Une introduction aux systèmes extérieurs

Michel GOZE
Laboratoire de Mathématiques
Université de haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F. 68093 MULHOUSE

November 13, 2003

Première partie

SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS

1 Elie Cartan et le calcul différentiel extérieur

Elie Cartan introduisit le calcul différentiel extérieur en se basant sur le calcul extensif de Grassmann qui était de nature purement algébrique. Il définit le produit de deux formes par la condition que la multiplication soit bilinéaire et antisymétrique. Il définit ainsi par récurrence les formes différentielles extérieures de degré p :

$$\varphi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} A_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Une permutation paire sur les indices conserve la forme extérieure φ alors qu'une permutation impaire transforme φ en $-\varphi$. En particulier si deux indices sont égaux alors $\varphi = 0$.

Le produit extérieur d'une forme φ de degré p, et d'une forme ψ de degré q vérifie

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi.$$

Elie Cartan généralisa également la notion de covariant bilinéaire (introduit par Frobenius et Darboux) et introduisit la notion de différentielle extérieure d'une forme de degré p. Si

$$\varphi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} A_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

alors

$$d\varphi = \sum_{i_1,\ldots,i_p} dA_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Par exemple si

$$\varphi = Adx_1 + Bdx_2$$

alors

$$d\varphi = \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial B}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2.$$

Cet opérateur d est invariant par changement de variables et il vérifie

$$d(d\varphi) = 0.$$

De nombreuses équations de la physique peuvent s'exprimer à l'aide d'équations extérieures. Prenons par exemple la formule classique

$$div(RotX) = 0.$$

Considérons pour X le champ de vecteurs $X = (X_1, X_2, X_3)$. La forme différentielle de degré 1

$$\alpha = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$$

a pour différentielle extérieure

$$d\alpha = P_1 dx_2 \wedge dx_3 + P_2 dx_3 \wedge dx_1 + P_3 dx_1 \wedge dx_2$$

et (P_1, P_2, P_3) sont les composantes du champ rotationel $Rot(X)$. Considérons un champ $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ et la forme extérieure de degré 2 donnée par

$$\beta = Y_1 dx_2 \wedge dx_3 + Y_2 dx_3 \wedge dx_1 + Y_3 dx_1 \wedge dx_2$$

Alors

$$d\beta = (divY) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

et

$$d(d\alpha) = 0$$

est équivalent à

$$div(RotX) = 0.$$

Citons enfin un grand problème qui a intéréssé Elie Cartan dans une grande partie de son oeuvre , le problème d'équivalence. Par exemple, dans le cas des systèmes de Pfaff, ce problème est celui de la recherche de conditions pour que deux tels systèmes se ramènent l'un à l'autre par des changements de variables.

2 Algèbre extérieure

2.1 Les algèbres $\Lambda(E)$ et $\Lambda(E^*)$

Soit E un espace vectoriel réel et E^* son dual. Un élément de E est dit un vecteur, un élément de E^* est dit un covecteur. On a donc un produit

$$\begin{array}{rcl} E \times E^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (v, f) & \rightarrow & < v, f > \end{array}$$

Le produit tensoriel $E \otimes E^*$ peut être identifié à $Hom(E, E)$ par

$$(v \otimes f)(w) = < w, f > v.$$

On considère sur E l'algèbre tensorielle

$$T(E) = \mathbb{R} \oplus \{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}^*\} \oplus \{(E \otimes E) \oplus (E^* \otimes E) \oplus (E \otimes E^*) \oplus (E^* \otimes E^*)\} \oplus ...$$

On note $C(E)$ et $C(E^*)$ les sous algèbres de $T(E)$ définies par

$$C(E) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{E} \oplus E^{\otimes^2} \oplus E^{\otimes^3} \oplus ...$$

et

$$C(E^*) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{E}^* \oplus (E^*)^{\otimes^2} \oplus (E^*)^{\otimes^3} \oplus ...$$

Notons $C^p(E) = E^{\otimes^p}$ et $C^p(E^*) = (E^*)^{\otimes^p}$. Il existe un isomorphisme

$$(C^p(E))^* \simeq C^p(E^*).$$

En effet, posons $< v, \gamma >= 0$ si $v \in C^p(E)$ et $\gamma \in C^q(E^*)$ si $p \neq q$. Si $p = q$, prenons

$$v = \sum v^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$$

et

$$\gamma = \sum \gamma_{i_1 \ldots i_p} e^{i_i} \otimes ... \otimes e^{i_p};$$

alors

$$< v, \gamma >= \sum v^{i_1 \ldots i_p} \gamma_{i_1 \ldots i_p}.$$

2.2 Tenseurs antisymétriques et symétriques

Soit $v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_p \in T^p(E)$ et $\sigma \in \Sigma_p$. Le groupe symétrique Σ_p agit sur $T^p(E)$ par

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_p \times T^p(E) & \rightarrow & T^p(E) \\ (\sigma, v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_p) & \rightarrow & v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} ... \otimes v_{\sigma(p)} \end{array}$$

Définition 1 *Un tenseur $t \in T^p(E)$ est dit antisymétrique si*

$$\sigma(t) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} t$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

On note $\Lambda^p(E)$ le sous espace de $C^p(E)$ formés des tenseurs antisymétriques. On définit de même $\Lambda^p(E^*)$. L'opérateur d'antisymétrie est donné par

$$P \quad : \quad C^p(E) \to \Lambda^p(E)$$

$$\sum t^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \quad \to \quad \sum_{\sigma \in \sum_p} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} t^{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_p)}$$

Définition 2 *Un tenseur $t \in T^p(E)$ est dit symétrique si*

$$\sigma(t) = t$$

On construit également à partir d'un tenseur $t \in T^p(E)$ un tenseur symétrique en posant

$$S(t) = \sum_{\sigma \in \sum_p} t^{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_p)}$$

Notons que pour $p = 2$ on a $2t = P(t) + S(t)$.

Posons

$$\Lambda(E) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(E) \oplus \Lambda^2(E) \oplus \Lambda^3(E) \oplus \dots$$

et

$$\Lambda(E^*) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(E^*) \oplus \Lambda^2(E^*) \oplus \Lambda^3(E^*) \oplus \dots$$

Si $\xi \in \Lambda(E)$ alors $\xi = \xi_0 \oplus \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_p$ avec $\xi_i \in \Lambda^i(E)$, appelée composante homogène de degré i.

Définition 3 *Si $v \in \Lambda^p(E)$ et $w \in \Lambda^q(E)$ on pose*

$$v \wedge w = P(v \otimes w)$$

où P est le tenseur d'antisymétrie.

Ce produit vérifie

$$v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$$

Remarques.

1. Soient f^1 et f^2 deux formes linéaires. Alors

$$f^1 \wedge f^2(X, Y) = f^1(X) f^2(Y) - f^2(X) f^1(Y)$$

ce qui correspond au produit de Grassmann des formes linéaires. Plus généralement

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(X_1, \dots, X_p) = \det \begin{pmatrix} f^1(X_1) & \cdots & f^p(X_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1(X_p) & \cdots & f^p(X_p) \end{pmatrix}$$

et $f^1 \wedge \dots \wedge f^p = 0$ si et seulement si les formes linéaires $\{f_1, \dots, f_p\}$ sont liées.

2. Il existe une dualité entre $\Lambda^p(E)$ et $\Lambda^p(E^*)$. Si $\xi \in \Lambda^p(E)$ et $\omega \in \Lambda^p(E^*)$ alors

$$< \xi, \omega >= \det(< \xi_i, \omega^j >$$

où $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$ et $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p$.

Définition 4 *Un endomorphisme $f \in End(\Lambda(E^*))$ est une dérivation de degré $k, k \in \mathbb{Z}$, si*

$$f : \Lambda^p(E^*) \rightarrow \Lambda^{p+k}(E^*)$$

et

$$f(\omega_p \wedge \omega_q) = f(\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{kp} \omega_p \wedge f(\omega_q)$$

où $\omega_p \in \Lambda^p(E^*)$ et $\omega_q \in \Lambda^q(E^*)$. Une dérivation de degré -1 est appelée antidérivation.

Exemple d'antidérivation : le produit intérieur. Soit $X \in E$ et $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$. Alors $i(X)\alpha \in \Lambda^{p-1}(E^*)$ et est définie par

$$i(X)\alpha(X_1, ..., X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, ..., X_{p-1}).$$

2.3 Idéaux gradués de $\Lambda(E^*)$

Définition 5 *Un sous anneau $I \subseteq \Lambda(E^*)$ est un idéal gradué si*

Definition 1 *1) $\alpha \in I \Longrightarrow \alpha \wedge \omega \in I, \forall \omega \in \Lambda(E^*)$*
2) $\alpha \in I \Longrightarrow$ toutes les composantes de α sont dans I.

Exemple d'idéal gradué.

$$\Lambda_i(E^*) = \Lambda^i(E^*) \oplus \Lambda^{i+1}(E^*) \oplus ... \oplus \Lambda^n(E^*)$$

Remarque
Soit I un idéal gradué tel que

$$I_0 = I \cap \mathbb{R} = \Lambda^0(E^*) \neq 0$$

Alors $I = \Lambda(E^*)$.
Générateurs d'un idéal gradué.
Soit $I \subseteq \Lambda(E^*)$ un idéal gradué. Soit

$$A(I) = \{X \in E \quad / \quad i(X)\alpha \in I, \forall \alpha \in I\}$$

Alors $A(I)$ est un sous espace de E appelé espace caractéristique de Cauchy. Soit

$$A(I)^{\perp} = [f \in E^* \quad / \quad f(X) = 0, \forall X \in A(I)\}.$$

Ce sous espace de E^* est appelé espace rétractant de I.

Théorème 1 *Il existe un système de générateurs de I constitués d'éléments de $\Lambda(A(I)^{\perp})$*

2.4 Systèmes linéaires associés à une p-forme

Soient $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ et $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E. Considérons les formes linéaires

$$\alpha_{i_1 \dots i_{p-1}} : X \to \alpha(X, e_{i_1}, , e_{i_p}).$$

Le sous espace $A^*(\alpha) \subset E^*$ engendré par les formes $\alpha_{i_1 \dots i_{p-1}}$ est appelé le système linéaire associé à α.

Définition 6 *rang*$(\alpha) = \dim A^*(\alpha)$

Exemple

Soit $\omega = f^1 \wedge f^2 + f^1 \wedge f^4$ une deux formes de $\mathbb{R}^4$. Alors

$$A^*(\alpha) = \mathbb{R}\{f^1, f^2 + f^4\}$$

et $rang(\omega) = 2$.

Remarque

Considérons l'espace L_α des diviseurs linéaires

$$L_\alpha = \{f \in E^* \quad / \quad f \wedge \alpha = 0\}$$

On vérifie aisément que cet espace coïncide avec $A^*(\alpha)$.

Applications : Etude des 2-formes extérieures

Soit $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} f^i \wedge f^j$ une forme extérieure de degré 2. L'espace $A^*(\omega)$ est engendré par les formes

$$\alpha_i = \sum_{l<i} \omega_{li} f^l - \sum_{l>i} \omega_{li} f^l$$

Ainsi

$$\dim A^*(\omega) = rg \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ -\omega_{12} & 0 & \cdots & \omega_{2n} \\ \vdots & & 0 & \\ -\omega_{1n} & & & 0 \end{pmatrix} = 2p$$

Notons que $rg(\omega) = Inf\{p / \omega^p \neq 0, \omega^{p+1} = 0\}$.

3 Systèmes extérieurs

3.1 Définition

Un système extérieur est défini par un nombre fini d'équations extérieures sur E

$$(S) : \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ \theta_r = 0 \end{cases}$$

avec $\theta_i \in \Lambda^{p_i}(E^*)$.

Une solution du système (S) est un sous espace vectoriel $H \subset E$ tel que $\theta_i(H) = 0$ c'est-à-dire

$$\theta_i(X_1, ..., X_{p_i}) = 0$$

pour tout $X_1, ..., X_{p_i} \in H$.

Exemple. Considérons un système

$$(S) : \{\theta = 0$$

défini par une seule équation. Les solutions sont données par

$$\theta(H) = 0.$$

Supposons que le degré soit θ soit q. Considérons les coordonnées de Plücker $\{u^{i_1 \cdots i_p}\}$ de H. Rappelons que ces coordonnées sont ainsi construites : on se donne une base $\{v_1, ..., v_q\}$ de H. Par rapport à la base canonique (une base préalablement fixée) $\{e_i\}$ de E, on a

$$v_i = \sum \alpha_i^j e_j$$

Alors $u^{i_1 \cdots i_p}$ correspond au mineur d'ordre $i_1 ... i_p$ de la matrice (α_i^j). Le $q-$plan H est solution de

$$\left\{ \theta = \sum \theta_{i_1 \dots i_q} f^{i_1} \wedge ... f^{i_q} = 0 \right.$$

si et seulement si

$$\sum \theta_{i_1 \dots i_q} u^{i_1 \dots i_q} = 0.$$

3.2 Rang d'un système extérieur

Soit

$$I(S) = \{\alpha \in \Lambda(E^*) \quad / \quad \alpha = \sum_{i=1}^{r} \psi_i \wedge \theta_i\}$$

l'idéal engendré par (S). Soit Q le plus petit sous espace de E^* tel que ΛQ engendre $I(S)$. alors

$$rang(S) = \dim Q$$

4 Systèmes extérieurs k-symplectiques

Soit

$$(S) : \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ \theta_k = 0 \end{cases}$$

avec $\theta_i \in \Lambda^2(E^*)$. Considérons l'espace $Q(S)$ associé à (S). Rappelons que

$$rang(S) = \dim Q(S).$$

Remarquons que $Q(S)$ est l'orthogonal du sous espace $A(S)$ de E défini par

$$A(S) = \{X \in E \quad / \quad i(X)\theta = 0, \forall \theta \in (S)\}.$$

Exemple. Prenons $\dim E = n = 3, k = 2$. Si $rang(S) = 3$ alors le système s'écrit

$$(S) : \begin{cases} \theta_1 = \alpha^1 \wedge \alpha^2 = 0 \\ \theta_2 = \alpha^2 \wedge \alpha^3 = 0 \end{cases}$$

Un tel système est dit 2-symplectique. Il possède une solution maximale F de dimension 2. Il suffit de prendre $F = Ker\alpha^3$.

Définition 7 *Soit E de dimension $n(k+1)$ et F un sous espace de E de dimension n. Le système $\{\theta_1 = 0, ..., \theta_k = 0\}$ est dit k-symplectique si*

1. *$rang(S)$ est maximum*
2. *$\theta_i(X,Y) = 0$ pour tout $X, Y \in F$.*

Un tel système sera noté $\{\theta_1, ..., \theta_k, F\}$

Théorème 2 *Soit $\{\theta_1, ..., \theta_k, F\}$ un système k-symplectique sur E. Il existe une base $\{\omega^{p,i}, \omega^i\}$, avec $i = 1, ..., n$ et $p = 1, ..., k$ telle que*

$$\begin{cases} \theta_1 = \omega^{1,1} \wedge \omega^1 + \omega^{1,2} \wedge \omega^2 + ... + \omega^{1,n} \wedge \omega^n \\ \theta_2 = \omega^{2,1} \wedge \omega^1 + \omega^{2,2} \wedge \omega^2 + ... + \omega^{2,n} \wedge \omega^n \\ \vdots \\ \theta_k = \omega^{k,1} \wedge \omega^1 + \omega^{k,2} \wedge \omega^2 + ... + \omega^{k,n} \wedge \omega^n \end{cases}$$

et $F = Ker\omega^1 \cap ... \cap Ker\omega^n$.

La démonstration peut être lue dans [A.G].

Deuxième partie

SYSTEMES de PFAFF

5 Définition. Invariants

5.1 Variété intégrale d'un système de Pfaff

Un système de Pfaff défini dans la variété $\mathbb{R}^n$ est un système différentiel extérieur

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_s = 0 \end{cases}$$

où les α_i sont des formes différentielles de degré 1.

Définition 8 *Une variété intégrale à* (S) *est une sous variété* $W \subset \mathbb{R}^n$ *telle que pour tout* $x \in W$*, l'espace tangent* $T_xW \subset Ker(S_x)$ *où* (S_x) *désigne le système linéaire de* $T_x\mathbb{R}^n$

$$(S_x) : \begin{cases} \alpha_1(x) = 0 \\ \alpha_2(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_s(x) = 0 \end{cases}.$$

Le rang du système de Pfaff (S) au point x est par définition le rang du système linéaire (S_x). On le notera $rg(S)(x)$.La fonction $x \to rg(S)(x)$ n'est en général pas constante.

5.2 Classe d'un système de Pfaff

L'espace caractéristique de (S) en x est le sous espace de $T_x\mathbb{R}^n$ définie par

$$C(S)_x = \{X \in T_x\mathbb{R}^n \quad / \quad \alpha_i(x)(X) = 0, i(X)d\alpha_i(x) \wedge \alpha_1(x) ... \wedge \alpha_s(x) = 0\}.$$

Définition 9 *La classe de* (S) *au point* x*, notée* $cl(S)(x)$ *est la codimension de* $C(S)_x$ *dans* $T_x\mathbb{R}^n$*.*

Cet invariant mesure la non intégrabilité de (S). On dira que le système de Pfaff (S) est complètement intégrable si pour tout point x il existe une variété intégrale passant par x dont la codimension est égale au rang de (S) que l'on supposera constant. Ceci équivaut à dire qu'il existe un système de coordonnées $\{x_1, ..., x_n\}$ autour de x tel que le système de Pfaff, en restriction à ce voisinage, s'écrive

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 = dx_1 = 0 \\ \alpha_2 = dx_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_r = dx_r = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas

$$cl(S)(x) = rg(S)(x) = r$$

pour tout x.

Théorème 3 *(de Frobenius) Soit* (S) *un système de Pfaff de rang constant* r*. Alors* (S) *est complètement intégrable si et seulement si* $cl(S)(x) = r$ *pour tout* x*.*

Les systèmes complètement intégrables peuvent être caractérisés algébriquement. En effet le système de Pfaff

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_r = 0 \end{cases}$$

de rang r est complètement intégrable si et seulement si

$$d\alpha_i \wedge \alpha_1 ... \wedge \alpha_r = 0$$

pour $i = 1, .., r$.

Exemples.

1. Considérons le système de Pfaff de rang 1 de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\alpha_1 = dx_1 + x_2 dx_3 = 0$$

L'espace caractéristique $C(S)(x) = \{0\}$ et l'on a $cl(S)(x) = 3$.

2. Soit le système de Pfaff de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 = dx_1 + x_3 dx_4 = 0 \\ \alpha_2 = dx_2 + x_1 dx_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2 et de classe 4 en tout point.

5.3 Cas des systèmes de Pfaff de rang 1

Supposons que le système (S) soit défini par une seule équation

$$\alpha = 0$$

Proposition 1 *Le système (S) est de classe $2s+1$ au point x si*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^s(x) \neq 0, \quad \alpha \wedge (d\alpha)^{s+1}(x) = 0$$

Notons qu'un sustème de rang 1 est toujours de classe impaire (ce qui n'est plus vrai pour une forme de Pfaff).

Théorème 4 *(de Darboux) Soit $(S) = \{\alpha = 0\}$ un système de Pfaff de rang 1 et de classe $2s+1$ en tout point. Il existe un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_s, y_1, ..., y_s, z, u_1, ..., u_{n-2s-1})$ tel que*

$$\alpha = x_1 dy_1 + ... + x_s dy_s + dz$$

On en déduit donc que tous les sytèmes de Pfaff de rang constant 1 et de classe constante $2s+1$ sont localement isomorphes.

Esquisse de la démonstration [A.G]

1ère étape : On suppose qu'il existe une distribution intégrable de dimension s (et $n = 2s+1$). Dans ce cas le modèle de Darboux découle directement du théorème d'inversion locale.

2ème étape. On montre l'existence d'une telle distribution.

La démonstration ci dessus permet également de démontrer un théorème de Darboux à paramètres.

Théorème 5 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage local de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $(S) = \{\alpha = 0\}$ un système de Pfaff de rang 1 tel que la restriction à chaque feuille définisse un système de Pfaff de classe constante $2s+1$. Il exsite des coordonnées $(u_1, ..., u_{n-p}, x_1, ..., x_p)$ tel que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient définies par*

$$du_1 = 0, ..., du_{n-p} = 0$$

et la restriction de α à chaque feuille s'écrive

$$\alpha = dx_1 + x_2 dx_3 + ... + x_{2s} dx_{2s+1}.$$

6 Systèmes dérivés

6.1 Définitions

Soit (S) un système de rang constant r dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 10 *Le premier système dérivé $\mathcal{D}^1(S)$ est le système de Pfaff*

$$\mathcal{D}^1(S) = \{\alpha \in (S) \,/\, d\alpha = 0 \, mod(S)\}$$

$d\alpha = 0 \, mod(S)$ signifie que $d\alpha \wedge \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_r = 0$ où (S) est définie localement par les équations $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.

Exemple

Soit (S) le système de $\mathbb{R}^4$ donné par (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = dx_3 + x_1 dx_4 = 0 \\ \alpha_2 = dx_2 + x_3 dx_4 = 0 \end{array} \right.$$

Alors $d\alpha_1 = dx_1 \wedge dx_4$ et $d\alpha_2 = dx_3 \wedge dx_4$d'où $d\alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \neq 0$ et $d\alpha_2 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$. Ainsi $\mathcal{D}^1(S) = \{\alpha_2 = 0\}$.

Remarque : (S) est complètement intégrable si et seulement si $(S) = \mathcal{D}^1(S)$.

Plus généralement on peut définir

$$\mathcal{D}^k(S) = \mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{k-1}(S))$$

dès que le rand du système $\mathcal{D}^{k-1}(S)$ est constant. On définit dans ce cas une suite

$$\mathcal{D}^k(S) \subset \mathcal{D}^{k-1}(S) \subset ... \subset \mathcal{D}^1(S) \subset (S)$$

Si l'un de ces systèmes dérivés est complètement intégrable, cette suite est stationnaire.

6.2 Systèmes totalement réguliers (ou systèmes de Goursat)

L'étude de tels systèmes a été initiée par P. Libermann.

Définition 11 *Un système de Pfaff est dit totalement régulier si tous les systèmes dérivés sont de rang constant*

Dans ce cas :

1. soit il existe k tel que $\mathcal{D}^k(S) = 0$
2. soit $\mathcal{D}^k(S)$ est complètement intégrable.

Un système complètement régulier est appelé système en drapeau (P. Libermann) si

$$rg(\mathcal{D}^k(S)) = rg(\mathcal{D}^{k-1}(S)) + 1$$

Une classification de ces systèmes a fait dernièrement l'objet d'une note aux CRASc Paris.

Exemple.

Soit le système

$$\begin{cases} \alpha_1 = dx_1 + x_2 dx_5 = 0 \\ \alpha_2 = dx_2 + x_3 dx_5 = 0 \\ \alpha_2 = dx_3 + x_4 dx_5 = 0 \end{cases}$$

Son rang est égal à 3, sa classe est égale à 5. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^1(S) & = & \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0\} \\ \mathcal{D}^2(S) & = & \{\alpha_1 = 0\} \\ \mathcal{D}^3(S) & = & \{0\} \end{array}$$

Remarquons que l'intérêt des systèmes en drapeau est de pouvoir les intégrer par quadrature.

7 Invariant d'Engel. Variétés intégrales maximales

Soit (S) un système de Pfaff de rang constant r et de classe constante c. L'invariant d'Engel de (S) est l'entier

$$e(S) = Inf\{l \,/\, (d\alpha)^{l+1} = 0 \, mod(S), \forall \alpha \in (S)\}$$

Ainsi $e(S) = 0$ si et seulement si (S) est complètement intégrable.

Proposition 2 *(Gardner)*

$$\frac{c-r}{r+1} \leq e(S) \leq \frac{c-r}{2}$$

Démonstration. Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ une base locale de (S) que nous complétons en une base $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_{n-r})$ dans $T^*\mathbb{R}^n$. On peut écrire

$$d\alpha_i = \sum A^i_{jk} \alpha_j \wedge \alpha_k + \sum B^i_{jk} \alpha_j \wedge \beta_k + \sum C^i_{jk} \beta_j \wedge \beta_k$$

Comme $cl(S)=c$, alors le rang du système linéaire $\left\{ \sum C^i_{jk}\beta_j \right.$ est majoré par $c-r$. Soit $\theta = \sum C^i_{jk}\beta_j \wedge \beta_k$. Son rang est inférieur ou égal à $\frac{c-r}{2}$. Ainsi

$$(d\alpha_i)^{\frac{c-r}{2}+1} = 0 \quad mod(S)$$

et

$$e(S) \leq \frac{c-r}{2}$$

On procède de même pour la deuxième inégalité.

Proposition 3 *(Goze-Haragushi) Soit (S) un système de Pfaff de rang r et de classe maximum n. Soit $\mathcal{D}$ une distribution intégrable, $\mathcal{D} \subset Ker(S)$, de dimension d. Alors*

$$d \leq \frac{r(n-r)}{r+1}$$

Remarque. Cette inégalité a été généralisée par P. Libermann pour des systèmes de classe constante quelconque.

Supposons que (S) contienne une distribution intégrable de dimension maximum

$$q = \frac{r(n-r)}{r+1}$$

Alors $n = p + r + rp$ et $e(S) = (n-r)/(r+1)$.

Théorème 6 *([G.H]). Si le noyau du système de Pfaff (S) contient une distribution intégrable de dimension $q = \frac{r(n-r)}{r+1}$, alors il existe des coordonnées*

$$(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_p, z_1, ..., z_{p-r})$$

telles que (S) s'écrive localement

$$\begin{cases} \alpha_1 = dx_1 + z_1 dy_1 + ... + z_{(p-1)r+1} dy_p \\ \alpha_2 = dx_2 + z_2 dy_1 + ... + z_{(p-1)r+2} dy_p \\ \cdots \\ \alpha_r = dx_r + z_r dy_1 + ... + z_{pr} dy_p \end{cases}$$

Ce modèle local a été également étudié par Bryant dans l'étude de la variété des jets [B.C.G.G.G].

7.1 Systèmes de Pfaff involutifs

Soit (S) un système de Pfaff. Un élément de contact est un couple (x, Π) , $x \in \mathbb{R}^n$, Π variété linéaire affine de $\mathbb{R}^n$ passant par x. Cet élément de contact est dit intégral à (S) si $\alpha_i(X)(x) = 0$ pour tout $X \in \Pi$ et tout α_i de (S).

Définition 12 *Un système de Pfaff (S) est dit involutif s'il existe, pour tout point x, une chaine*

$$E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n$$

d'éléments intégraux à (S).

Elie Cartan a démontré l'existence de variétés intégrales locales pour les systèmes en involution.

8 Classification locale des systèmes de Pfaff

Seuls les systèmes de Pfaff de moins de 6 variables ont été classés. Le problème rencontré est celui de l'existence, dès la dimension 5 de paramètres donnés par des fonctions dont on ne connait pas les invariants.

8.1 Classification en dimension 3

$(S_3^1) = \{\omega_1 = dy_1.$	$r = 1,$	$c = 1$
$(S_3^2) = \{\omega_1 = dy_1 - y_2 dy_3.$	$r = 1,$	$c = 3$
$(S_3^3) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1, \\ \omega_2 = dy_2. \end{cases}$	$r = 2,$	$c = 2$
$(S_3^4) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1, \\ \omega_2 = dy_2, \\ \omega_3 = dy_3. \end{cases}$	$r = 3,$	$c = 3$

8.2 Classification en dimension 4

	rank (S)	class (S)	rank $(D^1(S))$	class $(D^1(S))$
$S_4^1 = \begin{cases} \omega_1 = dy_1, \\ \omega_2 = dy_2, \\ \omega_3 = dy_3. \end{cases}$	3	3	3	3
$S_4^2 = \{\omega_1 = dy_1.$	1	1	1	1
$S_4^3 = \{\omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3$	1	3	0	0
$S_4^4 = \begin{cases} \omega_1 = dy_1, \\ \omega_2 = dy_2. \end{cases}$	2	2	2	2
$S_4^5 = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_3 dy_4, \\ \omega_2 = dy_2. \end{cases}$	2	4	1	1
$S_4^6 = \begin{cases} \omega_1 = dy_3 + y_1 dy_4, \\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4. \end{cases}$	2	4	1	3
$S_4^0 = \begin{cases} \omega_1 = dy_1, \\ \omega_2 = dy_2, \\ \omega_3 = dy_3, \\ \omega_4 = dy_4. \end{cases}$	4	4	4	4

8.3 Classification en dimension 5

	c	
S_5^1	1	$\{\omega_1 = dx_1$
S_5^2	3	$\{\omega_1 = dx_1 + x_2dx_3$
S_5^3	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_2dx_3 + x_4dx_5$
S_5^4	5	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2,\, \omega_3 = dx_3,\, \omega_4 = dx_4,\, \omega_5 = dx_5$
S_5^5	4	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2,\, \omega_3 = dx_3,\, \omega_4 = dx_4$
S_5^6	3	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2,\, \omega_3 = dx_3$
S_5^7	5	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2,\, \omega_3 = dx_3 + x_4dx_5$
S_5^8	5	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2 + x_3dx_4,\, \omega_3 = dx_3 + x_5dx_4$
S_5^9	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_2dx_3,\, \omega_2 = dx_2 + x_4dx_3,\, \omega_3 = dx_3 + x_5dx_4$
S_5^{10}	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_2dx_3,\, \omega_2 = dx_2 + x_4dx_3,\, \omega_3 = dx_4 + x_5dx_3$
$S_5^{11}(F)$	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_3dx_4,\, \omega_2 = dx_2 + Fdx_4,\, \omega_3 = dx_3 - x_5dx_4$
S_5^{12}	2	$\{\omega_1 = dx_1,\, \omega_2 = dx_2,$
S_5^{13}	4	$\{\omega_1 = dx_1 + x_3dx_4,\, \omega_2 = dx_2$
S_5^{14}	4	$\{\omega_1 = dx_1 + x_3dx_4,\, \omega_2 = dx_2 + x_1dx_4$
S_5^{15}	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_4dx_3,\, \omega_2 = dx_2 + x_5dx_3$
$S_5^{16}(f)$	5	$\{\omega_1 = dx_1 + x_3dx_4,\, \omega_2 = dx_2 + x_5dx_3 + fdx_4$

Notons que la liste proposé par E. Cartan mentionné comme localement isomorphes deux systèmes projectivement équivalents mais non isomorphes. Cette erreur a été relevée pour la première fois par Kumpera-Ruiz. Il s'agit des systèmes S_5^9 et S_5^{10}. La non isomorphie peut être prouvée en utilisant comme invariant les dimensions de sous algèbres de Lie associées à chacun de ces systèmes.

8.4 Algèbres de Lie libres associées à un système de Pfaff

Soit (S) un système de Pfaff de rang r défini globalement par les équations indépendantes $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_r = 0$. Le noyau $Ker(S)(x)$ au point $x \in \mathbb{R}^n$ est le noyau du système linéaire $\alpha_i(x) = 0, i = 1, ...r$. Soient $X_1, ..., X_{n-r}$ des champs indépendants tels que $X_1(x), ..., X_{n-r}(x)$ engendrent $Ker(S)(x)$. Ici aussi, nous pouvons supposer ces champs définis globalement.

Définition 13 *L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S)(X_1, ..., X_{n-r})$ associé à (S) est l'algèbre de Lie libre engendrée par les champs $X_1, ..., X_{n-r}$.*

Il est clair que cette algèbre dépend du choix de ces générateurs. Considérons les sous algèbres de Lie de $\mathcal{L}(S)(X_1, ..., X_{n-r})$ de dimension finie. La plus petite dimension possible de ces algèbres, pour tout système de générateurs du noyau est un invariant de (S) que l'on notera $g(S)$.

Exemple [O] Considérons les systèmes à cinq variables

$$(S_1) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4 \end{cases} \qquad (S_2) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2y_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5dy_3 \end{cases}$$

$Ker(S_1)$ est engendré par $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_5}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial y_4} - y_5\frac{\partial}{\partial y_3} + y_4y_5\frac{\partial}{\partial y_2} + y_2y_5\frac{\partial}{\partial y_1}$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(X_1, X_2)$ est une algèbre de dimension 6 définie par

$$[X_1, X_2] = X_3; [X_2, X_3] = X_4; [X_3, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6; [X_1, X_6] = X_5$$

Considérons un autre système de générateurs Z_1, Z_2 de $Ker(S_1)$. Alors
$$\begin{cases} Z_1 = f_1 X_1 + f_2 X_2 \\ Z_2 = f_3 X_1 + f_4 X_2 \end{cases} \qquad avec\ g = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{vmatrix} = f_1 f_4 - f_2 f_3 \neq 0 \text{ partout.}$$
L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$ est au moins de dimension 6, car on a les crochets suivants :
$[Z_1, Z_2] = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g X_3 = Z_3$ avec $\underline{g \neq 0}$
$[Z_1, Z_3] = h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 + h X_4 = Z_4$ avec$\underline{h = f_2 g}$
$[Z_2, Z_3] = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha X_4 = Z_5$ avec $\underline{\alpha = f_4 g}$
$[Z_1, Z_4] = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta X_6 = Z_6$ avec $\underline{\beta = f_2^2 g}$
$[Z_3, Z_4] = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda X_5 + \lambda_6 X_6 = Z_7$ avec $\underline{\lambda = f_2 g^2}$
$[Z_2, Z_5] = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \delta_4 X_4 + \delta X_6 = Z_8$ avec $\underline{\delta = f_4^2 g}$
$[Z_3, Z_5] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu X_5 + \mu_6 X_6 = Z_9$ avec $\underline{\mu = f_4 g^2}$
Comme $g \neq 0$, l'une des deux fonctions f_2 ou f_4 est non nulle. Si $f_2 \neq 0$, alors les les champs de vecteurs Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, et Z_7 sont linéairement indépendants. De même, si $f_4 \neq 0$, le système $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_8, Z_9\}$ est libre. Par conséquent dans les deux cas, la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{S}_1)(Z_1, Z_2)$ est supérieure ou égale à 6. Ainsi
$$g(S_1) = 6.$$
Un calcul analogue pour le système (S_2) montre que
$$g(S_2) = 5.$$
Ainsi les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas isomorphes.

8.5 Sur les systèmes $S_5^{11}(F)$ ou $S_5^{16}(f)$

En utilisant un procédé de réduction, on peut prouver (voir [A.G]) que le système $S_5^{11}(f)$ peut se réduire sous la forme

$$(S_5^{11}(f)) = \begin{cases} \alpha_1 = dy_1 + y_3 dy_4, \\ \alpha_2 = dy_2 - y_5 dy_3 + \left(\frac{1}{2} y_5^2 + y_5 g(y_1, y_4) + h(y_1, y_4)\right) dy_4, \\ \alpha_3 = dy_3 - (y_5 + g(y_1, y_4))\, dy_4. \end{cases}$$

Troisième partie

SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS

Dans ce chapitre les formes extérieures sont définies sur une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, les formes étant également de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note $\mathcal{A}^*(M)$ le module sur l'anneau des donctions des formes différentielles sur M. Il es gradué :

$$\mathcal{A}^*(M) = \oplus_0^n \mathcal{A}^p(M)$$

où $\mathcal{A}^p(M)$ est l'espace des p-formes alternées sur le fibré des champs de vecteurs $\mathcal{X}(M)$.

9 Définition

9.1 Définition

Un système différentiel extérieur est un système de la forme

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \alpha_s = 0 \end{cases}$$

où $\alpha_i \in \mathcal{A}^*(M)$.

On note $I(S)$ l'idéal de $\mathcal{A}^*(M)$ engendré par $\alpha_1, ..., \alpha_s$.

9.2 Exemples

1. Systèmes de Pfaff.
   Dans ce cas $\alpha_i \in \mathcal{A}^1(M)$.
2. Systèmes symplectiques
   Prenons $M = \mathbb{R}^{2p}$. Le système est donné par une seule équation

$$\theta = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4 + ... + \omega_{2p-1} \wedge \omega_{2p}$$

vérifiant $d\theta = 0$ où $\{\omega_1, \omega_2, .., \omega_{2p-1}, \omega_{2p}\}$ est une base de $\mathcal{A}^1(\mathbb{R}^{2p})$.

3. Systèmes k-symplectiques
   Prenons $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}$. Considérons le système

$$(S) : \begin{cases} \theta_1 = dx^{11} \wedge dx^1 + ... + dx^{1n} \wedge dx^n = 0 \\ \theta_2 = dx^{21} \wedge dx^1 + ... + dx^{2n} \wedge dx^n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \theta_k = dx^{k1} \wedge dx^1 + ... + dx^{kn} \wedge dx^n = 0 \end{cases}$$

Ici $\theta_i \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^{n(k+1)})$ et vérifient $d\theta_i = 0$. Un tel système est appelé système $k-$symplectique.

4. Systèmes symplectiques d'ordre k.
   Le système est définie par une seule équation

$$\theta = 0$$

avec $\theta \in \mathcal{A}^k(M)$ et vérifiant $d\theta = 0$ et θ non dégénéré.
5. Equation de Korteweg-de Vries (KDV).

Prenons $M = \mathbb{R}^5$. On considère le système de coordonnées (x, t, u, z, p) et le système

$$(S): \begin{cases} \theta_1 = du \wedge dt - zdx \wedge dt = 0 \\ \theta_2 = dz \wedge dt - pdx \wedge dt = 0 \\ \theta_3 = -du \wedge dx + dp \wedge dt - 12uzdx \wedge dt = 0 \end{cases}$$

Ici $\theta_i \in \mathcal{A}^2(M)$. Nous verrons que les solutions de ce système coincident avec les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries (KDV) :

$$u_t + u_{xxx} + 12uu_x = 0$$

où $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
6. EDP du premier ordre.

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, t, u, u_x, u_t) = 0$$

où $u_x(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $u_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$. Considérons $M = \mathbb{R}^5$ avec comme système de coordonnées (x, t, u, p, q) et soit le système différentiel extérieur

$$\begin{cases} f(x, t, u, p, q) = 0 \\ du - pdx - qdt = 0 \end{cases}$$

Il est constitué d'une équation de degré 0 et d'une équation de degré 1. Ici aussi les solutions du système extérieur coincident avec les solutions de l'EDP.

9.3 Solutions d'un système différentiel extérieur

Soit $x \in M$ et $W_x \subset T_xM$ un sous espace de l'espace tangent T_xM.

Définition 14 *W_x est un élément intégral du système différentiel extérieur (S) au point x si*

$$\alpha_1(x)(W_x) = 0, ..., \alpha_s(x)(W_x) = 0.$$

Ainsi W_x est solution de chacune des formes extérieures $\alpha_i(x)$ et quelle que soit $\theta \in I(S)$ on a $\theta_x(W_x) = 0$.

Définition 15 *Une sous variété V de M est dite sous variété intégrale du système différentiel extérieur (S) si pout tout $x \in V$, l'espace tangent T_xV est élément intégral de (S) en x.*

En particulier les formes induites $i^*(\alpha_j)$ où $i : V \to M$ est le plongement canonique sont nulles sur V.

Le but de l'étude des systèmes différentiels extérieurs est la recherche de sous variétés intégrales.

10 Systèmes complets, gradués, fermés

10.1 Systèmes complets

Soit (S) un système différentiel extérieur et soit $I(S)$ l'idéal associé. Considérons l'ensemble $\widehat{I}$ constitué des formes extérieures θ telles que $\theta_x(W_x) = 0$ pour tout élément intégrale W_x en x de (S).

Proposition 4 *$\widehat{I} \supseteq I$ et $\widehat{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}^*(M)$.*

Définition 16 *Le système différentiel extérieur (S) est dit complet si $\widehat{I} = I$.*

Remarquons que l'idéal $\widehat{I}$ de $\mathcal{A}^*(M)$ est un idéal associé à un système différentiel extérieur $(\widehat{S})$ qui par définition sera complet.
Etude d'un système differentiel extérieur : première étape .
Soit (S) un système différentiel extérieur. S'il n'est pas complet, on remplace (S) par son complété $(\widehat{S})$. Notons que cette opération est loin d'être aisée.

10.2 Systèmes gradués

Définition 17 *Le système différentiel extérieur (S) est dit gradué si son idéal $I = I(S)$ est gradué.*

Supposons que (S) ne soit pas gradué. Pour chaque $\alpha_i \in (S)$ posons

$$\alpha_i = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 ... + \alpha_i^n$$

où $\alpha_i^j \in \mathcal{A}^j(M)$. Le système

$$(S_g) : \begin{cases} \alpha_1^0 = 0, ..., \alpha_1^n = 0 \\ \alpha_2^0 = 0, ..., \alpha_2^n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_s^0 = 0, ..., \alpha_s^n = 0 \end{cases}$$

est gradué. Il vérifie

$$(\widehat{S_g}) = (\widehat{S})$$

Le système (S_g) est appelé le gradué associé. Il a le même complété que (S) et ses équations sont toutes homogènes.
Etude d'un système differentiel extérieur : deuxième étape
On remplace (S) par son gradué (S_g) puis (S_g) par $(\widehat{S_g})$.

10.3 Systèmes fermés

Définition 18 *Le système différentiel extérieur (S) est fermé si*

$$d\alpha_i \in I(S)$$

pour tout $\alpha_i \in S$.

La fermeture du système (S) est le système

$$(S_f) : \begin{cases} \alpha_1 = 0, d\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0, d\alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_s = 0, d\alpha_s = 0 \end{cases}.$$

On peut noter qu'un système différentiel extérieur et sa fermeture ont les mêmes variétés intégrales. Par contre ils n'ont pas les mêmes éléments intégraux.

Conséquence

On pourra toujours ramener un système différentiel extérieur à un système gradué et fermé, sans équations de degré 0 (en effet ces équations ramènent l'étude du système à une sous variété V de M définie par ces équations de degré 0). On essayera également d'éliminer les équations qui sont conséquences des autres, c'est-à-dire on considèrera un système minimal de générateurs de $I(S)$. On dira qu'un tel système est régulier.

11 Champs de vecteurs caractéristiques

Soit (S) un système différentiel extérieur fermé.

Définition 19 *Un champ $X \in \mathcal{X}(M)$ est dit caractéristique de (S) si*

$$i(X)\alpha \in I(S)$$

pour tout $\alpha \in (S)$.

Soit $\mathcal{C}(S)$ l'ensemble des champs caractéristiques. C'est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathcal{X}(M)$. Notons

$$\mathcal{C}_x(S) = \{X_x \in T_xM \quad / \quad X \in \mathcal{C}(S)\}.$$

Si $\dim \mathcal{C}_x(S) = p$ est constante, alors $\mathcal{C}(S)$ est un sous module localement libre de $\mathcal{X}(M)$. Il sera dit, dans ce cas, régulier.

Définition 20 *1. On appelle rang du module régulier $\mathcal{C}(S)$ la dimension p de $\mathcal{C}_x(S)$ (qui ne dépend pas de x)*

2. Si $\mathcal{C}(S)$ est régulier de rang p , le système caractéristique est l'ensemble des $1-$ formes qui s'annulent sur $\mathcal{C}(S)$.

Le système caractéristique est alors un système de Pfaff complètement intégrable.

Réduction d'un système differentiel extérieur admettant un système caractéristique.

Considérons un système différentiel extérieur gradué, fermé et régulier. Il s'écrit

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1^0 = 0, ..., \alpha_1^n = 0 \\ \alpha_2^0 = 0, ..., \alpha_2^n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_s^0 = 0, ..., \alpha_s^n = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha_i^j \in \mathcal{A}^j(M)$. supposons que ce système admette un système caractéristique de rang q. Alors, en utilisant le théorème de Frobenius, on peut trouver un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$ tel que les α_i^j ne s'expriment qu'en fonction de $(x_1, ..., x_q)$ et de $(dx_1, ..., dx_q)$. dans ce cas les variétés intégrales du système caractéristique sont aussi des variétés intégrales de (S). Ces variétés sont appelées les caractéristiques de Cauchy.

12 Recherche des éléments intégraux

12.1 Recherche des éléments intégraux de dimension 1

Un vecteur X_x définit un élément intégral régulier si

$$\alpha_1^1(x)X_x = 0, ..., \alpha_s^1(x)X_x = 0.$$

Soit

$$r_0(x) = rg\{\alpha_1^1(x) = 0, ..., \alpha_s^1(x) = 0\}$$

et

$$r_0 = Max_{x\in M}\{r_0(x)\}.$$

Un point $x \in M$ est régulier $r_0(X) = r_0$. On se place au voisinage U d'un point régulier. On peut donc définir les éléments intégraux de dimension 1.

12.2 Elements intégraux de dimension 2

Etant donné un élément intégral $X_1(x)$ en x, cherchons les espaces $\{X_1(x), X_2(x)\} \subset T_xM$ élément intégral de dimension 2 en x. Le vecteur $X_2(x)$ doit vérifier :

$$\begin{cases} \alpha_1^1(x)X_2(x) = 0, ..., \alpha_s^1(x)X_2(x) = 0 \\ \alpha_1^2(x)(X_1(x), X_2(x)) = 0, ..., \alpha_s^2(x)(X_1(x), X_2(x)) = 0 \end{cases}$$

Le rang $r_1(x)$ du système

$$\begin{cases} \alpha_1^1(x) = 0, ..., \alpha_s^1(x) = 0 \\ i(X_1(x))\alpha_1^2(x) = 0, ..., i(X_1(x))\alpha_s^2(x) = 0 \end{cases}$$

est supérieur ou égal à r_0. Posons $r_1(x) = r_0 + f_1(x)$ et

$$r_1 = Max_{x\in U}\{f_1(x)\}.$$

Quitte à diminuer U, on peut supposer que $f_1(x) = r_1$ en tout point de U. Ainsi le rang du système précédent est égal à $r_0 + r_1$. Dans ce cas le système intégral de dimension 2 ainsi défini sera dit régulier.

On itère ce procédé pour déterminer les éléments intégraux maximaux, c'est-à-dire de dimension maximale.

12.3 Exemple.

Soit

$$F(x,t,u,u_x,u_t)=0$$

une EDP du premier ordre. L système différentiel extérieur associé s'écrit dans $\mathbb{R}(x,t,u,p,q)$:

$$\begin{cases} F(x,t,u,p,q)=0 \\ du-pdx-qdt=0 \end{cases}$$

Le système fermé associé est $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} F(x,t,u,p,q)=0 \\ dF=0, \alpha=du-pdx-qdt=0 \\ d\alpha=-dp\wedge dx-dq\wedge dt=0. \end{cases}$$

L'équation $F=0$ définit une sous variété $V\subset\mathbb{R}^5$. Plaçons nous sur cette variété. Le système fermé induit devient :

$$\begin{cases} (du-pdx-qdt)_V=0 \\ (-dp\wedge dx-dq\wedge dt)_V=0 \end{cases}$$

et $\alpha\wedge dF\neq 0$ sinon $\alpha_V=(du-pdx-qdt)_V\equiv 0$. Ici $r_0=1$ car les éléments intégraux de dimension 1 sont définis par

$$\{\alpha_V(X_x)=0, \quad X_x\in T_xV$$

et $r_1=1$ et les éléments intégraux maximaux sont de dimension 2.

13 Existence de variétés intégrales

Le seul théorème d'existence est basé sur le théorème de Kowalewska. Si le système différentiel extérieur est analytique, il existe alors localement des variétés intégrales analytiques.

Bibliographie

[A1] A. AWANE Sur une généralisation des structures symplectiques. Thesis, Strasbourg (1984).

[A2] A. AWANE k-symplectic structures . *Journal of Mathematical Physics* **33** 4046 - 4052, (1992)

[A.G] A. AWANE. M. GOZE. Pfaffian systems and k-symplectic systems. Kluwer editor (2000)

[B.C.G.G.G] R. BRYANT, SS. CHERN, R. GARDNER, H. GOLDSCHMIDT, P. GRIFFITH *Exterior Differential Systems.* MSRI Publications 18. Springer

Verlag (1991).
[C] E. CARTAN. Les systèmes de pfaff à 5 variables. Ann. Sci. Ec. Nor. Sup. 27, 109-192 (1910).
[G] C. GODBILLON. Géométrie différentielle et Mécanique Analytique. Hermann. Paris (1969).
[Go] E. GOURSAT. Leçons sur les systèmes de Pfaff. Paris. 1922.
[Gz] M.GOZE. Systèmes de Pfaff associés aux algèbres de Lie de type H. RenD. Sem. Mat. Univ. Torino. Vol 46, 1 ,91-110, (1988).
[G.H] M. GOZE - Y. HARAGUCHI Sur les r-systèmes de contact. *CRAS, Paris,* **294**, (1982), 95 - 97.
[G.K] M. GOZE , Y. KHAKIMDJANOV. Nilpotent Lie Algebras. Kluwer editeur. 1997
[L] P. LIBERMANN. Elie Cartan. Travaux mathématiques. VIII, 115-158, (1996)
[M] P. MOLINO. Systèmes d'Evolution. Prepriny Montpellier
[O] A. OUAZZANI. Sur les systèmes de Pfaff à six variables. Thèse d'Etat. Casablanca. (2000)