Mesures quasi-invariantes sur le tore $\mathbb{T}^d$

Nicolas Chevallier

Juin 2000

Abstract

Replace this text with your own abstract.

1 Introduction

Soit T une translation irrationnelle du tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et h une application mesurable de $\mathbb{T}^1$ dans $]0, \infty[$. Lorsque h est à variation bornée J.P. Conze et Y. Guivarc'h ont démontré qu'il existe une unique mesure de probabilité μ vérifiant l'équation de quasi-invariance

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

(cf. [5]). Si l'hypothèse de régularité sur h est affaiblie il n'y a en général pas unicité de μ. J. Brémont ([2]) a construit une fonction continue h telle que pour chaque rationnel x de $\mathbb{T}^1$ il existe une mesure de probabilité discrète portée par la trajectoire de x, $\{T^n(x) : x \in \mathbb{Z}\}$, et solution de l'équation de quasi-invariance. Dans ce travail nous donnons d'autres résultats de non unicité.

Théorème 1 *Soit (X, d) un espace métrique, T un homéomorphisme de X dans X et K un compact de X dont les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Alors il existe une fonction continue bornée $h : X \to]0, +\infty[$ telle que pour toute mesure de probabilité ν portée par K il existe une mesure μ de masse finie, portée par $\cup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(K)$, telle que*

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

et $\mu_{|K} = \nu$.

Théorème 2 *Avec les hypothèses du théorème précédent et les hypothèses supplémentaires :*
T est une isométrie, K est fini et
$\exists \alpha \in]0, 1[$, $\exists c > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(K, T^n(K)) \geq cn^{-\alpha}$,
la conclusion du théorème précédent est valable avec la propriété supplémentaire : $\ln h$ est lipschitzienne.

Corollaire 1 *Soit $X = \mathbb{T}^d$, $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et T la translation $x \to x + \Theta$. On suppose $d \geq 2$ et que Θ vérifie la condition diophantiennne*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|n\Theta\| \geq cn^{-\alpha}$$

où $c > 0$ et $\alpha \in]0,1[$. Alors il existe une fonction lipschitzienne $h : \mathbb{T}^d \to]0,\infty[$ telle que l'équation de quasi-invariance

$$T^{-1}(\mu) = h\mu$$

admette plusieurs solutions distinctes μ.

Corollaire 2 *Soit $X = \mathbb{T}^d$et $\Theta \in \mathbb{T}^d$. Si la translation $T : x \to x + \Theta$ est ergodique alors pour tout $s \in [0, d[$ il existe une fonction continue $h : X \to]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \leq s$ il existe une mesure de probabilité μ vérifiant :*
μ ne charge pas les ensembles de dimension de Hausdorff $< t$,
μ est portée par un ensemble de dimension t et
μ vérifie l'équation de quasi-invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$.

Corollaire 3 *Soit $X = \mathbb{T}^2$ et $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. Appelons T l'automorphisme de $\mathbb{T}^2$ dans lui même, de matrice A et supposons que T soit ergodique. Alors pour tout $s \in [0, 2[$ il existe une fonction continue $h : X \to]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \leq s$ il existe une mesure de probabilité μ vérifiant :*
μ ne charge pas les ensembles de dimension de Hausdorff $< t$,
μ est portée par un ensemble de dimension t et
μ vérifie l'équation de quasi-invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$.

1.1 Notations

1. Soit (X, d) un espace métrique A une partie de X et $r \geq 0$. Nous noterons

$$(A)_r = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}.$$

2. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Nous noterons

$$e(A) = \sup\{d(x, A) : x \in X\}.$$

3. Soit (X, d) un espace métrique et $s \geq 0$. $\mathcal{H}^s(A)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension s d'une partie A de X.
4. Soit G un groupe et g un élément de G. $\langle g \rangle$ désigne le sous-groupe engendré par g.
5. $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ sont identifiés et $\mathbf{p}$:$\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ désigne la projection canonique, $\mathbf{p}(x) = x + \mathbb{Z}^d$.

2 Preuve du théorème 1

2.1 Construction de mesures quasi-invariantes

Le principe pour démontrer les théorèmes 1 et 2 réside dans la proposition suivante qui se trouve dans [5] et [2] pour les mesures atomiques. La démonstration de cette proposition n'est qu'une vérification purement algébrique.

Proposition 1 *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable, $T : X \to X$ une bijection bimesurable et K est un élément de $\mathcal{T}$ dont les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Si $h : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable strictement positive telle que la fonction*

$$\sum_{N\geq 0} \Pi_{j=0}^{N} h \circ T^j + \sum_{N\geq 1} \frac{1}{\Pi_{j=1}^{N} h \circ T^{-j}}$$

soit bornée sur K alors pour toute mesure ν de masse finie portée par K, il existe une mesure μ de masse finie qui coïncide avec ν sur K, telle que

$$T^{-1}(\mu) = h\mu.$$

Preuve de la proposition.

Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable strictement positive. Si ν est une mesure positive sur X alors la mesure définie par

$$\mu(g) = \sum_{N\geq 1} \nu((\Pi_{j=0}^{N-1} h \circ T^j) g \circ T^N) + \nu(g) + \sum_{N\geq 1} \nu(\frac{1}{\Pi_{j=1}^{N} h \circ T^{-j}} g \circ T^{-N})$$

pour g mesurable positive, vérifie l'équation de quasi-invariance $T^{-1}(\mu) = h\mu$. La mesure μ est de masse totale finie si

$$\mu(1) = \sum_{N\geq 1} \nu(\Pi_{j=0}^{N-1} h \circ T^j) + \nu(1) + \sum_{j\geq 1} \nu(\frac{1}{\Pi_{j=1}^{N} h \circ T^{-j}}) < +\infty.$$

Or ν est de masse finie et la fonction $\sum_{N\geq 0} \Pi_{j=0}^{N} h \circ T^j + \sum_{N\geq 0} \frac{1}{\Pi_{j=0}^{N} h\circ T^{-j}}$ est bornée sur K donc

$$\sum_{N\geq 1} \Pi_{j=0}^{N-1} h \circ T^j + 1 + \sum_{N\geq 1} \frac{1}{\Pi_{j=1}^{N} h \circ T^{-j}}$$

appartient à $\mathcal{L}^1(\nu)$ et μ est de masse finie. ■

Nous utiliserons la proposition pour démontrer les théorèmes 1 et 2. En Posant $H = \ln h$ la condition de la proposition devient

$$(1) \qquad \sum_{N\geq 0} \exp \sum_{j=0}^{N} H \circ T^j \text{ et } \sum_{N\geq 1} \exp(-\sum_{j=1}^{N} H \circ T^{-j}) \text{ bornées sur } K.$$

Si la fonction H est bornée, on peut faire démarrer toutes les sommes à $N = 0$ et $j = 0$.

2.2 Construction de la fonction $H = \ln h$

Soit (X, d) un espace métrique, T un homéomorphisme et K un compact de X. On suppose que tous les itérés $T^n(K)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Notre but est de construire une fonction H vérifiant (1) sur K.
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers > 0. Pour chaque n posons

$$d_n = \inf\{d(T^k(K), T^l(K)) : -2p_n \leq k < l \leq 2p_n\}.$$

Pour $r \geq 0$, désignons par K_r l'ensemble des points de X dont la distance à K est inférieure ou égale à r.
Comme K est compact et que T est un homéomorphisme il existe $t_n > 0$ tel que

$$T^k(K_{t_n}) \subset (T^k(K))_{\frac{1}{3}d_n}$$

pour tous les k de l'intervalle $\{-2p_n, ..., 2p_n\}$. Notons que $t_n \leq \frac{1}{3}d_n$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série convergente à termes positifs.
Pour chaque n fixons une fonction positive continue $f_n : X \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f_n(x) &= a_n \text{ pour tout } x \text{ de } K, \\ \|f_n\|_\infty &= a_n \text{ et } \operatorname{supp} f_n \subset K_{t_{n+1}}. \end{aligned}$$

Finalement on pose

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} (f_n \circ T^k - f_n \circ T^{-k}), \\ H &= \sum_{n\geq 1} F_n. \end{aligned}$$

Pour k tel que $|k| \in \{p_{n-1}+1, ..., p_n\}$ nous avons

$$\operatorname{supp}(f_n \circ T^k) = T^{-k}(\operatorname{supp} f_n) \subset T^{-k}(K_{t_{n+1}}) \subset (T^{-k}(K))_{\frac{1}{3}d_n}$$

donc les fonctions $f_n \circ T^k$ ont des supports deux à deux disjoints, et par conséquent $\|F_n\|_\infty = a_n$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge la fonction H est continue bornée. Nous allons maintenant estimer les sommes $S_N(x_0) = \sum_{j=0}^N H \circ T^j(x_0)$ et $S_{-N}(x_0) = \sum_{j=0}^N H \circ T^{-j}(x_0)$ pour $N \in \mathbb{N}$ et x_0 quelconque dans K.
Il existe un entier n tel que $N \in]p_n, p_{n+1}]$. Estimons successivement chacune des sommes

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N F_m \circ T^j(x_0) \text{ pour } m &> n+1, \\ & \sum_{j=0}^N F_n \circ T^j(x_0),\ \sum_{j=0}^N F_{n+1} \circ T^j(x_0) \text{ et} \\ \sum_{j=0}^N F_m \circ T^j(x_0) \text{ pour } 1 &\leq m < n. \end{aligned}$$

1. Soit $m > n+1$. Si $0 \leq j \leq N \leq p_{n+1}$ et si $p_{m-1} < k \leq p_m$ alors $j < k$ et $|j \pm k| \leq 2p_m$; par conséquent la distance du point $T^{j\pm k}(x_0)$ à K est supérieures à d_m. Or $d_m > t_{m+1}$ donc $f_m \circ T^{j\pm k}(x_0) = 0$ et

$$F_m \circ T^j(x_0) = \sum_{k=p_{m-1}+1}^{p_m} (f_m \circ T^{j+k}(x_0) - f_m \circ T^{j-k}(x_0)) = 0.$$

2. Si $0 \leq j \leq N$ et $p_{n-1} < k \leq p_n$ alors $|j \pm k| \leq p_n + N \leq 2p_{n+1}$, par conséquent

$$d(T^{j\pm k}(x_0), K) \geq d_{n+1} \text{ si } j \pm k \neq 0,$$

ainsi,

$$\forall j \in \{0, ..., N\},\ \forall k \in \{p_{n-1}+1, ...p_n\},\ j \pm k \neq 0 \Rightarrow f_n \circ T^{j\pm k}(x_0) = 0.$$

Comme $N > p_n$ pour chaque $k \in \{p_{n-1}+1, ..., p_n\}$ il existe exactement un $j \in \{0, ..., N\}$ tel que $j - k = 0$ donc

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} (f_n \circ T^{j+k}(x_0) - f_n \circ T^{j-k}(x_0)) = -(p_n - p_{n-1})a_n$$

et

$$\sum_{j=0}^{N} F_n \circ T^j(x_0) = -(p_n - p_{n-1})a_n.$$

Notons que l'hypothèse supp $f_n \subset K_{t_{n+1}}$ a été utile dans le calcul précédent.
3. De la même manière on montre que

$$\sum_{j=0}^{N} F_{n+1} \circ T^j(x_0) = -(N - p_n)a_n.$$

4. Soit $m \leq n-1$. Majorons la somme $\sum_{j=0}^{n} F_m \circ T^j(x_0)$. Pour chaque $k \in \{p_{m-1}+1, ..., p_m\}$, on a

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j=0}^{N} (f_m \circ T^{k+j}(x_0) - f_m \circ T^{-k+j}(x_0)) \\ &= \sum_{j=k}^{N+k} f_m \circ T^j(x_0) - \sum_{j=-k}^{N-k} f_m \circ T^j(x_0) \\ &\leq \sum_{j=N-k+1}^{N+k} f_m \circ T^j(x_0). \end{aligned}$$

On a une majoration grossière suffisante pour le théorème 2,

$$A_k \leq 2ka_m \leq 2p_m a_m.$$

On en déduit
$$\sum_{j=0}^{N} F_m \circ T^j(x_0) \leq 2p_m^2 a_m.$$
Dans le cas où T est une isométrie et K un ensemble fini on peut améliorer l'inégalité précédente :
si i et $j \in \{N-k+1, ..., N+k\}$ on a $|i-j| \leq 2k \leq 2p_m$ et comme T est une isométrie
$$d(T^j(x_0), T^i(x_0)) = d(x_0, T^{|i-j|}(x_0)) \geq d_m.$$
Par conséquent le nombre de $j \in \{N-k+1, ..., N+k\}$ tel que $T^j(x_0) \in \operatorname{supp} f_m$ est au plus $\operatorname{card} K$. Cela donne les majorations plus fines
$$A_k \leq a_m \operatorname{card} K \text{ et } \sum_{j=0}^{n} F_m \circ T^j(x_0) \leq 2p_m a_m \operatorname{card} K.$$

Finalement on obtient les majorations suivantes
$$(1) \qquad S_N \leq \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m^2 a_m - (p_n - p_{n-1})a_n - (N - p_n)a_{n+1}$$
et si T est une isométrie et K fini
$$(2) \qquad S_N \leq \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m a_m \operatorname{card} K - (p_n - p_{n-1})a_n - (N - p_n)a_{n+1}.$$

Le même raisonnement donne les minorations suivantes de S_{-N}
$$S_{-N} \geq - \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m^2 a_m + (p_n - p_{n-1})a_n + (N - p_n)a_{n+1}$$
et si T est une isométrie et K fini
$$S_{-N} \geq - \sum_{m=1}^{n-1} 2p_m a_m \operatorname{card} K + (p_n - p_{n-1})a_n + (N - p_n)a_{n+1}.$$

2.3 Fin de la preuve du théorème 2

Pour achever la démonstration du théorème 1 il suffit de vérifier (1), pour cela il nous reste à choisir les suites (p_n) et (a_n) de tel sorte que les fonctions
$$\sum_{N=0}^{\infty} \exp(S_N(x_0)) \text{ et } \sum_{N=0}^{\infty} \exp(-S_{-N}(x_0))$$
soient bornées sur K.
Prenons $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et p_n vérifiant $p_n \geq 32p_{n-1}^2$ $(p_0 = 1)$. Pour tout $n \geq 1$ on a
$$p_n \geq 32p_{n-1}^2 \frac{1}{4} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

d'où

$$p_n a_n \geq 8p_{n-1}^2 a_{n-1} \text{ et } p_n^2 a_n \geq 8p_{n-1}^2 a_{n-1}.$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m^2 a_m \leq 2p_{n-1}^2 a_{n-1}$$

d'où

$$\sum_{m=1}^{n-1} p_m^2 a_m \leq \frac{1}{8} p_n a_n,$$

et pour $N \in \{p_n + 1, ..., p_{n+1}\}$ on a d'après (1)

$$\begin{aligned} S_N &\leq \frac{1}{2} p_n a_n - (p_n - p_{n-1}) a_n - (N - p_n) a_{n+1} \\ &\leq -\frac{1}{4} p_n a_n - (N - p_n) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(S_N) &\leq \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n) \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(-a_{n+1}(N - p_{n+1})) \\ &\leq \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n) \frac{1}{1 - \exp(-a_{n+1})} \\ &\ll (n+1)^2 \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n), \end{aligned}$$

la condition de croissance de la suite (p_n) assure que la série de terme général $(n+1)^2 \exp(-\frac{1}{4} p_n a_n)$ converge. La série $\sum_{N=0}^{\infty} \exp(S_N)$ converge donc. Le même calcul montre que la série $\sum_{N=0}^{\infty} \exp(-S_{-N})$ converge. ■

3 Preuve du théorème 2

Lorsque nous avons construit la fonction H à la section 2 notre seul objectif de régularité était la continuité. Nous devons maintenant avec les hypothèses supplémentaires du théorème 2, construire une fonction H lipschitzienne; la construction de cette nouvelle fonction H est identique à l'estimation près des normes de Lipschitz des fonctions f_n. La fin de la démonstration du théorème 2 est également parallèle à celle du théorème 1, l'inégalité (2) remplaçant l'inégalité (1).
Choisissons la suite (p_n) de la forme $p_n = A^n$ où A est un entier ≥ 2 et la suite (a_n) de la forme $a_n = \lambda^{-n}$ où $\lambda \in]1, A[$. A et λ seront précisés ultérieurement. Par hypothèse $d(K, T^n(K)) \geq cn^{-\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc comme T est une isométrie nous avons

$$\begin{aligned} d_n &= \inf\{d(T^k(K), T^l(K)) : -2p_n \leq k < l \leq 2p_n\} \\ &= \inf\{d(T^k(K), K) : 0 < k \leq 4p_n\} \geq c(4A^n)^{-\alpha} \end{aligned}$$

et

$$t_n = \frac{1}{3} d_{n+1} \geq c A^{-\alpha n}$$

avec une nouvelle constante $c > 0$. Définissons maintenant les fonctions f_n :

$$f_n(x) = \max(a_n \frac{t_n - d(x,K)}{t_n}, 0).$$

Le support de f_n est K_{t_n} donc les fonctions $f_n \circ T^k$, $|k| \in \{p_{n-1}+1, ..., p_n\}$ ont des supports deux à deux disjoints et comme la fonction f_n est lipschitzienne de rapport $\frac{a_n}{t_n}$, la fonction F_n est lipschitzienne de rapport $k_n = \frac{a_n}{t_n}$. D'autre part on a comme au paragraphe 3 $\|F_n\|_\infty = a_n$. La fonction H est donc lipschitzienne si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{t_n}$ converge. Comme $\frac{a_n}{t_n} \leq \frac{1}{c} \lambda^{-n} A^{\alpha n}$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{t_n}$ converge si on choisit $\lambda > A^{\alpha \cdot}$.

Pour finir la démonstration on utilise l'inégalité (2) qui est valable car T est une isométrie : $N \in \{p_n + 1, ..., p_{n+1}\}$

$$S_N(x_0) \text{ et } -S_{-N}(x_0) \leq 2 \operatorname{card} K \sum_{m=1}^{n-1} p_m a_m - (p_n - p_{n-1}) a_n - (N - p_n) a_{n+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} S_N(x_0) &\leq 2 \operatorname{card} K \sum_{m=1}^{n-1} A^m \lambda^{-m} - A^{n-1}(A-1)\lambda^{-n} - (N - A^n)\lambda^{-n-1} \\ &\leq (2 \operatorname{card} K \frac{A/\lambda}{A/\lambda - 1} + \frac{1-A}{\lambda})(A/\lambda)^{n-1} - (N - A^n)\lambda^{-n-1}. \end{aligned}$$

Fixons $\beta \in]\alpha, 1[$ et choisissons $\lambda = A^{\beta \cdot}$. On a bien $\lambda > A^{\alpha \cdot}$ et

$$C = -2 \operatorname{card} K \frac{A/\lambda}{A/\lambda - 1} + \frac{A-1}{\lambda} = -4 \frac{A^{1-\beta}}{A^{1-\beta} - 1} + \frac{A-1}{A^{\beta \cdot}} > 0$$

dès que A est assez grand. Pour un tel A on a

$$S_N(x_0) \text{ et } -S_{-N}(x_0) \leq -C A^{(1-\beta)(n-1)} - (N - A^n) A^{-\beta(n+1)},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(S_N(x_0)) &\leq \exp(-C A^{(1-\beta)(n-1)}) \sum_{N=p_n+1}^{p_{n+1}} \exp(-(N - A^n) A^{-\beta(n+1)}) \\ &\leq \exp(-C A^{(1-\beta)(n-1)}) \frac{1}{1 - \exp(-A^{\beta(n+1)})} \\ &\ll \exp(-C A^{(1-\beta)(n-1)}) \end{aligned}$$

et les séries $\sum_{N\geq 1} \exp S_N(x_0)$ et $\sum_{N\geq 1} \exp(-S_{-N}(x_0))$ sont majorées sur K. ■

4 Preuve du corollaire 1

Soit $\Theta \in \mathbb{T}^d$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|n\Theta\| \geq cn^{-a}$$
où $c > 0$ et $\alpha \in]0,1[$. Considérons le compact $K = \{0, \Theta' = \mathbf{p}(\frac{1}{2}\theta)\}$ et T la translation $x \to x + \Theta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|T^n(\Theta')\| &= \|\Theta' + n\Theta\| = \inf_{P\in\mathbb{Z}^d} N((n+\frac{1}{2})\theta - P) \\
&= \frac{1}{2}\inf_{P\in\mathbb{Z}^d} N((2n+1)\theta - 2P) \geq \frac{c}{2}(2n+1)^{-\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|T^n(0) - \Theta'\| &= \|n\Theta - \Theta'\| = \inf_{P\in\mathbb{Z}^d} N((n-\frac{1}{2})\theta - P) \\
&= \frac{1}{2}\inf_{P\in\mathbb{Z}^d} N((2n-1)\theta - 2P) \geq \frac{c}{2}(2n-1)^{-\alpha},
\end{aligned}$$

l'hypothèse $d(T^n(K), K) \geq cn^{-\alpha}$ est donc vérifiées et le théorème 2 s'applique.

5 Preuve du corollaire 2

L'existence de partie assez grosse du tore $\mathbb{T}^1$ dont les itérés par la rotation $T : x \in \mathbb{T}^1 \to x + \Theta \in \mathbb{T}^1$ sont deux à deux disjointes, s'obtient à l'aide de résultats classiques d'analyse harmonique (cf. [8]) :
Un sous ensemble K du tore $\mathbb{T}^1$ est un ensemble de Kronecker si toute fonction continue de $\mathbb{T}^1$ dans le cercle, $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, est limite uniforme sur K de caractères.
De cette définition il résulte :
1. *Si $K \subset \mathbb{T}^1$ est de Kronecker et si $x_1, ..., x_k$ sont des éléments distincts de K alors $x_1, ..., x_k$ et 1 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.*
2. *Si $\Theta \in K$ alors les translatés $K + n\Theta$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.*
Le résultat suivant est plus difficile ([8]):
3. *Si Θ un élément irrationnel de $\mathbb{T}^1$ alors il existe un ensemble de Kronecker de dimension de Hausdorff 1 contenant Θ.*

Il est maintenant aisé de démontrer le corollaire 2.

Soit $\Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_d) \in \mathbb{T}^d$ tel que $\mathbb{N}\Theta$ soit dense et $s < d$. Il existe un ensemble de Kronecker K, de dimension 1 et contenant Θ_1. Comme $\mathcal{H}^{s-d+1}(K) = \infty$ il existe un compact K' inclus dans K tel que $0 < \mathcal{H}^{s-d+1}(K') < \infty$ (cf. [6] p.62). Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1 au compact $K' \times \mathbb{T}^{d-1}$ dont la dimension de Hausdorff est supérieure à $s - d + 1 - (d-1) = s$ (cf. [6] chapter 7).

6 Preuve du corollaire 3

Lemme 1 *Soit K une ensemble de Kronecker de $\mathbb{T}^1$ et A un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ dont l'action T sur $\mathbb{T}^2$ est ergodique. Alors les ensembles $T^n(K \times K)$, $n \in \mathbb{Z}$,* *sont deux à deux disjoints.*

Démonstration. Supposons que $K \times K$ rencontre $T^n(K \times K)$ pour un certain $n > 1$. Comme A est ergodique la matrice de A^n n'admet pas 1 pour valeur propre

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(cf.[10] p. 31), tous les points fixes de T^n dans $\mathbb{T}^2$ sont donc des points à coordonnées rationnelles.
Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2) \in K \times K$ tels que $T^n X = Y$. Il existe des entiers k_1 et k_2 tels que

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 + k_1 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 + k_2 \end{cases}.$$

Comme des éléments distincts d'un ensemble de Kronecker et 1 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on déduit des deux équations précédentes que

$$(y_1 = x_1 \text{ ou } y_1 = x_2) \text{ et } (y_2 = x_1 \text{ ou } y_2 = x_2).$$

Considérons les quatre cas possibles.
Si $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$ alors $a = d = 1$, $b = c = 0$ et T n'est pas ergodique.
Si $y_1 = x_2$ et $y_2 = x_1$ alors $a = d = 0$, $b = c = 1$ et T n'est pas ergodique.
Dans les deux autres cas utilisons la matrice inverse, nous obtenons les relations à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x_1 = a'y_1 + b'y_2 + l_1 \\ x_2 = c'y_1 + d'y_2 + l_2 \end{cases}.$$

Si $y_1 = y_2 = x_1$ alors la deuxième équation du dernier système donne $x_2 = y_1 = y_2$ et par conséquent $X = Y$ est un point fixe de T^n. De même si $y_1 = y_2 = x_2$ alors X est point fixe de T^n. Comme K est de Kronecker les coordonnées de X ne sont pas rationnelles ce qui contredit l'ergodicité de T. ■

La fin de la démonstration du corollaire 3 est identique à celle du corollaire 2 en remplaçant $K' \times \mathbb{T}^{d-1}$ par $K' \times K'$.

Références

[1] : L. Babai, On Lovász Lattice Réduction and The Nearest Lattice Point Problem, Combinatorica, **6**, 1-13 (1986).
[2] : J. Bremont, Comportement des sommes ergodiques pour les rotations et des fonctions peut régulière, Publications des Séminaires de Rennes (1999).
[3] : N. Chevallier, Géométrie des suites de Kronecker, Manuscripta mathematica, 94, p. 231-241 (1997).
[4] : N. Chevallier, M. Weber, Ensemble de divergence des moyennes de Cesaro,de certaines fonctions de $\mathcal{S}^1$, C.R.A.S., t. 320, Serie I, p.153-158 (1995).
[5] : J.P. Conze, Y. Guivarc'h, Marche en milieu aléatoire et mesure quasi-invariantes pour un système dynamique, Volume spécial de Colloquium Mathematicum, à la mémoire d'Anzelm Iwanick, Professeur à l'Université de Technologie de Wroclaw (2000).

[6] : K. Falconer, Fractal Geometry, John Whiley & Sons, Chichester, 1990.
[7] : H. Federer, Geometric measure theory, Classics in Mathemetics, Springer-Verlag ,xvi (1996).
[8] J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Ergebnisse 50, Springer 1970.
[9] W. de Melo, S. van Strien : One dimensional dynamics, Ergebisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bande 25 (1993) Springer-Verlag.
[10] : P. Walters, An Introduction to ergodic Theory, Springer-Verlag, New-York, 1982