathbf{p}(aD_n) + k\Theta$ avec $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$.*

4 Inégalités complémentaires

Désignons par $x = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ un réel dont (a_n) est la suite des quotients partiels. Nous allons voir que le principe des tiroirs permet d'étendre très simplement un certain nombre d'inégalités valables pour le développement en fraction continue unidimensionnelle..

4.1 Extension de l'inégalité $q_{n+2}(x) \geq 2q_n(x)$

La relation de récurrence $q_{n+1}(x) = a_{n+1}q_n(x) + q_{n-1}(x)$ montre que $q_{n+1}(x) \geq q_n(x) + q_{n-1}(x)$ et $q_n(x) \geq \omega^{n-1}$ pour $n \geq 2$, ω désignant le nombre d'or. Les résultats suivants sont dus à J. C.

Lagarias [Lag1].

1) Si \mathbb{R}^d est muni de la norme sup alors

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+2^d}(\theta) \geq q_{n+1}(\theta) + q_n(\theta).$$

2) Si \mathbb{R}^d est muni d'une norme quelconque alors

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+2^{d+1}}(\theta) \geq 2q_{n+1}(\theta) + q_n(\theta).$$

3) Il existe une constante $\lambda > 1$ telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, q_n \geq \lambda^n.$$

Les affirmations 1) et 2) reposent sur une utilisation astucieuse du principe des tiroirs. Quand \mathbb{R}^d est muni de la norme sup, l'inégalité plus faible $q_{n+2^d}(\theta) \geq 2q_n(\theta)$ est facile à prouver. En effet, si $q_{n+2^d}(\theta) < 2q_n(\theta)$ alors pour $i, j = 0, 1, \dots, 2^d$ on a $q_{n+i}(\theta) - q_{n+j}(\theta) < q_n(\theta)$. Donc $\|q_{n+i}(\theta) - q_{n+j}(\theta)\theta\| > r_n$, ce qui est impossible car la boule $B(0, r_n)$ ne peut pas contenir $2^d + 1$ points dont les distances mutuelles sont strictement supérieures à r_n . Dans le cas de \mathbb{R}^2 muni de la norme sup, J. C. Lagarias a démontré des inégalités plus précises par un emploi ingénieux du principe des tiroirs ([Lag2], théorème 3.1.).

4.2 Extension de l'inégalité $r_n(x) \geq 2r_{n+2}(x)$

Proposition 3 1) Si \mathbb{R}^d est muni de la norme sup alors

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+3^d}(\theta) \leq \frac{1}{3}r_n(\theta).$$

2) Si \mathbb{R}^d est muni d'une norme quelconque alors

$$\forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+3^d}(\theta) \leq \frac{1}{2}r_n(\theta).$$

J. C. Lagarias a démontré une inégalité du même type pour la norme euclidienne dans [Lag6]. Le cas de \mathbb{R}^2 muni de la norme sup se trouve dans [Ch3]. La deuxième inégalité est facile. En effet, une boule de \mathbb{R}^d de rayon r contient au plus 3^d points dont les distances mutuelles sont supérieures à $r/2$ car une boule de rayon $3r/2$ contient au plus 3^d boules disjointes de rayon $r/2$. Si $r_{n+3^d} \geq \frac{1}{2}r_n$ alors les points $q_i\Theta$, $i = n, \dots, n+3^d$, sont $3^d + 1$ points de la boule $B(0, r_n)$ dont les distances sont supérieures à $\frac{1}{2}r_n$. On conclut en choisissant des représentants de ces points dans la boule de \mathbb{R}^d de centre 0 et de rayon $r_n(\theta)$.

4.3 Changement de norme

Supposons que \mathbb{R}^d soit muni des deux normes $N(\cdot)$ et $N'(\cdot)$, et appelons d et d' les distances induites dans le tore \mathbb{T}^d .

Notations. Pour un élément θ de \mathbb{T}^d , on note

(q_n) la suite des meilleures approximations associées à la première norme,

(q'_n) la suite des meilleures approximations associées à la deuxième norme,

$r_n = d(0, q_n\Theta)$ et $r'_n = d'(0, q'_n\Theta)$ les restes.

Des exemples simples montrent que les suites (q_n) et (q'_n) sont en général différentes, cependant leurs croissances sont liées (cf exemple paragraphe 2.8).

Proposition 4 Il existe un entier k ne dépendant que des normes tel que

$$i) \forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, q'_m \in]q_n, q_{n+k}],$$

$$ii) \forall \theta \in \mathbb{T}^d, \forall n \in \mathbb{N}, q'_n \leq q_{kn}.$$

4.4 Liaison entre les coordonnées de θ

En dimension 1, lorsque θ et 1 sont rationnellement liés, c'est-à-dire lorsque θ est rationnel, le développement en fraction continue s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations et le nombre de meilleures approximations est fini. En dimension ≥ 2 , les coordonnées de θ et 1 peuvent être rationnellement liées sans que le nombre de meilleures approximations soit fini, il suffit que θ n'appartienne pas à \mathbb{Q}^d . Par contre des liaisons entre les coordonnées de θ et 1 permettent d'améliorer l'inégalité fondamentale :

Proposition 5 *Supposons \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne usuelle. Soit θ appartenant à \mathbb{R}^d et x_1, \dots, x_p des éléments linéairement indépendants de \mathbb{Z}^d . Si θ vérifie les relations*

$$x_i \cdot \theta \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, p$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_{n-1}(\theta) \leq 1$, on a

$$q_n(\theta) r_{n-1}^{d-p}(\theta) \leq \frac{2^{d-p}}{\sigma_{d-p}} \sqrt{\det(x_i \cdot x_j)_{1 \leq i, j \leq p}}$$

où σ_m désigne le volume de la boule unité de \mathbb{R}^m .

5 Démonstrations

5.1 Preuve des propriétés P1, P2, P3 et P4

Voir [Lar1], [Ch1] et [Ch2].

1) Pour $k \leq q_n$, $d(k\Theta, k\Theta_n) = \left\| \mathbf{p}\left(k \frac{\varepsilon_n}{q_n}\right) \right\| \leq \frac{k}{q_n} N(\varepsilon_n) \leq r_n$.

2) Soit $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ tel que $\|k\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle)$. On a $\|(q_n - k)\Theta_n\| = \|k\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle)$ on peut donc supposer que $k \leq \frac{q_n}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} \|k\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle) &= \left\| k\left(\theta - \frac{\varepsilon_n}{q_n}\right) \right\| \geq \|k\theta\| - k \left\| \frac{\varepsilon_n}{q_n} \right\| \\ &\geq r_{n-1} - \frac{k}{q_n} N(\varepsilon_n) \geq r_{n-1} - \frac{r_n}{2} \geq \frac{r_{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

On a aussi $r(\langle \Theta_n \rangle) \leq \|q_{n-1}\Theta_n\| \leq \|q_{n-1}\Theta\| + \|q_{n-1}(\Theta_n - \Theta)\| \leq r_{n-1} + r_n \leq 2r_{n-1}$.

3) Si $k \neq k' \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ alors le calcul de 2) montre que $\|(k - k')\Theta_n\| \geq \frac{r_{n-1}}{2} > 0$.

4) $\det \Lambda_n = \frac{1}{q_n}$ car $\text{card}\langle \Theta_n \rangle = q_n$.

5.2 Démonstration de l'inégalité (2)

Soit q_n une meilleure approximation de $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$ les minima du réseau Λ_n associé à Θ et à la meilleure approximation q_n . D'après le théorème de Minkowski (cf. appendice, à la fin de la section 5) nous avons $\lambda_1 \lambda_d^{d-1} \gg \det \Lambda_n = \frac{1}{q_n}$, or d'après (P2) $r_{n-1} \asymp \lambda_1$ donc $\left(\frac{\lambda_d}{\lambda_1}\right)^{d-1} \gg \frac{1}{q_n \lambda_1^d} \asymp s_n$. De plus, d'après le corollaire 1 de l'appendice $e(\Lambda_n) \asymp \lambda_d$ donc $\frac{e(\Lambda_n)}{r(\Lambda_n)} \asymp s_n^{\frac{1}{d-1}}$. Comme tout point de $\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}$ est à une distance inférieure de $\langle \Theta_n \rangle$ à r_n nous en déduisons

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \geq \frac{e(\Lambda_n) - r_n}{r_{n-1}} \geq \frac{e(\Lambda_n)}{2r(\Lambda_n)} - 1 \geq c s_n^{\frac{1}{d-1}} - 1$$

où c est une constante qui ne dépend que de la norme. Comme on a évidemment $\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \geq \frac{1}{2}$, on obtient l'inégalité

$$(2) \quad \frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \gg s_n^{\frac{1}{d-1}}.$$

5.3 Démonstration de l'inégalité (3)

D'après (P2) et l'inégalité (1) (cf. 2.4)

$$e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) \ll s_n r_{n-1}$$

donc pour $q \geq q_n$,

$$e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}) \leq e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) \ll s_n r_{n-1}.$$

Par définition des meilleures approximations $r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}) = r_n$ pour $q_n \leq q < q_{n+1}$, d'où

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} \ll \frac{s_n r_{n-1}}{r_n} = t_n \frac{s_n r_{n-1}}{t_n r_n} = t_n \left(\frac{r_n}{r_{n-1}} \right)^{d-1} \leq t_n.$$

5.4 Démonstration de l'inégalité (4)

Soit q un entier appartenant à $\{q_n, \dots, q_{n+1} - 1\}$. Tout point $A_k = (kq_n + a)\Theta$ de $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$ est à une distance de $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$ inférieure à kr_n car $(kq_n + a)\theta = a\theta + k(P_n + \varepsilon_n) \equiv a\theta + k\varepsilon_n$ et $a\theta \in \{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$. Il en résulte que

$$e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}) \geq e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) - \left[\frac{q}{q_n} \right] r_n.$$

Pour tout $q \geq q_n$ on a donc

$$\begin{aligned} \frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} &\geq \frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) - \left[\frac{q}{q_n} \right] r_n}{r_n} \\ &\geq \frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \frac{r_{n-1}}{r_n} - \left[\frac{q}{q_n} \right]. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (2) : $\frac{e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\})} \gg s_n^{\frac{1}{d-1}}$, on obtient

$$\frac{e(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})}{r(\{0, \Theta, \dots, q\Theta\})} \geq c s_n^{\frac{1}{d-1}} \frac{r_{n-1}}{r_n} - \left[\frac{q}{q_n} \right] = c \left(\frac{1}{q_n r_{n-1} r_n} \right)^{\frac{1}{d-1}} - \left[\frac{q}{q_n} \right] \geq c t_n^{\frac{1}{d-1}} - \left[\frac{q}{q_n} \right].$$

5.5 Preuve du lemme 1 (paragraphe 2.6)

1) Comme $k \leq q_n$ on a $\|k\theta \cdot X_n\| \leq q_n \|\theta \cdot X_n\|$. Par définition de θ_{n+p} , ε_{n+p} et de X_n on a

$$\|\theta \cdot X_n\| = \left\| \left(\theta_{n+p} + \frac{\varepsilon_{n+p}}{q_{n+p}} \right) \cdot X_n \right\| = \left\| \frac{\varepsilon_{n+p}}{q_{n+p}} \cdot X_n \right\| \leq \frac{1}{q_{n+p}} N(\varepsilon_{n+p}) N(X_n),$$

d'où

$$\|k\theta \cdot X_n\| \leq N(\varepsilon_{n+p}) N(X_{n+p}) \ll r_{n+p} q_n^{\frac{1}{d}}.$$

2) Comme X_{n+1} appartient à \mathbb{Z}^d et θ_n appartient à $\frac{1}{q_n} \mathbb{Z}^d$, le produit scalaire $X_{n+1} \cdot \theta_n$ appartient à $\frac{1}{q_n} \mathbb{Z}$. D'autre part,

$$X_{n+1} \cdot \theta_n = X_{n+1} \cdot \theta_{n+1} + X_{n+1} \cdot (\theta_n - \theta_{n+1}) \equiv X_{n+1} \cdot (\theta_n - \theta_{n+1}).$$

De plus, $X_n \in \Lambda_{n+1}$ donc $N(X_n) \geq N(X_{n+1})$ et

$$|X_{n+1} \cdot (\theta_n - \theta_{n+1})| \leq N(X_{n+1}) N(\theta_n - \theta_{n+1}) \leq N(X_n) \left(N\left(\frac{\varepsilon_n}{q_n}\right) + N\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \right) \leq \frac{2r_n N(X_n)}{q_n} < \frac{1}{q_n},$$

par conséquent $X_{n+1} \cdot (\theta_n - \theta_{n+1}) = 0$, $X_{n+1} \in \Lambda_n$ et $N(X_{n+1}) \geq N(X_n)$. \square

5.6 Preuve du théorème 6

Lorsque $X_n \cdot \theta_{n+1} \notin \mathbb{Z}$ nous avons affirmé que la trajectoire entre les instants q_n et $q_{n+1} - 1$, traverse l'espace intermédiaire entre les hyperplans du réseau \mathcal{H}_n . Pour le prouver, il faut d'abord traduire en termes d'inégalité cette affirmation. Soit $a \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ et $A_k = a\theta + k\varepsilon_n \equiv (a + kq_n)\theta$, $k = 0, \dots, \lfloor \frac{q_{n+1}-1-a}{q_n} \rfloor$. Pour $k = 0$ le point A_0 se trouve dans la bande

$$\mathcal{B}_0 = \{X \in \mathbb{R}^d : X_n \cdot X \in [a_0 - \frac{1}{2}, a_0 + \frac{1}{2}]\}$$

où a_0 est l'entier le plus proche du produit scalaire $a\theta \cdot X_n$. Il nous faut vérifier que A_k pour $k = \lfloor \frac{q_{n+1}-1-a}{q_n} \rfloor$, se trouve en dehors ou presque en dehors de la bande

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathbb{R}^d : X \cdot X_n \in [a_0 - 1, a_0 + 1]\}.$$

C'est l'objet du lemme.

Lemme 2 *Supposons que $X_n \cdot \theta_{n+1} \notin \mathbb{Z}$, alors*

- 1) $a_{n+1} |\varepsilon_n \cdot X_n| \geq 1 - 13r_n N(X_n)$ ($a_{n+1} := \lfloor \frac{q_{n+1}}{q_n} \rfloor$),
- 2) $n \geq n(d) \Rightarrow q_{n+1} \|X_n \cdot \theta\| \geq 1 - 13r_n N(X_n)$.

Démonstration. Notons L_{X_n} la forme linéaire $X \in \mathbb{R}^d \rightarrow L_{X_n}(X) = X_n \cdot X$ et $\varepsilon = q_n(\theta_{n+1} - \theta_n)$. Pour $a \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ posons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_a &= \{a\theta + k\varepsilon_n : k \geq 0 \text{ et } a + kq_n < q_{n+1}\} + \mathbb{Z}^d, \\ \mathbb{F}_a &= \{a\theta_{n+1} + k\varepsilon : k \geq 0 \text{ et } a + kq_n < q_{n+1}\} + \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

1. Par définition de θ_n , $q_n\theta_n \in \mathbb{Z}^d$ donc

$$(a + kq_n)\theta = a\theta + kq_n(\theta - \theta_n) + kq_n\theta_n \equiv a\theta + k\varepsilon_n$$

et

$$\mathbb{E}_a = E_a + \mathbb{Z}^d \text{ où } E_a = \{(a + kq_n)\theta : k \geq 0 \text{ et } a + kq_n < q_{n+1}\}.$$

De même

$$(a + kq_n)\theta_{n+1} = a\theta_{n+1} + kq_n(\theta_{n+1} - \theta_n) + kq_n\theta_n \equiv a\theta_{n+1} + k\varepsilon$$

et

$$\mathbb{F}_a = F_a + \mathbb{Z}^d \text{ où } F_a = \{(a + kq_n)\theta_{n+1} : k \geq 0 \text{ et } a + kq_n < q_{n+1}\}.$$

2. Tout $p \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$ est de la forme $p = a + kq_n$ où $k \geq 0$ et $a + kq_n < q_{n+1}$ donc

$$\Lambda_{n+1} = \bigcup_{a=0}^{q_n-1} \mathbb{F}_a.$$

On en déduit que

$$L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z} = \bigcup_{a=0}^{q_n-1} (L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}).$$

3. Notons δ_H la distance de Hausdorff sur les parties de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d . D'après **1**, pour $a \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ on a

$$\begin{aligned} \delta_H(\mathbb{E}_a, \mathbb{F}_a) &\leq \delta_H(E_a, F_a) \\ &\leq q_{n+1}N(\theta - \theta_{n+1}) = N(\varepsilon_{n+1}) = r_{n+1}. \end{aligned}$$

4. Soit $a, b \in \{0, \dots, q_n - 1\}$. Appelons k_a (resp. k_b) le plus grand k tel que $a + kq_n < q_{n+1}$. On vérifie que $|k_a - k_b| \leq k_0 - k_{q_n-1} \leq 1$ donc

$$\begin{aligned} \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\mathbb{F}_b) + \mathbb{Z}) &\leq \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}\{b\theta_{n+1} + k\varepsilon : 0 \leq k \leq k_a\} + \mathbb{Z}) \\ &\quad + \delta_H(L_{X_n}\{b\theta_{n+1} + k\varepsilon : 0 \leq k \leq k_a\} + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\mathbb{F}_b) + \mathbb{Z}) \\ &\leq \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}\{b\theta_{n+1} + k\varepsilon : 0 \leq k \leq k_a\} + \mathbb{Z}) + N(X_n)N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Or $N(\varepsilon) \leq q_n N(\theta_{n+1} - \theta + \theta - \theta_n) \leq \frac{q_n}{q_{n+1}} N(\varepsilon_{n+1}) + N(\varepsilon_n) \leq 2r_n$ et pour $k \leq k_a$ on a

$$\begin{aligned} \|L_{X_n}(a\theta_{n+1} + k\varepsilon - (b\theta_{n+1} + k\varepsilon))\| &= \|L_{X_n}((a-b)\theta_{n+1})\| \\ &\leq q_n \|X_n \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n + \theta_n)\| = q_n \|X_n \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n)\| \\ &\leq N(X_n) q_n N(\theta_{n+1} - \theta_n) \leq 2r_n N(X_n), \end{aligned}$$

donc

$$\delta_H(L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z}) \leq 4r_n N(X_n).$$

En combinant cette inégalité avec **2** et **3** on trouve pour tout $a \in \{0, \dots, q_n - 1\}$

$$\begin{aligned} \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{E}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z}) &\leq \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{E}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}) \\ &\quad + \delta_H(L_{X_n}(\mathbb{F}_a) + \mathbb{Z}, L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z}) \\ &\leq N(X_n) \delta_H(\mathbb{E}_a, \mathbb{F}_a) + 4r_n N(X_n) \\ &\leq N(X_n)(r_{n+1} + 4r_n) \leq 5r_n N(X_n). \end{aligned}$$

5. $L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z}$ est un sous groupe discret de \mathbb{R} car il est inclus dans $\frac{1}{q_{n+1}}\mathbb{Z}$. Donc il existe $\tau > 0$ tel que

$$L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z} = \tau\mathbb{Z}.$$

On a $\tau \leq 2\frac{r_n}{q_n}N(X_n)$. En effet, $X_n \cdot \theta_{n+1} \notin \mathbb{Z}$, $X_n \cdot \theta_{n+1} = X_n \cdot \theta_n + X_n \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n) \equiv X_n \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n)$ et $|X_n \cdot (\theta_{n+1} - \theta_n)| \leq N(X_n)N(\theta_{n+1} - \theta_n) \leq 2\frac{r_n}{q_n}N(X_n)$.

6. D'après **5**, l'un des points de $L_{X_n}(\Lambda_{n+1}) + \mathbb{Z}$ appartient à l'intervalle $[1 - 8r_n N(X_n), 1 - 6r_n N(X_n)]$, donc d'après **4** l'un des points de $L_{X_n}(\mathbb{E}_0) + \mathbb{Z}$ appartient à l'intervalle $[1 - 13r_n N(X_n), 1 - r_n N(X_n)]$. Par suite il existe $k \in \{0, \dots, [\frac{q_{n+1}}{q_n}]\}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $k\varepsilon_n \cdot X_n - m \in [1 - 13r_n N(X_n), 1 - r_n N(X_n)]$. En changeant éventuellement X_n en $-X_n$ on peut supposer que $\varepsilon_n \cdot X_n \geq 0$. Dans ce cas $m \geq 0$ et $[\frac{q_{n+1}}{q_n}]\varepsilon_n \cdot X_n \geq 1 - 13r_n N(X_n)$ ce qui achève la démonstration du premièrement. Le deuxièmement découle simplement du fait que si $\frac{r_n}{q_n}N(X_n) < \frac{1}{2}$ alors

$$\|X_n \cdot \theta\| = \left\| X_n \cdot \frac{\varepsilon_n}{q_n} \right\| = \left| X_n \cdot \frac{\varepsilon_n}{q_n} \right|. \square$$

Fin de la preuve du théorème 6. Supposons qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $q_n r_n^d \leq c(d)$. En choisissant convenablement $c(d)$ on peut supposer que pour tous les $n \geq n_0$ on a

$$N(X_n)r_n \ll r_n q_n^{\frac{1}{d}} < \frac{1}{26}.$$

Si il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $\theta_{n+1} \cdot X_n \notin \mathbb{Z}$ alors, d'après le lemme 1. 2), $\sup_{n \in \mathbb{N}} N(X_n) < +\infty$. On en déduit qu'il existe un vecteur $Y_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $Y_0 = X_n$ pour tous les $n \in I$, I infini. Dans ce cas $Y_0 \cdot \theta = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} Y_0 \cdot \theta_n \in \mathbb{Z}$ ce qui contredit l'hypothèse $\mathbb{N}\Theta$ dense. On conclut grâce au lemme 2. \square

5.7 Recouvrements, preuve de la proposition 2

Utilisons le résultat de Babai sur les bases réduites d'un réseau :

Lemme 3 ([Ba]) *Supposons \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne. Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d , alors il existe une base e_1, e_2, \dots, e_d du réseau Λ telle que*

- 1) $\|e_1\| \leq \|e_2\| \leq \dots \leq \|e_d\|$,
- 2) *pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ le sinus de l'angle entre e_k et le sous-espace engendré par les autres vecteurs de la base, est supérieur à $(\sqrt{3}/2)^d$.*

Pour chaque n soit $e_{1,n}, \dots, e_{d,n}$ une base de Λ_n vérifiant les conditions du lemme.

1) Comme $\text{diam } D_n \leq N(e_{1,n}) + \dots + N(e_{d,n}) \leq dN(e_{d,n})$. Il suffit de prouver que $N(e_{d,n})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit $H_n = \{\sum_{i=1}^d t_i e_{i,n} \in \mathbb{R}^d : t_d \in \mathbb{Z}\}$. Le choix de la base $e_{1,n}, \dots, e_{d,n}$ montre que

$$e(H_n) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^d N(e_{n,d}).$$

Or

$$\begin{aligned} e(\{0, \theta, \dots, (q_n - 1)\theta\} + \mathbb{Z}^d) &\geq e(\{0, \theta_n, \dots, (q_n - 1)\theta_n\} + \mathbb{Z}^d) - r_n \\ &= e(\Lambda_n) - r_n \geq e(H_n) - r_n, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(\{0, \theta, \dots, (q_n - 1)\theta\} + \mathbb{Z}^d) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(\{0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta\}) = 0$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ donc $N(e_{n,d})$ tend vers 0.

2) Soit a le plus petit entier supérieur à $2(\frac{2}{\sqrt{3}})^d$. Le choix de la base $e_{1,n}, \dots, e_{d,n}$ montre que la boule

$$B(0, 2\lambda_1) \subset aD_n$$

où λ_1 est le premier minimum du réseau Λ_n . Or d'après **(P2)** $2\lambda_1 \geq r_{n-1} \geq r_n$ donc pour chaque $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ nous avons

$$k\theta_n \in B(k\theta, r_n) \subset k\theta + aD_n,$$

et

$$k\theta_n + D_n \subset k\theta + aD_n + D_n.$$

De plus D_n est convexe donc $aD_n + D_n = (a+1)D_n$ et $k\theta_n + D_n \subset k\theta + (a+1)D_n$. Comme $q_n\theta_n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\Lambda_n = \{0, \theta_n, \dots, (q_n - 1)\theta_n\} + \mathbb{Z}^d,$$

donc par définition d'un domaine fondamental

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{Z}^d + \bigcup_{k=0}^{q_n-1} (k\theta_n + D_n)$$

et

$$\mathbf{p}\left(\bigcup_{k=0}^{q_n-1} ((a+1)D_n + k\theta)\right) = \mathbb{T}^d$$

3) Remplaçons a par $a+1$. Soit $x \in \mathbb{T}^d$ et $0 \leq k_1 < k_2 \dots < k_b < q_n$ tels que $x \in \mathbf{p}(k_i\theta + aD_n)$, $i = 1, \dots, b$. Par construction de a pour chaque i , le point $k_i\theta_n$ appartient à $k_i\theta + aD_n$ et comme D_n est symétrique nous obtenons

$$k_i\theta \in k_i\theta_n + aD_n \text{ et } k_i\theta + aD_n \subset k_i\theta_n + 2aD_n.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathbf{p}(u) = x$. Pour chaque $i = 1, \dots, b$ il existe $Q_i \in \mathbb{Z}^d$ tel que

$$u \in Q_i + k_i\theta + aD_n$$

et par conséquent

$$k_i\theta_n + P_i \in u + 2aD_n.$$

D'autre part, d'après **(P3)**, les points $\mathbf{p}(k\theta_n)$, $k = 0, \dots, q_n - 1$, sont deux à deux distincts donc $u + 2aD_n$ contient au moins b points distincts du réseau Λ_n . Or un translaté de $2aD_n$ peut contenir au plus $(2a+1)^d$ points de Λ_n , d'où $b \leq (2a+1)^d$. \square

5.8 Changement de norme, preuve de la proposition 4

Supposons que \mathbb{R}^d soit muni des deux normes $N(\cdot)$ et $N'(\cdot)$, et appelons d et d' les distances induites dans le tore \mathbb{T}^d .

Soit C une constante telle que

$$\frac{1}{C}N(\cdot) \leq N'(\cdot) \leq CN(\cdot),$$

la même inégalité est valable pour les distances induites dans le tore \mathbb{T}^d . D'après la proposition 3 (paragraphe 4.2), il existe un entier k tel que pour tout entier n on ait

$$r_{n+k} \leq \frac{1}{C^2 + 1} r_n.$$

Soit p le plus grand entier tel que $q'_p \leq q_n$. On a

$$d'(0, q_{n+k}\Theta) \leq Cr_{n+k} < \frac{1}{C}r_n \leq \frac{1}{C}d(0, q'_p\Theta) \leq r'_p,$$

il existe donc une meilleure approximation de θ associée à N et appartenant à $]q_n(\theta), q_{n+k}(\theta)[$. Une récurrence prouve que $q'_n(\theta) \leq q_{kn}(\theta)$. \square

5.9 Liaison entre les coordonnées de θ , preuve de la proposition 5

Le principe de la démonstration est le même que celui de l'inégalité fondamentale, on exhibe une suite de q_n boules disjointes de rayon $r_n/2$ mais dans une sous-variété du tore.

Munissons \mathbb{R}^d du produit scalaire euclidien usuel. Notons $V_k(A)$ le volume k -dimensionnel d'une partie A de \mathbb{R}^d incluse dans une réunion finie de sous-espaces affines de dimension k . Soit x_1, \dots, x_p , p éléments linéairement indépendants de \mathbb{Z}^d et $\theta \in \mathbb{R}^d$ tels que $x_i \cdot \theta \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, p$. Posons

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \cdot x \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, p\}$$

$$H = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{R}x_i, \quad D = H^\perp, \quad \Lambda = S \cap H.$$

L'ensemble Λ est un réseau du sous-espace vectoriel H et le réseau $\Lambda^* = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{Z}x_i$ est le réseau dual de Λ . Appelons Δ un domaine fondamental mesurable borné du réseau Λ de H . Munissons H de la norme euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^d , nous avons

$$V_p(\Delta) = \frac{1}{|\det_H(x_i)_{1 \leq i \leq p}|} = \frac{1}{\sqrt{\det(x_i \cdot x_j)_{1 \leq i, j \leq p}}}.$$

La définition d'un domaine fondamental et l'orthogonalité de D et H montrent que tout élément x de \mathbb{R}^d s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_D + x_\Lambda + x_\Delta$$

où $x_D \in D$, $x_\Lambda \in \Lambda$ et $x_\Delta \in \Delta$. Soit r un réel tel que Δ soit inclus dans $B(0, r)$. Pour tout entier k nous avons

$$S \cap B(0, k) + \Delta \subset B(0, k) + \Delta \subset B(0, k+r).$$

Montrons l'inclusion

$$S \cap B(0, k) + \Delta \supset B(0, k-r).$$

En effet, soit $x = x_D + x_\Lambda + x_\Delta$ un élément de $B(0, k-r)$. Nous avons $x_S = x_D + x_\Lambda \in S$ et

$$|x_S|^2 = |x_D|^2 + |x_\Lambda|^2$$

$$|x|^2 = |x_D|^2 + |x_\Lambda + x_\Delta|^2$$

donc

$$|x_D| \leq |x| \leq k-r, \quad |x_\Lambda + x_\Delta| \leq k-r$$

et

$$|x_S|^2 \leq |x_D|^2 + (|x_\Lambda + x_\Delta| + |x_\Delta|)^2 \leq |x|^2 + 2|x_\Lambda + x_\Delta|r + r^2$$

$$\leq (k-r)^2 + 2(k-r)r + r^2 = k^2.$$

Calculons le volume d -dimensionnel de $S \cap B(0, k) + \Delta$. La partition

$$S \cap B(0, k) + \Delta = \bigcup_{x \in \Lambda} ((x + D) \cap B(0, k) + \Delta)$$

et le théorème de Fubini montrent que

$$V_d(S \cap B(0, k) + \Delta) = V_p(\Delta) \sum_{x \in \Lambda} V_{d-p}((x + D) \cap B(0, k))$$

$$= V_p(\Delta) V_{d-p}(S \cap B(0, k)).$$

Désignons par σ_d le volume d -dimensionnel de la boule unité de \mathbb{R}^d . Les inclusions $B(0, k-r) \subset S \cap B(0, k) + \Delta \subset B(0, k+r)$ et la relation précédente montrent que

$$V_{d-p}(S \cap B(0, k)) \sim \frac{\sigma_d k^d}{V_p(\Delta)}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Posons

$$E(k) = \{x \in B(0, k-1) : \exists l \in \{0, \dots, q_n - 1\}, x - l\theta \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Si x et y sont deux éléments distincts de $E(k)$ alors

- soit x et y se projettent sur le même élément de \mathbb{T}^d et $d(x, y) \geq 1 \geq r_{n-1}(\theta)$,

- soit x et y se projettent sur des éléments distincts et par définition de r_{n-1} nous avons $d(x, y) \geq r_{n-1}(\theta)$,

donc les boules $B(x, r_{n-1}(\theta)/2)$ et $B(y, r_{n-1}(\theta)/2)$ ne se rencontrent pas.

Chaque cube de côté 1 inclus dans $B(0, k)$ contient exactement $q_n(\theta)$ éléments de $E(k)$ donc

$$\text{card}(E(k)) \sim q_n(\theta) \sigma_d k^d$$

lorsque k tend vers l'infini. Par hypothèse $r_{n-1} \leq 1$, donc

$$S \cap \left\{ \bigcup_{x \in E(k)} B(x, r_{n-1}(\theta)/2) \right\} \subset S \cap B(0, k).$$

Par conséquent,

$$V_{d-p} \left(\bigcup_{x \in E(k)} B(x, r_n(\theta)/2) \right) \leq V_{d-p}(S \cap B(0, k))$$

or d'après l'hypothèse de dépendance linéaire $E(k)$ est inclus dans S , donc

$$\text{card}(E(k)) \sigma_{d-p} 2^{p-d} r_{n-1}^{d-p}(\theta) \leq V_{d-p}(S \cap B(0, k)).$$

Finalement, en faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons

$$q_n(\theta) \sigma_{d-p} 2^{p-d} r_{n-1}^{d-p}(\theta) \leq \frac{1}{V_p(\Delta)} = \sqrt{\det(x_i \cdot x_j)_{1 \leq i, j \leq p}}. \square$$

5.10 Appendice : Minima d'un réseau

Les réseaux de \mathbb{R}^d sont les parties de \mathbb{R}^d de la forme

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_d$$

où e_1, \dots, e_d forment une base de \mathbb{R}^d .

Définition 4 Supposons que \mathbb{R}^d soit muni d'une norme N et soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d . Pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$ on appelle $\lambda_i = \lambda_i(\Lambda)$ la borne inférieure des $\lambda \geq 0$ tels que la boule $B(0, \lambda)$ contienne i vecteurs linéairements indépendants de Λ . La suite croissante $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ s'appelle l'ensemble des minima du réseau Λ .

La norme du plus court vecteur non nul de Λ est λ_1 . Minkowski a démontré (cf. [Sch] par exemple) :

Théorème 9 Munissons \mathbb{R}^d d'une norme N et appelons V_N le volume de la boule unité. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_d$ un réseau de \mathbb{R}^d alors

$$\frac{2^d}{d!} \leq \lambda_1(\Lambda) \dots \lambda_d(\Lambda) \frac{V_N}{|\det(e_1, \dots, e_d)|} \leq 2^d$$

où le déterminant $\det(e_1, \dots, e_d)$ est calculé dans la base canonique.

Définition 5 Supposons \mathbb{R}^d muni du produit scalaire usuel. Le dual Λ^* d'un réseau Λ de \mathbb{R}^d est l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^d$ tels que $X \cdot Y \in \mathbb{Z}$ pour tout Y de Λ .

On vérifie facilement que Λ^* est le réseau de \mathbb{R}^d engendré par la base duale d'une base qui engendre le réseau Λ . Malher a démontré (cf. [Sch] par exemple) :

Théorème 10 Supposons que \mathbb{R}^d soit muni du produit scalaire usuel et soit Λ un réseau de \mathbb{R}^d . Alors pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\lambda_i(\Lambda) \asymp \frac{1}{\lambda_{d-i}(\Lambda^*)}.$$

On en déduit :

Corollaire 1 $e(\Lambda) \asymp \lambda_d(\Lambda)$.

6 Exemple de $\theta \in \mathbb{R}^2$ dont la trajectoire est mal répartie

6.1 Construction

Nous supposons \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne que l'on note $|\cdot|$.

Principe de la construction : Soit $\theta \in \mathbb{R}^2$. Considérons les entiers n tels que $X_n \notin \Lambda_{n+1}$ et appelons $\phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, une sous-suite de ces entiers (cf. les paragraphes 2.4 et 2.6 pour les définitions de Λ_n et X_n).

Si $r_{\phi(n)}$ est très petit devant $e(\Lambda_{\phi(n+1)})$, alors pour tous les entiers q compris entre $q_{\phi(n)}$ et $q_{\phi(n+1)}$ l'ensemble $\{0, \theta, \dots, q\theta\}$ est mal réparti.

Il nous suffit donc de construire $\theta \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(\Lambda_{\phi(n+1)})}{r(\Lambda_{\phi(n)})} = +\infty$$

pour une bonne suite $\phi(n)$.

Soit $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $k(0) = 0$. Posons $\theta = (\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-k(2n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-k(2n)})$. Considérons la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (0, 3^{-k(0)}) \\ \beta_{2n+1} &= \left(\sum_{m=0}^n 2^{-k(2m+1)}, \sum_{m=0}^n 3^{-k(2m)} \right), \\ \beta_{2n} &= \left(\sum_{m=0}^{n-1} 2^{-k(2m+1)}, \sum_{m=0}^n 3^{-k(2m)} \right) \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la projection de β_{2n+1} dans \mathbb{T}^2 est d'ordre $Q_{2n+1} = 2^{k(2n+1)}3^{k(2n)}$ et la projection de β_{2n} d'ordre $Q_{2n} = 2^{k(2n-1)}3^{k(2n)}$.

Par définition $\theta = \beta_n + \alpha_n$ où α_n ne fait intervenir que des exposants $k(m)$ avec $m > n$. Donc $|\alpha_n|$ peut être rendu arbitrairement petit devant $\frac{1}{Q_n}(2 \times 3)^{-k(n)}$ par un choix convenable de la suite $(k(n))_n$. De plus, pour tout $q \in \{1, \dots, Q_n - 1\}$, $q\beta_n \in \frac{1}{6^{k(n)}}\mathbb{Z}^2$, par conséquent, pour un bon choix de la suite $(k(n))_n$, $\|Q_n\theta\| = |Q_n\alpha_n|$ est petit devant $r(\{0, \beta_n, \dots, (Q_n - 1)\beta_n\})$ et Q_n est une meilleure approximation de θ . La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une sous-suite de la suite des meilleures approximations de θ : $Q_n = q_{\phi(n)}$ et $\theta_{\phi(n)} = \beta_n$. On vérifie que

$$\begin{aligned} \Lambda_{\phi(2n)} &= \mathbb{Z}\beta_{2n} + \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}(2^{-k(2n-1)}, 0) + \mathbb{Z}(0, 3^{-k(2n)}) := \Gamma_{2n}, \\ \Lambda_{\phi(2n+1)} &= \mathbb{Z}\beta_{2n+1} + \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}(2^{-k(2n+1)}, 0) + \mathbb{Z}(0, 3^{-k(2n)}) := \Gamma_{2n+1}, \end{aligned}$$

et le plus court vecteur Y_n du réseau Γ_n^* est donné par

$$\begin{aligned} Y_{2n} &= (2^{k(2n-1)}, 0), \\ Y_{2n+1} &= (0, 3^{k(2n)}). \end{aligned}$$

La trajectoire est mal répartie car pour $q \in \{Q_{2n+1} + 1, \dots, Q_{2n+2}\}$ on a

$$r(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\}) \leq \|Q_{2n+1}\Theta\|$$

$$\ll \sum_{m=n+1}^{\infty} 3^{k(2n)} 2^{k(2n+1)-k(2m+1)} + \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{k(2n+1)} 3^{k(2n)-k(2m)} \ll 2^{k(2n+1)} 3^{k(2n)-k(2n+2)}$$

et

$$e(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\}) \gg e(\Lambda_{\phi(2n+2)}) \geq e(\Gamma_{2n+2}) \geq \frac{1}{2N(Y_{2n+2})} \geq \frac{1}{2} 2^{-k(2n+1)}$$

donc

$$\frac{e(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})}{r(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})} \gg 2^{-2k(2n+1)} 3^{-k(2n)+k(2n+2)}.$$

De même pour $q \in \{Q_{2n} + 1, \dots, Q_{2n+1}\}$ on a

$$\frac{e(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})}{r(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})} \gg 2^{-k(2n-1)+k(2n+1)} 3^{-2k(2n)}.$$

Ainsi, $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{e(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})}{r(\{p\Theta : 0 \leq p \leq q\})} = \infty$ lorsque la suite $(k(n))$ croît suffisamment vite.

6.2 Application : un exemple de Yoccoz.

Notation. $\Theta \in \mathbb{T}^d$, $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\Theta)$.

Lorsque $d = 1$ et q_n est une meilleure approximation de θ (le dénominateur d'une réduite de θ) on a l'inégalité de Denjoy-Koksma

$$\left| f_{q_n}(x) - q_n \int_{\mathbb{T}^1} f(t) dt \right| \leq \text{var}(f).$$

où $\text{var}(f)$ désigne la variation totale de la fonction f . J. C. Yoccoz a montré que cette propriété ne se généralise pas en dimension 2 (cf. [Y1] et [Y2]). Nous allons redonner une démonstration du résultat de Yoccoz en partant de la construction précédente.

Théorème 11 Soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application croissante tendant vers l'infini. Alors il existe $\theta \in \mathbb{T}^2$ et une fonction $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ analytique réelle telle que pour presque tout $x \in \mathbb{T}^2$

$$\left| f_q(x) - q \int_{\mathbb{T}^2} f(y) dy \right| \geq \frac{q}{\psi(q)}$$

pour q assez grand.

Démonstration. Reprenons les notations de la section précédente. Comme la suite $(k(n))$ est strictement croissante nous avons

$$\begin{aligned} \|Y_{2n} \cdot \theta\| &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-k(2m+1)} 2^{k(2n-1)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-k(2m+1)+k(2n-1)} \right\| \in [2^{-k(2n+1)+k(2n-1)}, 2 \times 2^{-k(2n+1)+k(2n-1)}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|Y_{2n+1} \cdot \theta\| &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-k(2m)} 3^{k(2n)} \right\| \\ &= \left\| \sum_{m=n+1}^{\infty} 3^{-k(2m)+k(2n)} \right\| \leq [3^{-k(2n+2)+k(2n)}, 2 \times 3^{-k(2n+2)+k(2n)}]. \end{aligned}$$

Notons $p(2n) = 2^{k(2n+1)-k(2n-1)}$, $s(2n) = 2^{k(2n-1)}$, $p(2n+1) = 3^{k(2n+2)-k(2n)}$ et $s(2n+1) = 3^{k(2n)}$. Pour un bon choix de la suite $k(n)$ nous avons

$$2^{k(n-1)} \leq s(n) \leq 3^{k(n-1)} \leq 2^{\frac{1}{2}k(n)} \leq p(n-1) \leq 3^{k(n)}.$$

Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{2n} \cos 2\pi Y_{2n} \cdot x + i c_{2n+1} \cos 2\pi Y_{2n+1} \cdot x)$$

où $c_n = 3^{-s(n)}$. La fonction f est analytique réelle car $N(Y_n)c_n \leq 3^{k(n-1)-2^{k(n-1)}}$. Le choix alternatif d'un coefficient réel et d'un coefficient imaginaire pur est crucial, il donne la minoration suivante. Pour $q \in [\frac{1}{4}p(n-1), \frac{1}{4}p(n)]$ on a

$$\begin{aligned} |f_q(x)| &\geq c_n \left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} \exp 2i\pi(Y_n \cdot x + pY_n \cdot \theta) \right| \\ &\quad - \sum_{m=1}^{n-2} \left(c_m \left| \sum_{p=0}^{q-1} \cos 2\pi(Y_{2m} \cdot x + qY_{2m} \cdot \theta) \right| \right) \\ &\quad - \frac{1}{4}p(n) \sum_{m=n+2} c_m. \end{aligned}$$

1. Minorons $\left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} (\exp 2i\pi(Y_n \cdot x + pY_n \cdot \theta)) \right|$. Comme $q \|Y_n \cdot \theta\| \leq \frac{1}{4}p(n) \|Y_n \cdot \theta\| \leq \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} (\exp 2i\pi(Y_n \cdot x + pY_n \cdot \theta)) \right| &= \left| \operatorname{Re} \left(e^{2i\pi Y_n \cdot x} \frac{1 - e^{2i\pi q Y_n \cdot \theta}}{1 - e^{2i\pi Y_n \cdot \theta}} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{Re} \left(\exp(2i\pi Y_n \cdot x + 2i\pi \frac{q-1}{2} Y_n \cdot \theta) \frac{\sin \pi q Y_n \cdot \theta}{\sin \pi Y_n \cdot \theta} \right) \right| \\ &\geq \frac{2q}{\pi} \left| \cos 2\pi(Y_n \cdot x + \frac{q-1}{2} Y_n \cdot \theta) \right|. \end{aligned}$$

Donc

$$c_n \left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} (\exp 2i\pi(Y_n \cdot x + pY_n \cdot \theta)) \right| \geq \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} \left| \cos 2\pi(Y_n \cdot x + \frac{q-1}{2} Y_n \cdot \theta) \right|$$

Soit $E_n = \{x \in \mathbb{T}^2 : |\cos 2\pi(X_n \cdot x + \frac{q-1}{2} Y_n \cdot \theta)| \geq 2^{-n}\}$. Pour $x \in E_n$ on a

$$c_n \left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} (\exp 2i\pi(Y_n \cdot x + pY_n \cdot \theta)) \right| \geq \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n}.$$

2. Par définition de $p(m)$ on a $\|Y_m \cdot \theta\| \in [\frac{1}{p(m)}, \frac{2}{p(m)}]$ d'où pour $m \leq n-2$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^{q-1} \operatorname{Re} (\exp 2i\pi(Y_m \cdot x + pY_m \cdot \theta)) \right| &= \left| \operatorname{Re} \left(e^{2i\pi Y_m \cdot x} \frac{1 - e^{2i\pi q Y_m \cdot \theta}}{1 - e^{2i\pi Y_m \cdot \theta}} \right) \right| \\ &\leq \frac{2}{|1 - e^{2i\pi Y_m \cdot \theta}|} \leq \frac{4}{\pi \|Y_m \cdot \theta\|} \leq \frac{4}{\pi} p(m). \end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n-2} \left(c_m \left| \sum_{p=0}^{q-1} \cos 2\pi(Y_{2m} \cdot x + qY_{2m} \cdot \theta) \right| \right) \leq \sum_{m=1}^{n-2} \frac{4}{\pi} 3^{-s(m)} p(m) \leq p(n-2)$$

car la suite $3^{-s(m)}$ décroît exponentiellement vite.

3. De même

$$\frac{1}{4}p(n) \sum_{m=n+2} c_m = \frac{1}{4}p(n) \sum_{m=n+2} 3^{-s(m)} \leq p(n) 3^{-s(n+2)}$$

4. Il en résulte que pour $q \in [\frac{1}{4}p(n-1), \frac{1}{4}p(n)]$ et $x \in E_n$ on a

$$|f_q(x)| \geq \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n} - p(n-2) - p(n) 3^{-s(n+2)}$$

Si on peut choisir la suite $k(n)$ croissant suffisamment vite pour que

$$\frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n} \geq \frac{3q}{\psi(\frac{1}{4}p(n-1))}, p(n-2) \leq \frac{1}{3} \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n} \text{ et } p(n) 3^{-s(n+2)} \leq \frac{1}{3} \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n}$$

alors pour les x appartenant à $\cap_{n \geq n_0} E_n$, on a pour $q \in [\frac{1}{4}p(n-1), \frac{1}{4}]$ et $n \geq n_0$

$$|f_q(x)| \geq \frac{1}{3} \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n} \geq \frac{q}{\psi(\frac{1}{4}p(n-1))} \geq \frac{q}{\psi(q)}.$$

Pour finir la démonstration du théorème, il reste donc à voir que les conditions précédentes sur la croissance de la suite $k(n)$ sont réalisables et que l'ensemble $\cup_{n_0 \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq n_0} E_n$ est de mesure de Lebesgue pleine. La condition sur les ensembles E_n résulte du lemme de Borel-Cantelli car $\forall P \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \geq 0$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{T}^2 : |\cos 2\pi(P.x + a)| \leq \varepsilon\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{T}^2 : \|P.x + a\| \in [\frac{1}{4}(1-\varepsilon), \frac{1}{4}(1+\varepsilon)]\}) \leq \varepsilon$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2 . Comme $s(n) \leq 3^{k(n-1)} \leq 2^{\frac{1}{2}k(n)} \leq p(n-1)$ la première condition est vérifiée si

$$\frac{2}{\pi} 3^{3^{k(n-1)}} 2^n \leq \psi(\frac{1}{4} 2^{\frac{1}{2}k(n)}).$$

On peut alors choisir $k(n)$ en fonction de $k(n-1)$ car la fonction ψ croît vers l'infini. Les deux autres conditions sont faciles à réaliser car

$$\begin{aligned} p(n-2) &\leq 3^{k(n-1)}, \\ \frac{1}{3} \frac{2q}{\pi} 3^{-s(n)} 2^{-n} &\geq \frac{2}{3\pi} \times \frac{1}{4} 2^{\frac{1}{2}k(n)} 3^{-3^{k(n-1)}} 2^{-n}, \\ p(n) 3^{-s(n+2)} &\leq 3^{k(n+1)} 3^{-2^{k(n+1)}}. \square \end{aligned}$$

7 Bibliographie

- [Ar, It] : P. ARNOUX, S. ITO, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, *pépublication Luminy*, n° 98-18 (1998).
- [Br1] : A. J. BRENTJES, *A two-dimensional continued fraction algorithm for best approximations with an application in cubic fields*, *J. Reine Angew. Math.* **326** (1981), 18-44.
- [Br1] : A. J. BRENTJES, *Multi-dimensional continued fraction algorithms*, *Mathematical Center Tracts 145* (Math. Centrum, Amsterdam 1981).
- [Ba] : L. BABAI, *On Lovász' lattice reduction and the nearest lattice point problem*, *Combinatorica* **6** (1986), 1-13.
- [Ca] : J. W. S. CASSELS, *An Introduction to Diophantine Approximation*, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **45**, Cambridge Univ. Press (1965).
- [Ch1] : N. CHEVALLIER, *Distances dans la suite des multiples d'un point du tore à deux dimensions*, *Acta Arith.* **74** (1996), 47-59.
- [Ch2] : N. CHEVALLIER, *Meilleures approximations d'un élément du tore \mathbb{T}^2 et géométrie de la suite des multiples de cet élément*, *Acta Arith.* **78** (1996), 19-35.
- [Ch3] : N. CHEVALLIER, *Géométrie des suites de Kronecker*, *Manuscripta Math.* **94** (1997), 231-241.
- [Ch4] : N. CHEVALLIER, *Three distance theorem and grid graph*, *Discrete Math.* **223** (2000), 355-362.
- [Ch5] : N. CHEVALIER, *Meilleures approximations diophantiennes d'un élément du tore \mathbb{T}^d* , *Acta Arith.* **97** (2001), 219-240.
- [G,L,S] : M. GRÖTSCHHEL, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Second Edition, Springer-Verlag (1993).
- [Hla] : E. HLAWKA, *Abschätzung von trigonometrischen Summen mittels diophantischer Approximationen*, *Österr. Akad. Wiss. SB II* **185** : 43-50, (1976).
- [Lag1] : J. C. LAGARIAS, *Some new results in simultaneous diophantine approximation*, *Proc. of the Queen's Number Theory Conference 1979* (P. Ribenboim, Ed.), *Queen's Paper in Pure and Applied Math.* No. **54** (1980), 453-474.
- [Lag2] : J. C. LAGARIAS, *Best simultaneous diophantine approximations I, Growth Rates of Best Approximations denominators*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** Number 2 (1982), 545-554.
- [Lag3] : J. C. LAGARIAS, *Best simultaneous diophantine approximations II, behavior of consecutive best approximations*, *Pacific Journal of Mathematics* **102** Number 1 (1982).
- [Lag4] : J. C. LAGARIAS, *Best diophantine approximations to a set of linear forms*, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **34** (1983), 114-122.
- [Lag5] : J. C. LAGARIAS, *The computational complexity of simultaneous diophantine approximations problem*, *SIAM J. Comput.* **14** No 1 (1985), 196-209.
- [Lag6] : J. C. LAGARIAS, *Geodesic multidimensional continued fractions*, *Proc. London Math. Soc.* (3) (1994), **69** 464-488.
- [Lar1] : G. LARCHER, *On the distribution of s -dimensional Kronecker sequences*, *Acta Arith.* **51**, 335-347 (1988).
- [Lar2] : G. LARCHER, *On the distribution of the multiples of an s -tuple of real numbers*, *J. Number Theory* **31** (1989), 367-372.
- [Ra] : G. RAUZY, *Nombres algébriques et substitutions*, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 147-178.
- [Ro] : C. A. ROGERS, *The signature of the errors of some simultaneous Diophantine approximations*, *Proc. London Math. Soc.* **52** (1951), 186-190.
- [Sch1] : W. M. SCHMIDT, *A metrical theorem in diophantine approximation*, *Canadian J. Math.* **12** (1960), 619-631
- [Sch2] : W. M. SCHMIDT, *Irregularities of distribution IX*, *Acta Arith.* **27** (1975), 385-396.
- [Só1] : V. T. SÓS, *On the theory of diophantine approximation I*, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 461-472.
- [Só2] : V. T. SÓS, *On the theory of diophantine approximation II*, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 229-241.
- [Só3] : V. T. SÓS, *On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$* , *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* **1** (1958), 127-134.

- [Só, Sz] : V. T. SÓS and G. SZEKERES, *Rational approximation vectors*, Acta Arith., **49** (1988), 255-261.
- [Św] : S. ŚWIERCZKOWSKI, *On the successive settings of an arc on the circumference of a circle*, Fundamenta Math. **46** (1958), 187-189.
- [Sp] : V. G. SPRINDŽUK, *Metric Theory of Diophantine Approximations*, W.H. Winston Sons, Washington, C. D. (1979).
- [St] : W. STUTE, *Convergence rates for the isotrope discrepancy*, Ann. Probability **5** (1977), 707-723.
- [Yo1] : J. C. YOCCOZ, *Centraliseurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Petits diviseurs en dimension 1* (appendice 1 p. 215-224), S.M.F. Astérisque 231 (1995).
- [Yo2] : J. C. YOCCOZ, *Sur la disparition des propriétés de type Denjoy-Koksma en dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **291** (1980), 655-658.