Action de $GL_2(Z)$ sur le tore et graphes expansifs.

Guido AHUMADA BUSTAMANTE.

21/02/99

Abstract

Soit S un système fini d' automorphismes du tore T^2 et Γ le groupe engendré par S. On étudie la relation entre l'asymptotique des orbites de Γ dans le tore et la norme de l'opérateur d'adjacence du graphe de Cayley associé à Γ et à S. Cette étude permet d'établir des résultats quantitatifs sur la vitesse de convergence de certaines moyennes attachées à S. On donne aussi une application à la construction de familles des graphes finis expansifs.

0.1 Introduction

Soit S un système symétrique et fini de générateurs d'un groupe de type fini Γ. Etant donné une représentation unitaire (H, π) de Γ, l'opérateur caractéristique associé à S et à la représentation π est défini par: $M_\pi(v) = \sum_{s \in S} \pi(s)v$. C'est un opérateur autoadjoint dans H, borné par le cardinal de S.

Lorsque (H, π) est la représentation régulière à gauche du groupe Γ, M_π est l'opérateur d'adjacence du graphe de Cayley du groupe Γ par rapport à S. Dans ce cas Kesten, voir [C.V.1], établit des relations remarquables entre la nature du groupe Γ et la norme de l'opérateur M_π.

Lorsque Γ opère ergodiquement, en préservant la mesure sur un espace probabilisé (T, dx), on a une représentation unitaire de Γ dans $L^2(T, dx)$. Cette représentation contient la représentation triviale de Γ avec multiplicité 1. Notons H le sous espace stable de $L^2(T, dx)$ formé par les fonctions de moyenne nulle et (H,π) la sous représentation de $L^2(T,dx)$ correspondante. Avec ces notations, la norme r de l'opérateur M_π fournit des renseignements quantitatifs sur l'asymptotique des orbites de Γ dans T lorsque r est plus petit que le cardinal de S. Par exemple, les auteurs de [L.P.S] explicitent un sous ensemble fini, noté S, du groupe des rotations $SO(3)$ tel que le groupe Γ engendré par S est libre et opère ergodiquement sur la sphère. La propriété remarquable de leur construction est que la norme de M_π est égale à la norme de l'opérateur d' adjacence du graphe de Cayley du groupe Γ par rapport à S. Ils en déduisent des résultats de convergence en norme L^2 et ponctuelles sur la vitesse de remplissage de la sphère par les orbites de Γ.

Dans ce travail nous considérons un sous-groupe Γ de type fini du groupe $GL_2(\mathbf{Z})$ des automorphismes du tore $\mathbf{T}=\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Nous obtenons dans ce cas que la norme r de M_π, est égale à la norme de M_X, l'opérateur d'adjacence du graphe de Cayley de Γ par rapport à S (*théorème 17 et corollaire 18*). Cette dernière norme dépend seulement de la structure de Γ et de S. Par contre dans le cas de la sphère, c'est seulement pour des ensembles S très particuliers que l'on a $\|M_\pi\|=\|M_X\|$, et la démonstration de cet égalite est difficile, voir [C.V.1.].

Une application de ce résultat (*théorème 19*) nous donne des renseignements, en norme L^2 et ponctuelles, sur l'asymptotique des orbites de Γ dans $\mathbf{T}$.

Une autre application est la construction des familles de graphes expansifs (*théorèmes 22 et 24*) qui donne une réponse partielle au problème de base sur les graphes expansifs de [V]. On explicite des familles de graphes expansifs qui ne sont pas de Ramanujan, mais qui sont faciles à construire. Cette construction est inspirée d'un exemple d'extenseur construit par Z.Gabber et A. Galil, [G.G] et d'une note de I.Colin de Verdière à ce sujet, [C V 2].

Dans la première partie nous établissons quelques résultats préliminaires sur les représentations naturelles, qui aboutissent aux corollaires 12) et 14) concernant la norme des opérateurs M_X. Ensuite nous donnons des applications pour les sous-groupes de type fini de $GL_2(\mathbf{Z})$ (Propositions 17 ; 19 ; 22 et 25).

0.2 Notations et généralites

Soit Γ un groupe de *type fini*, c'est à dire possédant une partie génératrice finie. On fixe un système de générateurs fini S_+ de Γ. On considère alors l'ensemble symétrique $S = S_+ \cup (S_+)^{-1}$. Remarquons que si S_+ possède des involutions alors $S_+ \cap (S_+)^{-1} \neq \phi$. Dans tous les cas on a $S^{-1} = S$. Pour chaque $\gamma \in \Gamma$ on note $|\gamma|_S$ la longueur minimale d'un mot, formé avec les éléments de S, représentant γ, et si $\gamma = e$ on pose $|\gamma|_S = 0$.

Soit (H, π) une représentation unitaire du groupe Γ. L'opérateur caractéristique de la représentation π et du système S, que nous allons noter $M_\pi = M(S, \pi)$, est défini pour tout w dans H par

$$M_\pi(w) = \sum_{s \in S} \pi(s)w.$$

Il est clair que M_π est un opérateur autoadjoint, défini sur H, et de norme majorée par le cardinal de S. Dans le cas où π est la représentation régulière gauche du groupe Γ, l'opérateur M_π est exactement l'opérateur caractéristique du graphe de Cayley $X = (\Gamma, S)$ du groupe Γ par rapport à S. Plus généralement si Λ est un sous-groupe de Γ notons $Y = \Gamma/\Lambda$ l'ensemble des classes résiduelles à droite du sous-groupe Λ dans Γ. Le groupe Γ opère transitivement sur Y par multiplication à gauche. Soit π la représentation naturelle de Γ associée à cette opération. L'opérateur M_π de cette représentation sera noté M_Y. Explicitement l'opérateur M_Y est défini par :

$$M_Y(F)(x\Lambda) = \sum_{s \in S} F(sx\Lambda), \forall x \in \Gamma, \forall F \in \ell^2(Y).$$

Ici $\ell^2(Y)$ désigne l' espace de Hilbert formé par les fonctions F définies sur Y, à valeurs complexes, telles que la série $\sum_{y \in Y} |F(y)|^2$ soit convergente.

On peut interpréter ces opérateurs comme matrices d'adjacence de graphes. En effet, la structure de graphe sur Y, correspondant à l'opérateur M_Y, est donnée de la façon suivante : chaque élément $y = x\Lambda$ dans Y et chaque $s \in S$ définissent une arête *géométrique* qui est adjacente aux sommets $y = x\Lambda$ et $sy = sx\Lambda$. Le nombre des arêtes géométriques adjacentes à un sommet donné est donc égal au cardinal de S. Ce graphe est connexe car S engendre le groupe Γ.

Dans le cas où Λ est le sous-groupe trivial de Γ, le graphe correspondant n'est autre que le graphe de Cayley $X = (\Gamma, S)$ du groupe Γ par rapport au système générateur S.

Pour un ensemble fini A on notera $\#A$ où $|A|$ le cardinal de A. Aussi on notera $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}$ les ensemble de nombres naturels, de nombres entiers et réels respectivement.

0.3 Fontion de croissance d'un sous-groupe par rapport à S

Soit Λ un sous-groupe de Γ. La fonction de croissance relative au système générateur S du sous-groupe Λ, notée $c(\Lambda, S, n)$, est définie par $c(\Lambda, S, n) = \#\{\nu \in \Lambda / \, |\nu|_S \leq n\}, n \in \mathbf{N}$. On pose

$$c(\Lambda, S) := \overline{\lim_n} c(\Lambda, S, n)^{1/n}.$$

Il est clair que $1 \leq c(\Lambda, S)$ et que pour Λ fini on a $c(\Lambda, S) = 1$. Notons que dans [G.K.] la notion de croissance relative, avec Γ un groupe libre et Λ un sous-groupe distingué, est utilisée pour étudier la moyennabilité du groupe quotient Γ/Λ. Nous allons nous intéresser à une situation différente où, en général, Γ n'est pas un groupe libre et Λ n'est pas un sous-groupe distingué de Γ.

On établit maintenant quelques propriétés générales de la fonction $c(\Lambda, S, n)$. On en déduira que, dans le cas particulier où Γ est un groupe de type fini et Λ est maigre (voir définition 2) la norme de M_Y est égale à la norme de M_X. Ensuite on appliquera ce résultat à $\Gamma = GL_2(\mathbf{Z})$.

Lemme 1 *a) Si le sous-groupe* Λ *est tel que* $c(\Lambda, S) = 1$ *alors* $c(\Lambda, S') = 1$ *pour n'importe quel autre système générateur fini* S' *du groupe* Γ.
b) Soit A *un sous-groupe fini de* Γ.
Pour λ *dans* Γ *posons* $[\lambda A] := Minimum\{|\lambda \times a|_S : a \in A\}$. *Alors* $c(\Lambda, S) \leq \overline{\lim_n}(\#\{\lambda A \in \Gamma/A : \lambda \in \Lambda, [\lambda A] \leq n\})^{1/n}$. *En particulier si* $\Gamma/A = \Gamma'$ *est un groupe alors* $c(\Lambda, S) \leq c(\Lambda/A, S/A)$.

Proof. a) Soit $K = Maximum\{\|s\|_{S'} : s \in S\}$ et $L = Maximum\{\|s'\|_S : s' \in S'\}$. Alors $\forall x \in \Gamma, 1/L \times \|x\|_S \leq \|x\|_{S'} \leq K \times \|x\|_S$. On en déduit que $\#\{x : \|x\|_S \leq n/K\} \leq \#\{x : \|x\|_{S'} \leq n\} \leq \#\{x : \|x\|_S \leq n \times L\}$. Par passage à la limite on obtient $c(\Lambda, S)^{1/K} \leq c(\Lambda, S') \leq c(\Lambda, S)^L$. Or ceci combiné avec le fait que $c(S, \Lambda) = 1$ entraîne $c(S', \Lambda) = 1$.

b) On a $[\lambda A] \leq |\lambda|_S$ et donc $\{\lambda \in \Lambda : |\lambda|_S \leq n\} \subset \{\lambda \in \Lambda : [\lambda A] \leq n\}$. On en déduit
$\#\{\lambda \in \Lambda : |\lambda|_S \leq n\} \leq \#\{\lambda A \in \Gamma/A : \lambda \in \Lambda, [\lambda A] \leq n\} \times \#A$ d'où la majoration de $c(\Lambda, S)$. Dans le cas où $\Gamma/A = \Gamma'$ est un groupe on sait que $S' = S/A = \{sA : s \in S\}$ est un système générateur de Γ' et $\forall \lambda \in \Gamma, |\lambda A|_{S'} \leq |\lambda|_S$. Donc $\{\lambda \in \Lambda : |\lambda|_S \leq n\} \subset \{\lambda \in \Lambda : |\lambda A|_{S'} \leq n\}$ et

$\#\{\lambda \in \Lambda : |\lambda|_S \leq n\} \leq \#\{\lambda A \in \Gamma/A : \lambda \in \Lambda, |\lambda A|_{S'} \leq n\} \times \#A$. Par passage à la limite on obtient que $c(\Lambda, S) \leq c(\Lambda/A, S/A)$ d' où la dernière remarque. ■

Définition 2 *Nous dirons que le sous-groupe* Λ *est maigre dans* Γ *si* $c(\Lambda, S) = 1$.

D'après le lemme 1 cette notion *ne dépend pas du système générateur de* Γ *choisi.*

Corollaire 3 *Soit* A *un groupe fini et* Γ *une extension de* A *par* $\Gamma^{\tilde{}}$. *Soit* Λ *un sous-groupe de* Γ *tel que sa projection* $\Lambda^{\tilde{}}$ *sur* $\Gamma^{\tilde{}}$ *soit un sous-groupe maigre de* $\Gamma^{\tilde{}}$. *Alors* Λ *est un sous-groupe maigre de* Γ.

Proof. Les hypothèses signifient qu' il existe une suite exacte de groupes $1 \to A \to \Gamma \to \Gamma^{\tilde{}} \to 1$. La projection, notée $\Lambda^{\tilde{}}$, du sous-groupe Λ de Γ sur $\Gamma^{\tilde{}}$ vérifie $c(\Lambda^{\tilde{}}, S^{\tilde{}}) = 1$ pour chaque système fini de générateurs du groupe $\Gamma^{\tilde{}}$. Aussi on peut appliquer le lemme 1, car A est fini, pour obtenir $c(\Lambda, S) \leq c(\Lambda/A, S/A) = c(\Lambda^{\tilde{}}, S^{\tilde{}}) = 1$. ■

Lemme 4 *Soit* $\Gamma = \Gamma_1 \lhd W$ *le produit semi-direct d'un sous-groupe distingué* Γ_1 *de type fini avec un sous-groupe fini* W. *Soit* Λ *un sous-groupe de* Γ *alors* Λ *est maigre dans* Γ *si et seulement si* $\Lambda \cap \Gamma_1 = \Lambda_1$ *est maigre dans* Γ_1.

Proof. Soit S_1, un système générateur fini de $\Gamma_{1.}$ Quitte à ajouter les conjugués par W de S_1, on peut toujour se ramener au cas où le système générateur de Γ_1 est stable par conjugaison par W. On considère alors $S = S_1 \cup W \backslash \{1\}$. C'est un système générateur fini de Γ. Pour chaque g dans Γ il existe un unique (g_1, w) dans $\Gamma_1 \times W$ tel que $g = wg_1$. Dans ces conditions on a $|g|_S \geq |g_1|_{S_1}$. Démontrons cette assertion par récurrence sur $n = |g|_S$. Le cas $n = 1$ est une conséquence de la définition de S. Supposons que $|g|_S = n$. Il existe une suite de longueur minimale $(x_1, x_2, ...x_n)$ d'éléments de S tel que $g = wg_1 = x_1x_2......x_n$ et donc $\left|x_1^{-1}g\right|_S = \left|x_1^{-1}wg_1\right|_S = |x_2......x_n|_S = n - 1$. Si x_1 appartient à W l' hypothèse de récurrence dit que $|g_1|_{S_1} \leq n-1$. Sinon $s = w^{-1}x_1^{-1}w$ appartient à S_1 et $|wsg_1|_S \leq n - 1$, par l' hypothèse de récurrence on a $|sg_1|_{S_1} \leq n - 1$ d'où $|g_1|_{S_1} \leq n$ et notre assertion est démontrée. On en déduit maintenant que $|\{\lambda \in \Lambda : |\lambda|_S \leq n\}| \leq |W| \left|\{\lambda_1 \in \Lambda_1 : |\lambda_1|_{S_1} \leq n\}\right|$. Donc si Λ_1 est maigre dans Γ_1 alors Λ est maigre dans Γ. La réciproque est immédiate. ■

Lemme 5 *Soit Ω un système de générateurs fini du sous-groupe Λ. Notons $|\nu|_\Omega$ la longueur de ν dans Λ relative au système générateur Ω et $B_\Lambda(n) = \{\nu \in \Lambda : |\nu|_\Omega \leq n\}, n \in \mathbf{N}$, la boule de centre 1 et rayon n dans Λ.*
S'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall \nu \in \Lambda, k\,|\nu|_\Omega \leq |\nu|_S$$

alors $1 \leq \alpha(S,\Lambda) \leq (\overline{\lim}_n(\#B_\Lambda(n))^{1/n})^{1/k}$.

Proof. Par hypothèse $B(n) = \{\nu \in \Lambda : |\nu|_S \leq n\} \subset \{\nu \in \Lambda : |\nu|_\Omega \leq n/k\}$, c'est à dire $c(\Lambda, S, n)^{1/n} = (\#\{\nu \in \Lambda / \, \|\nu\|_S \leq n\})^{1/n} \leq (\#B_\Lambda(n/k))^{1/n}$, d'où, par passage à la limite supérieure, on obtient le lemme. ■

Corollaire 6 *Si le sous-groupe Λ est tel que $1 = \overline{\lim}_n(\#B_\Lambda(n))^{1/n}$ et s'il existe $k > 0$ tel que $\forall \nu \in \Lambda, k\,|\nu|_\Omega \leq |\nu|_S$ alors Λ est un sous-groupe maigre de Γ.* ■

Remarque 7 *Il est connu que les groupes de type fini, qui contiennent un sous-groupe nilpotent d'indice fini sont à croissance polynômiale, cf [G.K.]. En particulier pour ces groupes on a $1 = \overline{\lim}_n(\#B_\Lambda(n))^{1/n}$. Mais la condition du lemme est très forte: elle signifie que* la métrique induite par S sur le sous-groupe Λ est équivalente à la métrique déterminée sur Λ par le système générateur Ω. *Un exemple intéressant où cette condition n'est pas vérifiée est donné par le groupe affine diadique: $\Gamma = \{\begin{pmatrix} 1 & n/2^j \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}\}, S_+ = \{a, b\}$ où $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère le sous groupe cyclique $\Lambda = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z}\}$ et $\Omega_+ = \{a\}$. La relation $b^j a b^{-j} = a^{2^j}$ pour tout j entier montre que $\left|a^{2^j}\right|_S \leq 2j+1$, or $\left|a^{2^j}\right|_\Omega = 2^j$ donc ici la condition du lemme ne peut pas être vérifiée.*
En fait on a dans ce cas que $\forall n \in \mathbf{N}, c(\Lambda, S, 3n) \geq 2^n$ et donc $c(\Lambda, S) \geq 2^{1/3}$. En effet soit $0 \leq m < 2^n$ et $m = a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \cdots + a_k 2^k$ l'expansion diadique de l'entier m. Alors

$$a^m = a^{a_0} b^{-1} a^{a_1} b^{-1} a^{a_2} \cdots\cdots b^{-1} a^{a_k} b^k$$

par conséquent $|a^m|_S \leq 3n$. En particulier le groupe cyclique Λ n'est pas maigre dans Γ.

Lemme 8 *Soit $\Gamma\tilde{} = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \cdots\cdot * \Gamma_r$ un produit libre des groupes $\Gamma_j, 1 \leq j \leq r$, $r \in \mathbf{N}$. Notons S_j un système générateur fini du sous-groupe Γ_j et $S = \cup_{j=1}^r S_j$. Soit Λ un sous-groupe cyclique de $\Gamma\tilde{}$ tel que $c(\Gamma_j \cap \Lambda, S_j) = 1$ pour $1 \leq j \leq r$. Alors $c(\Lambda, S) = 1$.*

Proof. Par hypothèse pour chaque $g \neq 1$ dans $\Gamma\tilde{}$ il existe une unique suite $(g_1, g_{2,} ...., g_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $g_i \in \cup_{s=1}^r(\Gamma_s - \{1\})$ telle que les éléments g_i et g_{i+1} pour $i \in \{1, 2...n-1\}$ n'appartiennent jamais au même facteur, et que $g = g_1 g_2 ......g_n$. La suite vide correspond à l'élément neutre, noté 1, du groupe. On définit alors la longueur de $g \neq 1$ par $l(g) = n$ et $l(1) = 0$.

On dit que l'élément $g = g_1 g_2......g_n$, $n \geq 2, g_j \in \Gamma_{i_j}$ est cycliquement réduit si g_1 et g_n n'appartiennent pas au même facteur. Dans ce cas on a $l(g^k) = k \times l(g)$, et aussi $|g|_S = \sum_{j=1}^n |g_j|_{S_{i_j}}$, grâce à l' unicité de la décomposition de g en produit de facteurs.

Soit α un générateur du groupe cyclique Λ. Si $l(\alpha) = 1$ alors Λ est contenu dans un des facteurs et il n'y a rien à démontrer. Sinon $l(\alpha) \geq 2$. On vérifie aisément, par récurrence sur n, qu'il existe un élément cycliquement réduit $u = u_1 u_2 ....u_m$ dans $\Gamma\tilde{}$ conjugué à α. Soit $\alpha = v u_1 u_2 ....u_m v^{-1}$ et notons $K = Minimum\{|u_j|_S : 1 \leq j \leq m\}$. Alors $\left|\alpha^l\right|_S \geq \left|(u_1 u_2 ...u_m)^l\right|_S \geq K \times l$ et on peut donc appliquer le corollaire 6 pour obtenir $c(\Lambda, S) = 1$. ■

Corollaire 9 *Si les groupes Γ_j sont finis ou cycliques alors chaque sous-groupe cyclique Λ du groupe $\Gamma\tilde{}$ est maigre.*

Proof. Comme les Γ_j sont finis ou cycliques et que Λ est cyclique on a $c(\Gamma_j \cap \Lambda, S_j) = 1$ pour chaque j et on peut donc appliquer le lemme précédent avec le système générateur S. ■

Corollaire 10 *Soit S_+ un sous-ensemble fini de $GL_2(\mathbf{Z})$ et Γ le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{Z})$ engendré par S_+. Soit Λ un sous-groupe de Γ tel que le groupe quotient $\Lambda\tilde{} = (\Lambda \cap SL_2(\mathbf{Z}))/\{I, -I\}$ est cyclique. Alors $c(\Lambda, S) = 1$, autrement dit Λ est un sous-groupe maigre de Γ.*

Proof. Il est connu que dans la suite exacte $1 \to \{I, -I\} \to SL_2(\mathbf{Z}) \to PSL_2(\mathbf{Z}) \to 1$, le groupe $PSL_2(\mathbf{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ cf[N]. Par ailleurs la caractérisation des sous-groupes de type fini d'un produit libre de Kurosh, dit que la projection de $\Gamma \cap SL_2(\mathbf{Z})$ sur $PSL_2(\mathbf{Z})$ est un produit libre, noté $\Gamma^{\tilde{}}$, dont les facteurs, en nombre fini, peuvent être des groupes finis (d'ordre deux ou trois) ou cycliques infinis. Donc $\Lambda^{\tilde{}}$ est maigre dans $\Gamma^{\tilde{}}$ par le lemme 8. Aussi on obtient que $\Lambda_1 = \Lambda \cap SL_2(\mathbf{Z})$ est maigre dans $\Gamma_1 = \Gamma \cap SL_2(\mathbf{Z})$ par le lemme 1. Si Γ est un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ la démonstration est finie. Sinon Γ est un produit semi direct du sous-groupe distingué Γ_1 et d'un sous-groupe fini W d'ordre 2 et on peut appliquer le lemme 4 pour conclure. ■

La propriété marquante d' un sous-groupe maigre Λ d'un groupe de type fini Γ, est que la norme L^2 de l'opérateur caractéristique $M_{\Gamma/\Lambda} = M(S,\pi)$ de la représentation naturelle de Γ dans $l^2(\Gamma/\Lambda)$ est égale à la norme L^2 de l'opérateur caractéristique $M_\Gamma = M(S,l)$ de la représentation régulière à gauche de Γ. En effet, en utilisant les notations introduites dans la première partie, on a la:

Proposition 1 *Les normes ℓ^2 des opérateurs T_X et T_Y, où $X = \Gamma$ et $Y = \Gamma/\Lambda$, sont liées par l' inégalité*

$$\|T_X\| \leq \|T_Y\| \leq c(\Lambda, S)^{1/2} \|T_X\| .$$

Proof. Notons δ_x la fonction définie sur $X = \Gamma$ par $\delta_x(\alpha) = 0$ si $\alpha \neq x$ et $\delta_x(x) = 1$.
De même on note δ_y la fonction définie sur $Y = \Gamma/\Lambda$ par $\delta_y(y') = 0$ si $y' \neq y$ et $\delta_y(y) = 1$.
Un résultat classique de la théorie des graphes dit que $\|T_X\| = \overline{\lim}_n \langle T_X(\delta_1), \delta_1\rangle^{1/n}$ et de même on a $\|T_Y\| = \overline{\lim}_n \langle T_Y^n(\delta_\Lambda), \delta_\Lambda\rangle^{1/n}$,ou avec $\langle , \rangle$ nous désignons les produits scalaires usuels dans les espaces de Hilbert respectifs $\ell^2(X)$ et $\ell^2(Y)$. Pour une démonstration de ce résultat voir [CV1].

Observons que pour n dans $\mathbf{N}$ on a
$\langle T_X^n(\delta_1), \delta_1\rangle = \sum_{(s_1,\dots s_n)\in S^n} \langle \delta_{s_1 \dots . s_n}, \delta_1\rangle = \#\{(s_1, s_2, ..., s_n) \in S^n : s_1 s_2 .... s_n = 1\}$ et aussi $\langle T_Y^n(\delta_\Lambda), \delta_\Lambda\rangle = \sum_{(s_1,\dots s_n)\in S^n} \langle \delta_{s_1 \dots . s_n \Lambda}, \delta_\Lambda\rangle = \#\{(s_1, s_2, ..., s_n) \in S^n : s_1 s_2 .... s_n \in \Lambda\}$ la minoration de $\|T_Y\|$ est maintenant évidente.

Fixons un élément h dans Λ et posons $A(h) = \{(s_1, s_2, ..., s_n) \in S^n / s_1 s_2 .... s_n = h\}$. Il existe une bijection entre les ensembles
$A(h) \times A(h)$ et $\{(s_1, s_2, ..., s_{2n}) \in S^{2n} / s_1 s_2 .... s_{2n} = 1$ et $s_1 s_2 .... s_n = h\}$
donnée par $((s_1 s_2 .... s_n), (s'_1, s'_2, ..., s'_n)) \to (s'_1, s'_2, ..., s'_n, s_n^{-1}, s_{n-1}^{-1}, ..., s_1^{-1})$.
Par conséquent on a
$\# A(h)^2 = \#\{(s_1, s_2, ..., s_{2n}) \in S^{2n} / s_1 s_2 .... s_{2n} = 1$ et $s_1 s_2 .... s_n = h\}$ et donc

aussi $\sum_{\{h\in\Lambda,||h||\leq n\}} \#A(h)^2 \leq \langle T_X^{2n}(\delta_1),\delta_1\rangle$.
Or par Cauchy-Schwartz on a
$(\sum_{\{h\in\Lambda,||h||\leq n\}} \#A(h))^2 \leq c(\Lambda,S,n)\sum_{\{h\in\Lambda,||h||\leq n\}} \#A(h)^2$
d' où
$\langle T_\Lambda^n(\delta_\Lambda),\delta_\Lambda\rangle^2 \leq c(\Lambda,S,n)\langle T_X^{2n}(\delta_1),\delta_1\rangle$.
Par passage à la limite supérieure on obtient maintenant la majoration de $\|T_Y\|$. ■

Dans ce qui suit nous allons utiliser ces résultats pour étudier l'action des sous-groupes du groupe d'automorphismes du tore.

Corollaire 11 *Soit S_+ un sous-ensemble fini de $GL_2(\mathbf{Z})$ et $S = S_+\cup(S_+)^{-1}$. Notons (H',π) la représentation de $\Gamma=\Gamma(S)$ dans $\ell^2(\mathbf{Z}^2\backslash\{0\})$ donnée par $(\forall\gamma\in\Gamma,\forall f\in\ell^2(\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}),\pi(\gamma)f(\cdot)=f(\gamma^{-1}(\cdot)))$. Alors la norme opérateur de M_π est égale à la norme opérateur de M_Γ.*

Proof. Soit $n=(n_1,n_2)\in\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$, $k=p\,\mathrm{gcd}\{n_1,n_2\}$ *et*
$\Lambda=\{\lambda\in\Lambda:\lambda(n)=n\}$.
On a $\Lambda=\{\lambda\in\Lambda:\lambda(\frac{n}{k})=\frac{n}{k}\}$. Comme $SL_2(\mathbf{Z})$ opère transitivement sur $\{(m_1,m_2):p\,\mathrm{gcd}\{m_1,m_2\}=1\}$ il existe un $g\in SL_2(\mathbf{Z})$ tel que
$\Lambda\subset g\{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}:t\in\mathbf{Z},\varepsilon\in\{1,-1\}\}g^{-1}$. Par conséquent $\Lambda_1=\Lambda\cap SL_2(\mathbf{Z})$ est un sous groupe cyclique de $SL_2(\mathbf{Z})$ et donc $\Lambda_1/\{I,-I\}$ est maigre dans $PSl_2(\mathbf{Z})$. On peut donc appliquer le corollaire précédent pour en déduire que Λ est maigre dans Γ.
Or le sous-espace fermé de $\ell^2(\mathbf{Z}^2\backslash\{0\})$ formé par les fonctions nulles en dehors de l' orbite $\Gamma\{n\}$ est stable par M_π. Donc la proposition précédente nous dit que la norme de l'opérateur M_π restreint à $\ell^2(\Gamma\{n\})$, est égale à la norme de M_Γ. Comme ceci est vrai pour chaque orbite de Γ dans $\mathbf{Z}^2\backslash\{0\}$ on en déduit le résultat. ■

Remarque 12 *Soit Γ un groupe de type fini et*
$S_+=\{s_1,s_2,..,s_r,s_{r+1},......s_t\}\subset\Gamma$, $t\in\mathbf{N}$. Supposons que $s_1,s_2,......s_r$ sont des éléments d'ordre 2 et que $s_{r+1},s_{r+2},......s_t$ sont des éléments d'ordre infini et que Γ est le produit libre des groupes cycliques $A(i)=\langle s_i\rangle,1\leq i\leq t$. Il est bien connu que dans ce cas le graphe de Cayley $X=(\Gamma,S)$ est un arbre homogène de degré $q+1=r+2(t-r)$ et que $\|M_X\|=2\sqrt{q}$, voir [C.] *et* [Ch.].

Corollaire 13 *Soit* Γ *un groupe de type fini et* $S_+ = \{s_1, s_2, .., s_r, s_{r+1}, ...s_t\} \subset \Gamma$, $t \in N$. *Supposons que* $s_1, s_2, ...s_r$ *sont des éléments d'ordre 2 et que* $s_{r+1}, s_{r+2}, ...s_t$ *sont des éléments d'ordre plus grand que deux. Posons* $q+1 = r + 2(t-r)$, *alors* $q+1 \geq \|M_\Gamma\| \geq 2\sqrt{q}$.

Proof. Soit $\Gamma\hat{}$ le produit libre $G * F$ où $F = F(s'_{r+1}, ...s'_t)$ est le groupe libre de base $s'_{r+1}, ..., s'_t$ et $G = \langle s'_1\rangle * \langle s'_2\rangle * \cdots \langle s'_r\rangle$ où $s'_i, 1 \leq i \leq r$, sont des éléments d'ordre 2 de $\Gamma\hat{}$. L'application définie sur les générateurs par $s'_i \to s_i$ s'étend en un morphisme surjectif de groupes de $\Gamma\hat{}$ sur Γ de noyau Λ. En appliquant la proposition et la remarque précédente à $\Gamma\hat{}$ et à Λ, on obtient le résultat. ■

Remarque 14 *En utilisant la structure de* $SL_2(\mathbf{Z})$ *comme produit amalgamé on peut trouver aisément de nombreux exemples de systèmes générateurs de sous-groupes libres de* $GL_2(\mathbf{Z})$. *Voici quelques systèmes générateurs des sous-groupes libres de rang 2 de* $GL_2(\mathbf{Z})$ *:*

$S_+ = \{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\}, k$ *entier* ≥ 2.

$S_+ = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$

$S_+ = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b & -c \\ d & e \end{pmatrix}\}$ *a,b,c,d,e sont des entiers non négatifs tels que :* $dc - be = \pm 1, a \geq 2$ *et* $e - b \geq 2$, *voir* [N].

On peut considérer aussi des produits libres des groupes d'ordre 2, par exemple: pour $S_+ = \{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\}$ Γ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Pour $S_+ = \{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$ Γ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

A partir de ces exemples on peut expliciter aussi des sous-groupes libres de rang arbitrairement grand cf [M.K.S.].

Remarque 15 *L' inégalité à droite dans la proposition n'est pas optimale. En effet on peut démontrer que dans la remarque 8 on a* $\|M_\Gamma\| = \left\|M_{\Gamma/\Lambda}\right\| = 4$ *même si* $c(\Lambda, S)^{1/2} > 1$. *En effet le groupe* Γ *est moyennable et un résultat classique de Kesten* [*C.V.*1] *permet de calculer la norme de* M_X.

1 Applications.

1.0.1 L' action de $GL_2(\mathbf{Z})$ sur le Tore.

Soit $\mathbf{T} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le groupe quotient du groupe additif $(\mathbf{R}^2, +)$ par son sous-groupe $(\mathbf{Z}^2, +)$. Le groupe $\mathbf{T}$ est compact et est muni d'une mesure de Haar $d\mu(x)$ normalisée par $\int_{\mathbf{T}} d\mu(x) = 1$. C'est aussi le groupe dual du groupe additif $(\mathbf{Z}^2, +)$. L'action naturelle à gauche de $GL_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{R}^2$ définit, par passage aux quotients, une action ergodique sur $\mathbf{T}$ par des automorphismes de groupe. Remarquons que les automorphismes continus de $\mathbf{T}$ préservent la mesure de Haar $d\mu(x)$, de maniére que la représentation naturelle, notée π, de $GL_2(\mathbf{Z})$ dans $L^2(\mathbf{T}, d\mu(x))$ est unitaire. Elle est donnée par:
$\forall s \in GL_2(\mathbf{Z}), \forall F \in L^2(\mathbf{T}, d\mu(x)), \pi(s)F(t) := F(s^{-1}t)$ pour presque tout t dans $\mathbf{T}$.

Le sous-espace de $L^2(\mathbf{T}, d\mu(x))$ formé par les fonctions constantes est stable par $\pi(s), \forall s \in GL_2(\mathbf{Z})$. Soit H le supplémentaire orthogonal des fonctions constantes:

$$H = \{F \in L^2(\mathbf{T}, d\mu(x)) : \int_{\mathbf{T}} F(t) d\mu(t) = 0\}.$$

Notons encore (H, π) la restriction de la représentation naturelle au sous-espace fermé H.

Soit S_+ un sous-ensemble fini de $GL_2(\mathbf{Z})$ et $\Gamma = \Gamma(S)$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{Z})$ engendré par $S = S_+ \cup (S_+)^{-1}$. Soit M_π l'opérateur caractéristique associé à S et à la représentation (H, π) du sous-groupe Γ de $GL_2(\mathbf{Z})$, obtenue par restriction de π à Γ. $\forall F \in H$,

$$M_\pi(F) = \sum_{s \in S} \pi(s) F.$$

Soit $\Gamma' = \Gamma'(S')$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbf{Z})$ engendré par $S' = \{{}^t s : s \in S\}$ où ${}^t s$ désigne la matrice transposée de s. Remarquons que $g \to ({}^t g)^{-1}$ est un isomorphisme de Γ sur Γ'.
Soit $M_{\Gamma'}$ l'opérateur caractéristique associé à la représentation régulière à gauche de Γ' et au système générateur S' :
$\forall f \in \ell^2(\Gamma'), \forall \gamma \in \Gamma'$

$$M_{\Gamma'} f(\gamma) = \sum_{s \in S'} f(s^{-1}\gamma).$$

Théorème 16 *La norme opérateur de M_π dans H est égale à la norme opérateur de $M_{\Gamma'}$ dans $\ell^2(\Gamma')$:* $\|M_\pi\| = \|M_{\Gamma'}\|$.

Proof. La transformation de Fourier est un isomorphisme unitaire de H sur $\ell^2(\mathbf{Z}^2 \backslash \{0\})$.Aussi pour $F \in H$ on a
$M_\pi(F)\hat{}(n) = \int_\mathbf{T} M_\pi(F)(t) Exp(-2\pi i n \cdot t) d\mu(t) = \sum_{s \in S'} F\hat{}(s(n)), \forall n \in \mathbf{Z}^2$.

On peut donc appliquer le corollaire 12 à l'opérateur que l'on obtient en conjugant M_π par la transformée de Fourier, d'où le résultat.

Corollaire 17 *Posons* $S_+ = \{s_1, s_2, .., s_r, s_{r+1}, ...s_t\}, t \in \mathbf{N}$. *Supposons que* $s_1, s_2, ...s_r$ *sont des éléments d'ordre 2 et que* $s_{r+1}, s_{r+2}, ...s_t$ *sont des éléments d'ordre plus grand que deux. Soit* $q + 1 = r + 2(t - r)$ *et* $\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{q+1} \|M_\pi\|$. *Alors*

$$\frac{2\sqrt{q}}{q+1} \leq \boldsymbol{\delta} \leq 1.$$

De plus si les s_i *sont d'ordre infini pour* $r < i \leq t$, *et le groupe* Γ *est le produit libre des groupes cycliques* $\langle s_i \rangle$ *engendrés par les* s_i *pour* $i = 1, 2, \cdots t$, $\Gamma = \langle s_1 \rangle * \langle s_2 \rangle * \cdots * \langle s_k \rangle$, *alors* $\mathbf{r} = \frac{2\sqrt{q}}{q+1}$. *Autrement dit si le graphe de Cayley* $X = (\Gamma, S)$ *est un arbre, alors on a l'égalité* $\mathbf{r} = \frac{2\sqrt{q}}{q+1}$.

Proof. C'est une conséquence directe du théorème 17, du corollaire 14, de la remarque 13 et de ce que l'application $s \rightarrow^t s$ est un anti-automorphisme de groupes de Γ sur Γ'. ■

Remarque 18 *On voit donc, d'après la remarque 15, que l'on peut trouver aisément de nombreux exemples de systèmes générateurs de sous-groupes libres de* $GL_2(\mathbf{Z})$, *qui automatiquement minimisent la norme* $\boldsymbol{\delta}$ *de l'opérateur de moyenne associé* M_π. *Cela contraste radicalement avec le cas de la sphère où trouver des systèmes générateurs optimaux s'avère être très délicat, voir* [*L.P.S.*].

1.1 Distribution asymptotique des orbites de Γ dans le tore.

Considérons le cas où $\Gamma = \langle s_1 \rangle * \langle s_2 \rangle * \cdots * \langle s_t \rangle$, sous-groupe de $GL_2(\mathbf{Z})$, est un produit libre de r sous-groupes d' ordre 2 et $t - r$ sous-groupes cycliques infinis avec $r + 2(t - r) = q + 1 = \left| S_+ \cup S_+^{-1} \right| = |S|$. Dans ce cas le graphe de Cayley $X = (\Gamma, S)$ est un arbre et nous avons la situation extrême $\|M_S\| = 2\sqrt{q}$.

Pour n un entier non négatif notons B_n l'ensemble des éléments de Γ de longueur plus petite ou égale à n :

$$B_n = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma|_S \leq n\}.$$

Théorème 19 *Soit $N = |B_n|$ et posons $B_n = \{\gamma_i : 0 \leq i \leq N\}$.*
Alors

$\forall F \in L^2(\mathbf{T}, dx)$ on a:

$$(1) \qquad \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(\gamma_i ?) - \int_{\mathbf{T}} F(x) d\mu(x) \right\|_2 \leq C(\frac{Log(N)}{\sqrt{N}})$$

la constante C dépend de la norme L^2 de F et de $q+1$.

Etant donné $0 \leq \eta < 1$ il existe un ensemble de mesure nulle D tel que pour tout $t \in \mathbf{T}$ en dehors de D il existe un $N_0(t)$ tel que $\forall N \geq N_0(t)$

$$(2) \qquad \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(\gamma_i t) - \int_{\mathbf{T}} F(x) d\mu(x) \right| \leq (\frac{1}{\sqrt{N}})^{\eta}.$$

En particulier $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\gamma_i t) - \int_{\mathbf{T}} F(x) d\mu(x)$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini presque partout par rapport à t.

Proof. On introduit les opérateurs $\Phi_n, n \in \mathbf{N}$, définis sur $L^2(\mathbf{T}, d\mu(x))$ par $\Phi_n(F)(t) = \sum_{s \in S_n} F(s(t))$, où $S_n = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma|_S = n\}$.
Remarquons que Φ_n est l'image, par l' extension de la représentation naturelle π de Γ à $\ell^1(\Gamma)$, de la fonction indicatrice de la sphère S_n dans Γ. On établit par un calcul direct la relation de récurrence: $\Phi_1 \Phi_n = q\Phi_{n-1} + \Phi_{n+1}$ pour $n \geq 2$ et $\Phi_1 \Phi_1 = (q+1) + \Phi_2$.

Soit $\{P_n(t) : n \in \mathbf{N}\}$ la suite des polynômes définis par la relation de récurrence précédente : $tP_n(t) = qP_{n-1}(t) + P_{n+1}(t)$ pour $n \geq 2$, $tP_1(t) = (q+1) + P_2(t)$ avec $P_1(t) = t$.
Par construction on a $\Phi_n = P_n(\Phi_1)$. Comme $\Phi_1 = M_\pi$ on a $\|\Phi_n\| \leq Sup\{|P_n(t)| : |t| \leq 2\sqrt{q}\}$, grâce au théorème de représentation spectrale de l'opérateur M_π dans H.
En posant $t = \sqrt{q}(\lambda + \lambda^{-1})$ on obtient, pour $n \geq 1$:
$P_n(t) = \frac{q^{n/2}}{q(\lambda - \lambda^{-1})}\{(q\lambda - \lambda^{-1})\lambda^n - (q\lambda^{-1} - \lambda)\lambda^{-n}\}$ et $P_n(\pm 2\sqrt{q}) = \pm q^{n/2}(2 + (1 - 1/q)(n-1))$, voir Cartier, [C]. On en déduit que $|P_n(t)| \leq (q+1)(n +$

$1)q^{n/2}, \forall t \in \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$. Par conséquent $\|\Phi_n\| \leq Cnq^{n/2}$ pour chaque entier positif n, avec $C = 2(q+1)$.

Considérons maintenant l'opérateur $\Psi_n = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} \Phi_i$ où $N = \sum_{i=0}^{n} |S_i|$. On déduit des calculs précédents que $\|\Psi_n\| \leq C_1 n q^{-n/2}$ où C_1 est une constante indépendante de n. Finalement soit $F \in L^2(\mathbf{T}, d\mu(x))$ alors $F = F_0 + \int_{\mathbf{T}} F(x)d\mu(x)$ avec $F_0 \in H$. Or, pour chaque i, $\Phi_i(F) = \Phi_i(F_0) + |S_i| \int_{\mathbf{T}} F(x)d\mu(x)$ et donc
$\Psi_n(F) - \int_{\mathbf{T}} F(x)d\mu(x) = \Psi_n(F_0)$ d'où, en tenant compte du fait que $N = O(q^n)$, la première partie de la proposition.

Pour la deuxième partie on utilise, grace à la majoration de $\|\Psi_n\|$, la convergence de la série $\sum_n q^{\eta n} \|\Psi_n(F_0)\|^2$ pour chaque η tel que $0 \leq \eta < 1$. Or ceci signifie, par le théorème de convergence dominée, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} q^{\eta k} |\Psi_k(F_0)(t)|^2$ est convergente pour tous les t en dehors d'un sous-ensemble de mesure nulle, noté D. Donc pour t en dehors de D il existe une constante $C = C(t)$ telle que $q^{\eta k/2} |\Psi_k(F_0)(t)| \leq 1, \forall k \geq C$. Ainsi $|\Psi_k(F)(t) - \int_{\mathbf{T}} F(x)d\mu(x)| \leq q^{-\eta k/2}, \forall k \geq C(t)$, et il existe un $N_0 = N_0(t)$ tel que :
$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\gamma_i t) - \int_{\mathbf{T}} F(x)d\mu(x)\right| \leq (\frac{1}{\sqrt{N}})^{\eta}, \forall N \geq N_0(t)$. ■

Remarque 20 *Notons que la relation (2) est fausse pour t ayant des coordonnées rationnelles et une fonction F à support disjoint de l' orbite finie* Γ *t.*

Remarque 21 *Notons aussi que la relation (2) est fausse pour la fonction* $F(t) = Exp(2\pi i(t \cdot a))$, $t = (1/2, 0)$ *et* $\Gamma = \langle s_1 \rangle * \langle s_2 \rangle$ *où* $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Dans ce cas* $\Psi_n(F)(t) = F(t)$. *La convergence ponctuelle de* $\Psi_n(F)(x)$ *ne peut pas être contrôlée directement par le théorème des accroissements finis appliqué à* $\Psi_n(F)(t)$, *car la norme des matrices* σ *dans* Γ *, qui interviennent dans le calcul des dérivées, tend vers l'infini avec* $|\sigma|_S$ *. Cela contraste avec les résultats de convergence ponctuelle dans [L.P.S.].*

Nous ne savons pas si dans l'exemple précédent la somme des exponentielles $\Psi_n(F)(t)$ converge vers zéro pour chaque t d'ordre infini dans le tore $\mathbf{T}$.

1.2 Construction des graphes expansifs

L'expansivité de l'action d'un sous-groupe $\Gamma = \Gamma(S_1)$ de $GL_2(\mathbf{Z})$ opérant sur le tore dépend de $1-r$ où la norme $r = \|M_S\| / |S| = \sup\{\langle M_S f, f\rangle : f \in L^2(T), \int f = 0\} / |S|$ est supposée plus petite que un. Par exemple si $S_1 = \{s_1, s_2\}$ elle s'exprime ainsi: pour tout sous-ensemble borélien B du tore tel que $\mu(B) \leq 0.5$ on a $\mu(B\Delta s_1(B)) + \mu(B\Delta s_2(B)) \geq (1-r)\mu(B)$. Ici $B\Delta s_1(B)$ note la différence symétrique des ensembles B et $s_1(B)$. Cette inegalité s'obtient en utilisant que $\langle M_S f, f\rangle \leq r\|f\|^2$, *où* f est la projection de la fonction indicatrice de B sur le sous-espace des fonctions de moyenne nulle. Nous allons donner, en suivant l'idée de Gabber et Galil, une interprétation combinatoire de ces inegalités en construisant des graphes avec des propriétés d'expansion remarquables. Le principe de base est d'étudier la restriction de l'opérateur M_S a un sous-espace de dimension finie adéquat de $L^2(T)$. Pour fixer les idées nous allons considérer d'abord la notion de (n, k, d)-extenseur et généraliser la méthode de construction explicite de Gabber et Galil, [G.G].

Définition 22 *Soient n, k des entiers positifs et d un nombre réel positif. Un (n, k, d)-extenseur est un graphe biparti X à $2n$ sommets et kn arêtes. Les sommets de X sont répartis en deux ensembles disjoints notés $\mathbf{I}$ et $\mathbf{O}$, chacun composé de n sommets, qui possèdent la propriété suivante:*
les sommets adjacents d'un sommet quelconque dans $\mathbf{I}$ sont tous dans $\mathbf{O}$ et pour toute partie non vide B de $\mathbf{I}$, on a
$N(B) \geq |B|\,(1 + \frac{d(n-|B|)}{n})$
où $N(B)$ est le cardinal de l'ensemble des sommets *adjacents aux sommets de B. En prenant B de cardinal $n-1$ on voit qu' il est nécessaire que $d \leq n/(n-1)$. Notons aussi que $N(B) \geq |B|\,(1 + d/2)$.*

Le problème, qui a son origine en informatique, est de construire explicitement des suites infinies $(X_i)_{i\geq 1}$ de (n_i, k, d) extenseurs où le nombre des sommets n_i tend vers l'infini avec i mais le degré k et le nombre d restent fixes, voir [H.V]. En utilisant le groupe affine défini sur $\mathbf{Z}$, Margulis construit, pour chaque m entier positif, un $(m^2, 5, d)$ extenseur mais ne donne pas une estimation explicite de la constante d. Ultérieurement Gaber et Galil, en modifiant l'exemple de Margulis, ont obtenu un $(m^2, 7, d)$ extenseur avec $d = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ pour tout entier positif m.

Par la suite nous généralisons la méthode de Gaber et Galil pour construire des extenseurs.

Considérons un système $S_+ = \{s_1, s_2, ..., s_l\}$ d' éléments de $Gl_2(\mathbf{Z})$ et notons $q+1 = |S| = \left|S_+ \cup S_+^{-1}\right|$. On suppose que $r = \|M_S\| / (q+1) < 1$.

Soit $D = [0,1[\times[0,1[$ et μ la mesure de Lebesgue usuelle de $\mathbf{R}^2$ normalisée par $\mu(D) = 1$. Fixons $s \in S$. Notons $p(s,a) = \mu(s(D) \cap (D+a))$ pour a dans $\mathbf{Z}^2$ et $A(s) = \{a \in \mathbf{Z}^2 : \mu(s(D) \cap (D+a)) > 0\}$. Remarquons que $p(s,a) = p(s^{-1}, -s^{-1}(a))$.

Pour chaque m dans $\mathbf{N}$, on introduit la fonction $m\mathbf{Z}^2$-périodique $p^{\#}(s,a) = \sum_{t \in m\mathbf{Z}^2} p(s, a+t)$, associé à la fonction $a \to p(s,a)$. On verifie que $p^{\#}(s,.)$. définit une probabilité sur $\mathbf{Z}^2/m\mathbf{Z}^2$.

En suivant l'idée de Margulis, on construit un graphe biparti X_m avec $\mathbf{I} = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $\mathbf{O} = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Un élément $\overline{x} \in \mathbf{I}$ est adjacent à $\overline{x} \in \mathbf{O}$ et à $\overline{s_i(x)+a} \in \mathbf{O}$ pour chaque a dans $A(s_i)$ et pour chaque i dans $\{1, 2....., l\}$.

Théorème 23 *Le graphe X_m est un $(m^2, k+1, (1-r))$ $-$ extenseur pour $m > 0$.*

Proof. Pour chaque $x \in \mathbf{Z}^2$ notons u_x la fonction caractéristique de l'ensemble $\frac{1}{m}(x+D)$ et soit e_x la fonction $\mathbf{Z}^2$- périodique définie par :
$e_x(t) = m \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} u_x(t+n)$.

Par construction on a $e_x = e_y$ si et seulement si $x - y \in m\mathbf{Z}^2$ de sorte que e_x dépend seulement de la classe $\overline{x} = x + m\mathbf{Z}^2$. En outre le système $\{e_x : \overline{x} \in \mathbf{I}\}$ est orthonormé dans $L^2(\mathbf{T}, dx)$: $\langle e_x, e_y \rangle = \delta_{\overline{x},\overline{y}}$. Notons H le sous-espace de $L^2(T, dx)$ engendré par les $e_x, \overline{x} \in \mathbf{I}$. Un petit calcul montre que $\langle \pi(s)e_x, e_y \rangle = p^{\#}(s, y - s(x)), s \in S$, ou $\pi(s)e_x(t) = e_x(s^{-1}(t))$ pour tout t dans $\mathbf{T}$. Autrement dit la matrice de $P\pi(s)P$ dans la base $\{e_x : \overline{x} \in \mathbf{I}\}$ est $(p^{\#}(s, y - s(x)))_{\overline{x},\overline{y}}$, ou P est le projecteur orthogonal sur H.

Soit $B \subset \mathbf{I}$ et $e_B = \sum_{\overline{x} \in B} e_x$ alors
$\langle \pi(s)e_B, e_B \rangle = \sum_{\overline{x} \in B} \sum_{\overline{y} \in B} p^{\#}(s, y - s(x)) = \sum_{\overline{a} \in \mathbf{I}} p^{\#}(s,a) \sum_{\{(\overline{x},\overline{y}) \in B^2 / \overline{y} - s(\overline{x}) = \overline{a}\}}$.
Donc si l'on note (s,a) la bijection affine de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ définie, modulo m, par $x \to (s,a)(x) := s(x) + a$, on peut écrire

$$\langle \pi(s)e_B, e_B \rangle = \sum_{\overline{a} \in \mathbf{I}} p^{\#}(s,a) \left| B \cap (s,a)(B) \right|.$$

On pose maintenant $P = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \pi(s)$ et $e_B = e^0 + \frac{1}{m} |A|$, où e^0 est de moyenne nulle et $\langle e^0, e^0 \rangle = |B| (1 - \frac{|B|}{m^2})$. En utilisant que la norme de $I - P$

dans l'espace des fonctions de moyenne nulle est $1-r$, on obtient que

$$\sum_{s\in S}\sum_{a\in \mathbf{I}}\frac{p^{\#}(s,a)}{|S|}\left|(s,a)(B)-B\right|\geq (1-r)\left|B\right|(1-\frac{|B|}{m^2}),$$

comme $\sum_{s\in S}\sum_{a\in \mathbf{I}}\frac{p^{\#}(s,a)}{|S|}=1$, il existe au moins un couple (s,a) tel que $\left|(s,a)(B)-B\right|\geq (1-r)\left|B\right|(1-\frac{|B|}{m^2})$.

Par ailleurs $\left|(s,a)(B)-B\right|=\left|(s,a)^{-1}(B)-B\right|$, donc on peut supposer que $s\in S_+$. Or, d'après la définition, on a
$N(B)-|B|\geq \left|\cup_{i=1}^{l}\cup_{a\in A(s_i)}(s_i,a)(B)\right|\geq \left|(s,a)(B)-B\right|\geq (1-r)\left|B\right|(1-\frac{|B|}{m^2})$. Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 24 *En prenant* $S_+=\{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\}$ *on obtient l'exemple d'un* $(m^2,7,1-\frac{\sqrt{3}}{2})-$*extenseur de Gabber et Galil. En notant* $s_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $s_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ *on a* $A(s_1)=\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$; $A(s_2)=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$;
$p(s_1,(0.0))=p(s_1,(2,0))=\frac{1}{4}=p(s_2,(0,0))=p(s_{2,}(0,2))$;

$p(s_{1,}(1,0))=\frac{1}{2}=p(s_2,(0,1))$. Aussi et $1-r=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En considérant $S_+=\{\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\}$ on obtient un $(m^2,8,\frac{1}{5})-$ *extenseur*. En effet dans ce cas $r=\frac{2\sqrt{4}}{5}$ car le graphe de Cayley de Γ par rapport à S est un arbre de valence 5 (remarque 15).

On peut aussi construire, en s'inspirant d'une idée de Colin de Verdière cf [CV2], des familles de graphes finis de valence fixée et constante expansive minorée uniformement. La constante (de Cheeger) d'expansion d'un graphe fini X est définie par
$h(X)=\min\{\frac{|\partial A|}{|A|}:A\subset X,0<|A|\leq\frac{|X|}{2}\}$,
où si A est un sous-ensemble de X on note ∂A l'ensemble des arêtes géométriques qui relient A à son complémentaire $X\backslash A$, cf [V.].

En utilisant les notations introduites dans le théorème précédent, il est clair par le choix de D que $p(s,a)$ est un nombre rationnel. Soit $p(s,a)=\frac{n(s,a)}{d(s,a)}$

avec $pgcd(n(s,a),d(s,a)) = 1$; $d = ppcm\{d(s,a) : s \in S, a \in A(s)\}$ et $l(s,a) = d \times p(s,a)$ pour $s \in S$ et $a \in A(s)$.

Définition 25 *Soit G_m le graphe défini par: l'ensemble des sommets de G_m est $I_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et un sommet $\overline{x}$ est connecté à $y = \overline{s(x)+a}$ par $l(s,a)$ arêtes géométriques pour chaque $s \in S$ et $a \in A(s)$.*

Notons M_m la matrice d'adjacence du graphe. Soit Ω_m l'ensemble des valeurs propres de M_m ; $t'_m = Min\Omega_m \backslash \{d\,|S|\}$ et $t_m = Max\Omega_m \backslash \{d\,|S|\}$.

Théorème 26 *Pour tout m le graphe G_m est connexe, de valence $|S| \times d$ et les valeurs propres de M_m sont contenues dans*
$\{|S| \times d\} \cup \{t \in \mathbf{R} : -d \times \|M_S\| \leq t \leq d \times \|M_S\|\}$. Plus encore $\overline{\lim}_m t_m = d\,\|M_S\|$ et $\underline{\lim}_m t'_m \geq -d\,\|M_S\|$.

Proof. Remarquons d'abord que $\sum_{s \in S} \sum_{a \in A(s)} l(s,a) = \sum_{s \in S} d = |S| \times d$.

Posons $F = \sum_{x \in I_m} f(x) e_x$ pour chaque fonction f à valeurs réelles, définie sur les sommets de G_m.

Remarquons que si $\sum_{x \in I_m} f(x) = 0$ alors $\int_T F(t)d\mu(t) = 0$.

On vérifie maintenant, en utilisant les notations introduites dans le théorème précédent, que $\forall f, g \in l^2(I_m)$ on a $\int_T M_S(F)(t)G(t)d\mu(t) = \sum_{s \in S} \sum_{a \in \mathbf{I}_m} p^{\#}(s,a) \sum_{x \in I_m} f(s(x)+a)g(x) = \frac{1}{d} \sum_{x \in I_m} M_m(f)(x)g(x)$.

Par consequent si l'on note P_m le projecteur orthogonal de $L^2(T, d\mu)$ sur $Vect\{e_x : \overline{x} \in I_m\}$, la matrice de $P_m M_S P_m$ dans la base $\{e_x : \overline{x} \in I_m\}$ est $\frac{1}{d} M_m$. On en déduit, en prenant le sup et l'inf sur des fonctions à valeurs réelles de moyenne nulle, l'encadrement:
$\inf\{\langle M_S(F), G\rangle_{L^2(T)} : \|F\|_2 = \|G\|_2 = 1\} \leq \inf\{\frac{1}{d}\langle M_m(f), g\rangle_{l^2(I_m)} : \|f\|_2 = \|g\|_2 = 1\}$
et $\sup\{\frac{1}{d}\langle M_m(f), g\rangle_{l^2(I_m)} : \|f\|_2 = \|g\|_2 = 1\} \leq \sup\{\langle M_S(F), G\rangle_{L^2(T)} : \|F\|_2 = \|G\|_2 = 1\}$. D'où le résultat relatif aux valeurs propres, par le principe de min-max appliqué à M_m et par la densité dans $L^2(T, d\mu)$ de $\cup_m Vect\{e_x : x \in I_m\}$. Aussi on déduit la connexité du graphe de l'inégalité $t_m < |S| \times d$ ■

Corollaire 27 *La constante isopérimétrique des graphes G_m vérifie $h(G_m) \geq \frac{(|S| - \|M_S\|) \times d}{2}$.*

Proof. C'est une conséquence de $t_m \leq d \times \|M_s\|$ et des inégalités de Cheeger pour les graphes, voir [C.V.2]. ■

Exemple 28 *Soit j un entier plus grand que 1 et $S_+ = \{s_1 = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix}\}$. Le sous-groupe Γ de $Sl_2(\mathbf{Z})$ engendré par S est libre. Une base libre de Γ est S_+. Donc $\|M_S\| = 2\sqrt{3}$. On a $A(s_1) = \{(0,0),(1,0),(2,0),........(j,0)\}$ et $A(s_2) = \{(0,0),(0,1),(0,2),..........(0,j)\}$. Aussi $p(s_1,(0,0)) = p(s_1,(0,j)) = \frac{1}{2j} = p(s_2,(0,0)) = p(s_2,(j,0))$ et*
$p(s_1,(i,0)) = \frac{1}{j} = p(s_2,(0,i))$ $i \in \{1,2,.....j-1\}$.
Donc dans ce cas $d = 2j$ et $l(s,a) \in \{1,2\}$. Le degré du graphe G_m est $4 \times d = 8j, et\ -8j\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t'_m \leq t_m \leq 8j \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus la constante isopérimétrique vérifie dans ce cas $h(G_m) \geq (4-2\sqrt{3}) \times j$.

Remerciements. Pendant l'élaboration de ce travail j'ai bénéficié de la bonne ambiance de travail du laboratoire de mathématiques de l' Université de Mulhouse. De multiples discussions avec mon collègue Nicolas Chevalier ont beaucoup influencé mon point de vue. En particulier la démonstration de la proposition 11 et l'exemple 7 lui sont dus.

Je remercie en outre le professeur Jorge Soto Andrade et ses collaborateurs qui m'ont permis de faire une série d'exposés sur le sujet au Chili. Ce travail fait partie du projet E.C.O.S, N^0 C93E02.

1.3 Bibliographie.

[C]. P. Cartier. ≪Harmonic analysis on trees≫,Proc.Symp.Pure Math., 26 (1973), 419-424.

[Ch]. F.Choucroun.≪Groupes opérant simplement transitivement sur un arbre homogène et plongements dans $\mathrm{PGL}_2(k)$ ≫ . C.R.A.S. 298,1984 p.313-315.

[C.V.1]. I. Colin de Verdière. ≪Distribution de Points sur une Sphère≫ (d'après Lubotzky,Phillips et Sarnak). Séminaire Bourbaki, 41ème année, 1988-89, n^0 703.

[C.V.2]. I. Colin de Verdière. ≪Le trou spectral des graphes et leurs propriétés d'expansion≫. Séminaire de théorie spectrale et géométrie n^0 12, année 1993-94, Institut Fourier.

[G.G]. O. Gabber and Z.Galil, ≪Explicit constructions of linear-sized superconcentrators≫, J. Comp. and Syst.Sci. , 22 (1981), pp. 407-420.

[G.K]. R. I. Grigorchuck, P. F. Kurchanov, Some questions of group Theory related to geometry. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Volume 58, Algebra VII, pp. 169-231.

[H.V]. P. de la Harpe et A. Valette, ≪La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts≫, Asterisque 175, Soc. Math. France.

[L.P.S]. A. Lubotzky , R. Phillips, P. Sarnak, ≪Hecke operators and distributing points on the sphere I≫, CPAM, 39 (1987), 149-186.

[M.K.S]. W. Magnus, A. Karras, D. Solitar, Combinatorial group Theory, Dover Publications 1976.

[N]. M. Newman. Integral matrices, Academic Press 1972.

[V]. A. Valette, Séminaire Bourbaki, Volume 1996-97, Mars 1997.

Guido Ahumada Bustamante.
e-mail: G.Ahumada@univ-mulhouse.fr
Université d'Haute-Alsace
F.S.T.
4, rue des Frères Lumière,
68093 Mulhouse Cedex.