Quelques résultats de Gh. Vranceanu sur les algèbres de Lie nilpotentes.

Michel Goze
Faculté des sciences et Techniques
Laboratoire de mathématiques
4, rue des Frères Lumière
F. 68093 Mulhouse Cedex

September 6, 2000

Conférence donnée à l'occasion du 100^{ième} anniversaire de Gh. Vranceanu

Introduction

Une grande partie des travaux de Gh. Vranceanu sur les algèbres de Lie repose sur les classifications des algèbres de Lie nilpotentes. Les difficultés que l'on rencontre très vite dans ce type d'étude résultent d'une grande méconnaissance des invariants de ces algèbres de Lie. L'existence d'une infinité de classes d'isomorphie dès la dimension 7 montre la nécessité d'isoler des sous familles stables par l'action du groupe linéaire. Gh. Vranceanu a trés vite noté l'intérêt d'étudier la classe des algèbres de Lie aujourd'hui appelées filiformes. Il a notamment démontré un résultat fondamental, concernant l'existence de bases adaptées, qui est aujourd'hui à la base de toutes les études sur les déformations suite aux travaux de Michel Vergne sur la variété des lois nilpotentes.

Le but de ce papier est d'actualiser la démarche entreprise par Vranceanu dans ce domaine.

1 Algèbres de Lie nilpotentes

1.1 Quelques rappels

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. On définit les idéaux $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ par

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})], i \geq 1. \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente s'il existe k tel que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Ceci est équivalent à dire que chaque opérateurs de $\mathfrak{g}$

$$adX : Y \rightarrow [X, Y]$$

est nilpotent.

Remarque 1 *Dans les travaux de Vranceanu, les algèbres de Lie nilpotentes sont dites ALGEBRES DE LIE DE RANG 0. Cette terminologie est aujourd'hui oubliée (elle était également utilisée par Umlauf et Morozov) car elle interfère avec une autre notion, due à Malcev, pour laquelle la notion de rang correspond à la dimension maximale de l'algèbre des dérivations semi-simples deux à deux commutantes. Ainsi actuellement, une algèbre de rang 0 est une algèbre de Lie nilpotente sans dérivations semi-simples.*

1.2 Sur la classification des algèbres nilpotentes

Les premiers travaux relatifs au problème de classification des algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes sont dus à Umlauf (thèse Leipzig 1891). Mais la liste proposée comporte soit des erreurs (certaines lois ne sont pas des algèbres de Lie, certaines lois sont isomorphes à des lois déjà énoncées) soit des oublis. En fait Umlauf propose 49 classes d'isomorphie d'algèbres nilpotentes réelles de dimension 6. Dans ses leçons de géométrie différentielle, Vranceanu reprend la classification de Umlauf en commentant toutes les erreurs et donne une élimination des paramètres résiduels. En fait la première liste fiable est due à Dixmier [D] et ne concerne que la dimension 5. Gh Vranceanu a repris tous ces travaux afin de synthétiser une démarche "classificatrice". Il commence par classer les algèbres de dimension inférieure ou égale à cinq en utilisant un point de vue dual, c'est-à-dire en travaillant sur les formes de Maurer Cartan. Il étudie ensuite les algèbres nilpotentes (réelles) de dimension 6 par extension centrale. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de dimension 6, son centre $Z(\mathfrak{g})$ est au moins de dimension 1; il existe donc un vecteur central X tel que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathbb{K}X$ soit nilpotent de dimension 5. Suivant la structure connue de $\mathfrak{g}'$ on déduit les structures associées $\mathfrak{g}$. La démarche suivie est très géométrique. On considère les plus grandes sous algèbres abéliennes ce qui se traduit, lorsqu'on travaille avec les formes invariantes à gauche ω_i sur le groupe de Lie associé, à considérer des sytèmes de Pfaff en les ω_i complètement intégrables. Il aboutit ainsi à un théorème de classification des algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6 que nous pouvons lire par exemple dans le tome IV des leçons de géométrie diffentielle page 107.

Ces résultats peuvent être comparés à ceux de Morosov. Ce travail qui fait également référence précise la classification des algèbres nilpotentes réelles et complexes de dimension 6 et aborde également le cas des algèbres sur un corps quelconque (ici aussi les algèbres nilpotentes sont dites de rang 0).

Signalons toutefois, qu'à l'heure actuelle, la classification des algèbres de Lie réelles et complexes n'est connue que jusqu'en dimension 7 (voir par exemple [G.K]).

2 Algèbres de Lie filiformes

2.1 Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente complexe ou réelle de dimension n. Elle est dite filiforme si $\mathcal{C}^{n-2}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Comme toute algèbre de Lie nilpotente de dimension n vérifie $\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g}) = 0$, les algèbres filiformes apparaissent comme les nilpotentes ayant un indice de nilpotence maximal. Il existe donc, pour toutes ces algèbres, un vecteur non nul X dont les invariants de similitude de l'opérateur nilpotent adX sont égaux à $(n-1,1)$ (voir [G.K]).

Exemples.

1. L'algèbre nilpotente de dimension n définie dans une base $\{X_1, ..., X_n\}$ par

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad i = 2, .., n-1$$

est filiforme. Toute algèbre de lie filiforme de dimension n est en fait une déformation (au sens de Gerstenhaber) de cette algèbre (voir [G.K]).

2. Considérons l'algèbre de Lie de dimension $2p$ définie dans la base

$\{X_1, ..., X_{2p}\}$ par

$$\begin{cases} [X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad i = 2, ..., 2p-1 \\ [X_{i+1}, X_{2p-i}] = (-1)^i X_{2p}, \quad i = 1, ..., p-1. \end{cases}$$

Cette algèbre est aussi filiforme.

2.2 La définition de Vranceanu des algèbres filiformes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie nilpotente complexe (strutura unui grup de rang zero) et considérons une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ vérifiant

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset ... \supset \mathfrak{g}_n \supset \{0\}.$$

Soit $\{X_1, ..., X_n\}$ une base adaptée à ce drapeau et posons

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k.$$

La nilpotence de $\mathfrak{g}$ implique

$$\begin{array}{rcl} i)[X_i, X_n] & = & 0, \quad \forall i \\ ii)[X_i, X_{n-1}] & = & b_i X_n, \quad i < n-1 \end{array}$$

et plus généralement

$$iii) C_{kl}^h = 0, \quad k < l, h \leq l.$$

Du point de vue dual, les équations de Maurer Cartan

$$d\omega_i = -\sum_{j<k} C_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k$$

s'écrivent pour l'algèbre nilpotente $\mathfrak{g}$:

$$(*) \quad \begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -C_{12}^3 \omega_1 \wedge \omega_2, \\ \cdots \\ d\omega_h = -C_{12}^h \omega_1 \wedge \omega_2 - \cdots - C_{kh-1}^h \omega_k \wedge \omega_{h-1}, \quad k < h-1, \\ \cdots \end{cases}$$

(relations 4" dans [V]). Notons que les constantes de structure C_{jk}^i apparaissant dans $(*)$ ne sont pas libres mais doivent vérifier les conditions de Jacobi obtenues à partir des identitées $d(d\omega_i) = 0$.

Définition 1 (V) *On appelle vecteurs de structure de* $\mathfrak{g}$ *les vecteurs*

$$c^h = (C^h_{1h-1}, C^h_{2h-1}, \cdots, C^h_{h-2,h-1}), \quad h = 3, \cdots, n.$$

Effets d'un changement de bases sur les vecteurs de structure

Soit $f \in Gl(n, \mathbb{C})$. Posons $X_i = f(\overline{X_i}) = \sum \alpha_i^j \overline{X_j}$. Les constantes de structure $\overline{C^k_{ij}}$ de $\mathfrak{g}$ relatives à la base $\{\overline{X_i}\}$ vérifient

$$(**) \quad \sum_{ls} \alpha_i^l \alpha_j^s \overline{C^h_{ls}} = \sum_k \alpha_k^h C^k_{ij}$$

(relations 3 dans [V]). Supposons que f laisse invariantes les équations $(*)$. Comme il laisse invariant le drapeau de départ, la matrice vérifie

$$\alpha_i^j = 0, \quad j < i.$$

Si (β_i^j) désigne la matrice inverse, on a bien entendu :

$$(***) \quad \sum_{ls} \beta_i^l \beta_j^s C^h_{ls} = \sum_k \beta_k^h \overline{C}^k_{ij}$$

et

$$\beta_i^j = 0, \quad j < i.$$

Considérons l'équation $(***)$ pour $h = 1$ ou 2. On obtient :

$$0 = \beta_1^1 \overline{C^1_{ij}}$$

ce qui implique $\overline{C^1_{ij}} = 0$ pour tout i et j, et

$$0 = \beta_1^2 \overline{C^1_{ij}} + \beta_2^2 \overline{C^2_{ij}}$$

ce qui implique également $\overline{C^2_{ij}} = 0$ pour tout i et j. Les vecteurs de structure c^1, c^2 et $\overline{c^1}$ et $\overline{c^2}$ sont tous nuls. Supposons à présent $h \geq 3$. L'équation $(**)$ pour $j = h-1$ donne :

$$\sum_{l \geq i} \alpha_i^l \alpha_{h-1}^{h-1} \overline{C^h_{lh-1}} = \alpha_h^h C^h_{ih-1}, \quad \forall i < h-1$$

qui peut s'interpréter comme des formules de transformations sur les vecteurs de structure. Prenons par exemple $h = 3$. On a

$$c^3 = (C^3_{12})$$

et la formule de transformations s'écrit $\alpha_3^3 C_{12}^3 = \alpha_1^1\alpha_2^2\overline{C_{12}^3}$ et donc

$$\overline{c^3} = (\overline{C_{12}^3}) = (\alpha_3^3)(\alpha_1^1\alpha_2^2)^{-1}c^3.$$

Pour $h=4$ on obtient

$$\begin{cases} \alpha_4^4 C_{13}^4 = \alpha_1^1\alpha_3^3\overline{C_{13}^4} + \alpha_1^2\alpha_3^3\overline{C_{23}^4} \\ \alpha_4^4 C_{23}^4 = \alpha_2^2\alpha_3^3\overline{C_{23}^4} \end{cases}$$

qui établit bien une correspondance entre les vecteurs c^4 et $\overline{c^4}$. En fait on a

$$(T) \qquad \boxed{c^h{=}(\alpha_h^h)^{-1}(\alpha_{h-1}^{h-1})A_h\overline{c^h}}$$

où A_h est la matrice inversible d'ordre $h-2$ donnée par $A_h = (\alpha_i^j)$, $i \leq j$ et $j \leq h-2$.

Supposons à présent $h \geq 4$ et considérons $(**)$ pour $j = h-2$. Nous avons :

$$\sum_l \alpha_i^l \alpha_{h-2}^{h-2}\overline{C_{lh-2}^h} + \alpha_i^l\alpha_{h-2}^{h-1}\overline{C_{lh-1}^h} = \alpha_{h-1}^h C_{ih-2}^{h-1} + \alpha_h^h C_{ih-2}^h, \quad \forall i < h-2.$$

Si les vecteur c^h et c^{h-1} (et donc $\overline{c^h}$ et $\overline{c^{h-1}}$) sont nuls, cette formule se réduit à

$$\sum_l \alpha_i^l \alpha_{h-2}^{h-2}\overline{C_{lh-2}^h} = \alpha_h^h C_{ih-2}^h, \quad \forall i < h-2$$

qui met en évidence un nouveau vecteur de structure de composantes

$$(C_{1h-2}^h, C_{2h-2,}^h \cdots, C_{h-3,h-2}^h).$$

Sinon le vecteur de composantes

$$(C_{1h-2}^h, C_{2h-2,}^h \cdots, C_{h-3,h-2}^h, C_{1h-1}^h, C_{2,h-1,}^h \cdots, C_{h-2,h-1}^h, C_{1h-2}^{h-1}, C_{2h-2,}^{h-1} \cdots, C_{h-3,h-2}^{h-1})$$

est un vecteur de structure laissé invariant par le changement de bases f.

De manière génénérale nous pouvons, en continuant ce procédé par exemple avec $h \geq 5$ et $j = h-3$, définir des vecteurs structurels invariants par le changement de bases qui remplaceront les vecteurs de structure en cas de nullité des vecteurs définis par les autres valeurs données à j. Ainsi la classification des algèbres de Lie nilpotentes se réduit à la réduction de ces vecteurs de structure.

Algèbres de Lie nilpotentes dont les vecteurs c^h sont non nuls.

Dans [V], Vranceanu s'intéresse à la classe des algèbres nilpotentes dont les vecteurs de structure $c^3, c^4, .., c^n$ sont non nuls.

Proposition 1 *Les vecteurs de structure sont tous non nuls si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est filiforme.*

En effet, les vecteurs c^h étant tous non nuls (ils restent non nuls dans tous changements de bases), les formules de transformations (T) montrent que l'on peut se ramener au cas où l'on a :

$$C_{12}^3 \neq 0, C_{13}^4 \neq 0, C_{14}^5 \neq 0, ..., C_{1n-1}^n \neq 0,$$

ce qui suffit à prouver la filiformité de $\mathfrak{g}$. La réciproque est tout aussi vraie, il suffit de regarder la forme générale des algèbres filiformes décrites dans [GK].

Conséquence. L'étude des algèbres de Lie nilpotentes dont les vecteurs de structure sont non nuls entreprise par Vranceanu dans [V] n'est rien d'autre que l'étude (la première dans cette direction) des algèbres de Lie filiformes. Le vocabulaire "filiforme" n'a été introduit que plus tard dans l'étude des algèbres de Lie par une approche géométrique. La classe des filiformes forme un ouvert de Zariski dans la variété des lois nilpotentes et joue donc un rôle primordial dans l'étude de la structure de cette variété. la mise en évidence de ces algèbres par Vranceanu prouve qu'il avait déjà compris l'intérêt de dégager cette famille.

3 La classification des algèbres de Lie filiformes

3.1 Quelques commentaires

La classification des algèbres de lie filiformes complexes est actuellement connue jusqu'en dimension 11 ([GJK]). Les premiers travaux de Umlauf contenaient bien entendu les prémices d'une telle classification mais les premières listes fiables se déduisaient des listes de Dixmier, Morosov et Vranceanu et concernaient les dimensions inférieures ou égales à 6. En 1992 étaient publiées les classification en dimension 7 et 8. Le point d'orgue est donné dans [G.J.K].

Nous allons rappeler dans ce qui suit comment Vranceanu a abordé le problème de classification des filiformes, illustrant ainsi l'approche générale des nilpotentes par les vecteurs de structure.

3.2 La classification des filiformes d'après Vranceanu

3.2.1 Dimension 3

Comme les vecteurs c^1 et c^2 sont nuls, les premières algèbres de Lie filiformes n'apparaissent qu'en dimension 3. Dans ce cas le vecteur de structure non nul c^3 a pour composante $c^3 = (C_{12}^3)$. Or on a

$$\overline{c^3} = (\overline{C_{12}^3}) = (\alpha_3^3)(\alpha_1^1\alpha_2^2)^{-1}c^3.$$

Il existe donc un changement de bases tel que

$$\overline{c^3} = (\overline{C_{12}^3}) = (1).$$

On en déduit l'existence d'une unique classe d'isomorphie représentée par l'algèbre définie par

$$[X_1, X_2] = X_3.$$

3.2.2 Dimension 4

Les vecteurs de structures sont $c^4 = (C_{13}^4, C_{23}^4)$ et $c^3 = (C_{12}^3)$. Par hypothèses ces vecteurs sont non nuls. Or nous avons établi les formules de transformations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_4^4 C_{13}^4 = \alpha_1^1\alpha_3^3\overline{C_{13}^4} + \alpha_1^2\alpha_3^3\overline{C_{23}^4} \\ \alpha_4^4 C_{23}^4 = \alpha_2^2\alpha_3^3\overline{C_{23}^4} \end{cases}$$

et

$$\overline{C_{12}^3} = (\alpha_3^3)(\alpha_1^1\alpha_2^2)^{-1}C_{12}^3.$$

Il existe donc un changement de bases tel que

$$\overline{C_{12}^3} = \overline{C_{23}^4} = 1; \overline{C_{13}^4} = 0.$$

Ainsi, toute algèbre filiforme de dimension 4 est isomorphe à l'algèbre de Lie donnée par :

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4. \end{cases}$$

3.2.3 Dimension 5

Des calculs analogues aux précédents conduisent à montrer que toute algèbre filiforme de dimension 5 est isomorphe à l'une des deux algèbres données par:

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_1, X_4] = X_5, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3 \\ [X_1, X_3] = X_4 \\ [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = X_5. \end{cases}$$

3.2.4 Dimension 6

Théorème 1 (V) *Toute algèbre de Lie filiforme de dimension 6 se réduit à l'une des deux formes canoniques :*

$$\mathfrak{g}_1(C_{23}^5, C_{23}^6) = \begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_4 = -\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_5 = -\omega_1 \wedge \omega_4 - C_{23}^5 \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_6 = -\omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_4 - C_{23}^6 \omega_2 \wedge \omega_3 \end{cases}$$

ou

$$\mathfrak{g}_2(C_{23}^5, C_{23}^6) = \begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_4 = -\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_5 = -\omega_1 \wedge \omega_4 - C_{23}^5 \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_6 = -\omega_1 \wedge \omega_5 - C_{23}^5 \omega_2 \wedge \omega_4 - C_{23}^6 \omega_2 \wedge \omega_3 \end{cases} .$$

Notons que dans ce théorème la réduction des paramètres n'est pas complète. Comparons avec la liste proposée dans [G.K]:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}_2(0,0) = \mathfrak{n}_1^6 \\ \mathfrak{g}_2(0,1) = \mathfrak{n}_2^6 \\ \mathfrak{g}_2(1,0) = \mathfrak{n}_4^6 \\ \mathfrak{g}_1(0,1) = \mathfrak{n}_3^6 \\ \mathfrak{g}_1(1,1) = \mathfrak{n}_5^6. \end{cases}$$

3.2.5 Dimension 7

Toute extension centrale de l'algèbre $\mathfrak{g}_1(C_{23}^5, C_{23}^6)$ n'est pas filiforme, le vecteur de structure c^7 étant necessairement nul. On en déduit

Proposition 2 (V) *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie filiforme de dimension 7, alors c'est une extension de l'algèbre $\mathfrak{g}_2(C_{23}^5, C_{23}^6)$ et ses équations de structure ont la forme suivante :*

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_4 = -\omega_1 \wedge \omega_3, \\ d\omega_5 = -\omega_1 \wedge \omega_4 - C_{23}^5 \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_6 = -\omega_1 \wedge \omega_5 - C_{23}^5 \omega_2 \wedge \omega_4 - C_{23}^6 \omega_2 \wedge \omega_3 \\ d\omega_7 = -\omega_1 \wedge \omega_6 - C_{25}^7 \omega_2 \wedge \omega_5 - (C_{23}^5 - C_{25}^7)\omega_3 \wedge \omega_4 - C_{23}^6 \omega_2 \wedge \omega_4 - C_{23}^7 \omega_2 \wedge \omega_3 \end{cases}$$

Une réduction complète des paramètres a été donnée dans [G.A]. Elle correspond à :

$$\begin{array}{rcll} (C_{23}^5, C_{23}^6, C_{25}^7, C_{23}^7) & = & (0,0,0,0): & \mathfrak{n}_8^7 \\ & = & (0,0,0,1): & \mathfrak{n}_7^7 \\ & = & (0,1,0,0): & \mathfrak{n}_6^7 \\ & = & (0,1,0,1): & \mathfrak{n}_5^7 \\ & = & (0,1,1,0): & \mathfrak{n}_4^7 \\ & = & (1,0,1,1): & \mathfrak{n}_3^7 \\ & = & (1,0,1,0): & \mathfrak{n}_2^7 \\ & = & (1+a,0,a,0): & \mathfrak{n}_1^7(a). \end{array}$$

4 Théorème des bases adaptées

Après avoir décrit les classifications ci dessus, Vranceanu fait les observations suivantes pour toutes les algèbres filiformes de dimension inférieure ou égale à 7 :

- Les constantes C_{1k}^h sont égales à δ_{h-1}^h
- $C_{ij}^h = 0$ dès que $i + j \geq h + 1$, $i, j \neq 1$.

et propose ainsi une généralisation en dimension quelconque qui va le conduire à énoncer un théorème de structure, appelé aujourd'hui théorème de la base adaptée.

4.1 Théorème

Supposons donnée une algèbre de Lie filiforme $\mathfrak{g}_{2p-1}$ de dimension $2p-1$ et d'équation de structure :

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \cdots \\ d\omega_h = -\omega_1 \wedge \omega_{h-1} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq h. \end{cases}$$

et considérons une algèbre filiforme $\mathfrak{g}_{2p}$ défini par extension centrale à partir de $\mathfrak{g}_{2p-1}$. La description des identités de Jacobi relative à l'équation de structure $d\omega_{2p}$ conduit au résultat suivant :

Théorème 2 *L'équation de structure $d\omega_{2p}$ a l'une des deux formes suivantes*

i)

$$d\omega_{2p} = -\omega_1 \wedge \omega_{2p-1} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq 2p$$

ii)

$$d\omega_{2p} = -\omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + \omega_3 \wedge \omega_{2p-2} - \cdots - (-1)^p \omega_p \wedge \omega_{p+1} + \sum C_{ij}^{2p} \omega_i \wedge \omega_j,$$

$i+j \leq 2p, i, j \neq 1$

Considérons à présent une algèbre filiforme $\mathfrak{g}_{2p+1}$. Alors si la sous algèbre $\mathfrak{g}_{2p}$ admet une structure donnée par l'équation ii du théorème précédent, le vecteur de structure c^{2p+1} de $\mathfrak{g}_{2p+1}$ est nul ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit donc que

$$d\omega_{2p} = -\omega_2 \wedge \omega_{2p-1} + \omega_3 \wedge \omega_{2p-2} - \cdots - (-1)^p \omega_p \wedge \omega_{p+1} + \sum C_{ij}^{2p} \omega_i \wedge \omega_j,$$

ce qui implique nécessairement que

$$d\omega_{2p+1} = -\omega_1 \wedge \omega_{2p} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq 2p+1$$

Théorème 3 *Toute algèbre de Lie filiforme de dimension impaire $2p+1$ admet comme équations de structure*

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \cdots \\ d\omega_{2p+1} = -\omega_1 \wedge \omega_{2p} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq 2p+1. \end{array}\right.$$

Toute algèbre de Lie filiforme de dimension paire $2p$ admet comme équations de structure soit

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \cdots \\ d\omega_{2p} = -\omega_1 \wedge \omega_{2p-1} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq 2p \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_2 = 0, \\ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \\ \cdots \\ d\omega_{2p-1} = -\omega_1 \wedge \omega_{2p-2} - \sum C_{ij}^h \omega_i \wedge \omega_j, \quad 2 \leq i < j, i+j \leq 2p-1 \\ d\omega_{2p} = -\omega_2 \wedge \omega_{2p-1} \cdots - (-1)^p \omega_p \wedge \omega_{p+1} + \sum C_{ij}^{2p} \omega_i \wedge \omega_j, \\ i+j \leq 2p, i,j \neq 1. \end{array}\right.$$

4.2 Applications

Les applications de ce résultat sont nombreuses. Citons en particulier l'étude des composantes irréductibles de la variété algébriques des lois nilpotentes (dans [V], Vranceanu détermine des familles remarquables de filiformes permettant d'approcher le résultat de réductibilité), l'étude des algèbres de Lie graduées (thèse de Michèle Vergne), l'étude des algèbres de Lie munies d'un tore de dérivation. Un certain nombre de ces résultats figurent dans [G.K].

BIBLIOGRAPHIE

[$A.G.1$] J.M. Ancochéa-Bermudez, M. Goze, Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7. Arch. Math., 52:2, 1989, 157-185.

[$A.G.2$] J.M. Ancochéa-Bermudez, M. Goze, Algèbres de Lie rigides dont le nilradical est filiforme.C.R.A.Sc. Paris, t. 312, sér. I, 21-24, 1991.

[D] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires de groupes de Lie nilpotentesIII. Canad. J. Math., 1958, v. 10, 321-348.

[$G.J.K$] J.R. Gômez, A. Jiménez-Merchan, Yu Khakimdjanov, Low-Dimensional Filiform Lie Algebras.J.P.A.A. 30, 1998, 133-158.

[$G.K$] M. Goze, Yu Khakimdjanov, *Nilpotent Lie Algebras.* Kluwer Academic Publishers, MIA 361, Dordrecht/Boston/London, 1996.

[$G.K2$] M. Goze, Yu Khakimdjanov, Some Nilpotent Lie Algebras and its Applications. In "Algebra and Operator Theory", Kluwer Acad. Publ., 1998.

[M] V.V. Morosov, Classification of nilpotent Lie algebras (in Russian). Isvestia Vys. Ucheb. Zav. 4, 1958, 161-171.

[V] Gh. Vranceanu Clasificarea Grupurilor lui Lie de rang zero. St. cerc. mat. I. 40-86. 1950

[V_1] Gh. Vranceanu. *Leçons de Géométrie différentielle.* Vol IV. Editura Academei Rep. Socialiste Romania. 1975

[Ve] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math., France, 98, 1970, 81-116.

[U] K.A. Umlauf. Uber die Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformatiosgruppen von Rang null. Thèse Leipzig. 1891.