Existence de solutions pour un modèle de drapé d'un tissu

Nadjombé Faré et Emmanuel Maitre

Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Haute-Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
Courriel : N.Fare@uha.fr, E.Maitre@uha.fr

Résumé. Nous établissons dans cet article l'existence d'un minimiseur d'une fonctionnelle énergie non convexe qui rend compte de la déformation d'un tissu soumis à son seul poids et fixé sur une partie de son bord. Un exemple typique est le cas d'une nappe sur une table. Nous nous plaçons dans l'hypothèse où le tissu est inextensible dans le sens des fibres, mais peut cisailler en membrane et fléchir. Nous utilisons les techniques développées dans [3], où le cisaillement membranaire était supposé nul. Notons que l'énergie étudiée met en jeu des tenseurs analogues à ceux de [5] et [6] auxquels nous avons ajouté un terme régularisant rendant compte de la variation d'angle de cisaillement.

Existence of solutions for a woven fabric drape model

Abstract. In this note we establish the existence of minimizer of a nonconvex energy functional. This functional is an energy of deformation of a woven fabric subject only to his own weight and fixed on a part of its boundary. A typical example is the case of a tablecloth on a table. We make the hypothesis that the fabric is inextensible in the direction of the fibers but can undergo membrane shear and flexion deformations. We use technics introduced in [3], in the no membrane shear case. The studied energy involves tensors analog to those of [5] and [6] to which we added a regularizing term accounting for shear angle variation.

Abridged English Version

We suppose that the fabric occupies initially a open bounded set $\Omega \times \{0\}$ of $\mathbb{R}^3$ where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ has a piecewise C^1 boundary. An admissible deformation of the initial configuration is an application φ which is injective from Ω into $\mathbb{R}^3$ i.e:

$$\varphi : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2) \to \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) \end{cases}$$

and satisfies:

(i) $\|\varphi_{,1}\| = 1$, $\|\varphi_{,2}\| = 1$ (the fibers are inextensionals),

(ii) $\|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\| \geq C_0$, where $0 < C_0 \leq 1$ depend on the considered fabric.

For the variational formulation of this problem, we make the Cosserat kinematic hypothesis. Assuming a linear elastic constitutive law and integrating with respect to the thickness the second tensor of Piola-Kirchhoff in the three-dimensional equilibrium equations, we obtain the following two-dimensional energy:

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[a_{\alpha\beta} \left(e_{\alpha\beta} \right)^2 + d_{\alpha\beta} \left(\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N(\varphi) \right)^2 \right] dx - \int_\Omega \sigma g \varphi_3 dx.$$

Because of the lack of coercivity of this functional, we have considered a regularization term which represents an energy of variation of the shear angle. By adding this term to the previous energy, we obtain the following mechanical model which we study like a minimization problem of the calculus of variations:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[G \left(\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2} \right)^2 + g_\alpha \left((\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2})_{,\alpha} \right)^2 + d_{\alpha\beta} \left(\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N(\varphi) \right)^2 \right] dx - \int_\Omega \sigma g \varphi_3 dx$$

We point out that the functional $W(\varphi)$ is not convex with respect to φ. Let

$$V = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \, : \, \|\varphi_{,1}\| = \|\varphi_{,2}\| = 1, \, \|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\| \geq C_0 \text{ in } \Omega \text{ and } \varphi = \varphi_0 \text{ on } \Gamma_0 \right\}$$

be the set of admissibles deformations.

The main result of this paper is:

Theorem : *There exists $\varphi \in V$ such that $W(\varphi) = \inf_V W$.*

Outline of the proof: *step 1:* we prove that W is proper.
step 2: we pick a minimization sequence $(\varphi^n)_{n\geq 0} \subset V$ and derive estimations in $H^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ using technics developped by [3] in the case $C_0 = 1$.
step 3: we prove that the nonlinear terms in the expression of $W(\varphi^n)$ converge weakly in $L^2(\Omega)$.
step 4: we obtain the weak lower semi-continuity of W with respect to the convergence of step 3, and deduce the existence of a solution which is limit of a subsequence of the minimization sequence.

1 Introduction

Dans l'étude d'un problème de drapé (i.e. l'ensemble des plis que forme un textile en déformation) où un tissu soumis à son seul poids, est maintenu sur une partie de son bord, il paraît raisonnable que l'étirement du tissu dans le sens des fibres soit négligé. Ainsi le modèle que nous étudions ici ne tient compte que de l'extension du tissu en cisaillement membranaire et de sa flexion (c'est un modèle membrane-flexion).
Dans ce qui suit, les indices grecs α, β ... prennent les valeurs 1 et 2 et nous adoptons la convention de sommation par rapport aux indices répétés. Nous désignons par $f_{,\alpha}$ la dérivée partielle d'une fonction f par rapport à la variable x_α et par $f_{,\alpha\beta}$ ses dérivées secondes. Si X désigne un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\|X\|$ est sa norme euclidienne; le produit vectoriel entre deux vecteurs u et v est noté $u\wedge v$, et le produit scalaire $u\cdot v$. La norme $\|\,\|_2$ représentera, suivant son argument, la norme sur $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ ou sur $L^2(\Omega,\mathbb{R})$. Enfin nous désignerons par C toutes les constantes dans les estimations, sans les différencier.
Nous supposons que le tissu occupe initialement un domaine $\Omega\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^3$ où $\Omega \subset\mathbb{R}^2$ est un ouvert borné de frontière de classe C^1 par morceaux. Nous désignons par Γ_0 une partie de mesure non nulle du bord $\partial\Omega$ de Ω où le tissu est fixé. La configuration de référence coïncide avec cette configuration initiale et un point X y est repéré dans un repère fixe (e_1,e_2,e_3) par $X=\varphi_0(x_1,x_2)=(x_1,x_2,0)$. Une déformation admissible de la configuration initiale est une application φ suffisamment régulière, injective de Ω à valeur dans $\mathbb{R}^3$ i.e. :

$$\varphi:\begin{cases}\Omega\to\mathbb{R}^3\\ x=(x_1,x_2)\to\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x))\end{cases}$$

vérifiant :
(i) $\|\varphi_{,1}\|=1$, $\|\varphi_{,2}\|=1$ (inextensionnalité dans le sens des fibres),
(ii) $\|\varphi_{,1}\wedge\varphi_{,2}\|\geq C_0$, où $0<C_0\leq 1$ dépend du tissu considéré.

Remarques :

1. *La condition (ii) signifie que les fibres de chaîne et de trame du tissu ne peuvent pas complètement s'aligner.*
2. *D. Coutand [4] considère le cas d'une coque avec $C_0 = 1$, c'est-à-dire sans cisaillement. Nous nous sommes placés dans le cas d'une configuration initiale plane mais le cas des coques pourraît être traité de façon analogue sans difficulté supplémentaire. Nous utilisons fondamentalement les techniques introduites dans [4] et [3].*

2 Formulation variationnelle

2.1 Origine et justification mécanique du modèle

Nous partons dans un premier temps d'un modèle tridimensionnel où le tissu occupe un domaine $\Theta=\Omega\times\,]-h,+h[\,\subset\mathbb{R}^3$. L'épaisseur $h>0$ du tissu étant très petite, nous nous plaçons sous l'hypothèse cinématique de Cosserat à un directeur inextensible en considérant que les déformations de la configuration initiale (plane) sont de la forme :

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\varphi(x_1,x_2)+x_3t(x_1,x_2)$$

où $t(x_1,x_2)$ est unitaire.
En calculant le tenseur des déformations tridimensionnel de Green-Saint Venant, on obtient

$$E_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha}.\varphi_{,\beta}-\delta_{\alpha\beta})+\frac{1}{2}x_3(\varphi_{,\alpha}.t_{,\beta}+\varphi_{,\beta}.t_{,\alpha})+\frac{1}{2}x_3^2t_{,\alpha}.t_{,\beta}\quad E_{3\alpha}=\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}.t\quad E_{33}=0.$$

En tronquant à l'ordre un en x_3, trois tenseurs de déformations interviennent dans l'expression de E : le tenseur de déformation en membrane, le tenseur de déformation en flexion et le tenseur de déformation en cisaillement transverse :

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_{\alpha\beta} & = & \frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha}\cdot\varphi_{,\beta}-\delta_{\alpha\beta}) \\ \chi_{\alpha\beta} & = & \frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha}\cdot t_{,\beta}+\varphi_{,\beta}\cdot t_{,\alpha}) \\ \gamma_\alpha & = & \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\cdot t \end{array}\right.$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronnecker.
De part sa structure, nous supposerons que le tissu se déforme sans cisaillement transverse, ce qui revient à annuler le dernier tenseur, c'est-à-dire $\gamma_\alpha = \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\cdot t = 0$. Dans ce cas le directeur t devient la normale extérieure à la surface moyenne du tissu que nous noterons désormais $N(\varphi)$. En dérivant γ, on peut éliminer t de l'expression du tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ qui devient : $\chi_{\alpha\beta} = -\varphi_{,\alpha\beta}\cdot N(\varphi)$.
Nous avons supposé que la loi de comportement du matériau est linéaire et de la forme $\Sigma_{ij} = R_{ijkl}E_{kl}$, où Σ est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, et R la matrice de rigidité (coefficients d'élasticité) du tissu considéré comme un matériau orthotrope. D'autre part l'équilibre élastique nous donne après application du principe des travaux virtuels (voir [1][2], [7]) et tenant compte de l'intégration suivant l'épaisseur du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\int_\Omega \left(\int_{-h}^{+h} \Sigma_{\alpha\beta}\delta E_{\alpha\beta}\right) dx_1dx_2dx_3 - \int_\Omega \sigma g \delta\varphi_3 dx = 0.$$

L'énergie de déformation qui en résulte est la suivante (les coefficients qui interviennent dans cette expression sont des constantes d'élasticité) :

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[a_{\alpha\beta}\left(e_{\alpha\beta}\right)^2 + d_{\alpha\beta}\left(\varphi_{,\alpha\beta}\cdot N(\varphi)\right)^2\right] dx - \int_\Omega \sigma g\varphi_3 dx$$

En appliquant l'hypothèse (i) l'expression de l'énergie devient :

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[G\left(\varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2}\right)^2 + d_{\alpha\beta}\left(\varphi_{,\alpha\beta}\cdot N(\varphi)\right)^2\right] dx - \int_\Omega \sigma g\varphi_3 dx$$

Nous signalons que sous cette forme, nous n'avons pu obtenir de résultat d'existence de solutions car la fonctionnelle $I(\varphi)$ n'est vraisemblablement pas coercive. En effet si on considère une suite minimisante φ^n dans l'ensemble des déformations admissibles, les termes de la suite $\varphi^n_{,\alpha\alpha}\cdot\varphi^n_{,\beta}$ avec $\alpha \neq \beta$ semblent délicats à controler. Pour pallier ce manque de coercivité de la fonctionnelle $I(\varphi)$, nous avons considéré un terme régularisant provenant de la variation de l'angle de cisaillement. Nous avons par ailleurs consulté un spécialiste du textile[1], pour qui la variation d'angle de cisaillement est une grandeur qu'il est raisonnable de voir apparaître dans un tel modèle.

2.2 Modèle mathématique

En rajoutant ce terme régularisant, nous obtenons un modèle mécanique bidimensionnel, que nous étudions mathématiquement ci-dessous, et dont l'énergie de déformation est donnée par :

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[G\left(\varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2}\right)^2 + g_\alpha\left(\left(\varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2}\right)_{,\alpha}\right)^2 + d_{\alpha\beta}\left(\varphi_{,\alpha\beta}\cdot N(\varphi)\right)^2\right] dx - \int_\Omega \sigma g\varphi_3 dx$$

où $N(\varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $N(\varphi) = \frac{\varphi_{,1}\wedge\varphi_{,2}}{\|\varphi_{,1}\wedge\varphi_{,1}\|}$ est la normale à la surface, $g_\alpha > 0$, $d_{\alpha\beta} > 0$ et $G > 0$ sont des coefficients d'élasticité du tissu, $\sigma > 0$ est la densité surfacique du tissu et $g > 0$ la gravité. Par la suite on écrira simplement N pour $N(\varphi)$.
Le premier terme de la fonctionnelle représente l'énergie de déformation en cisaillement de membrane, le second terme est celui de la variation de l'angle de cisaillement, le troisième l'énergie de déformation en flexion et le dernier terme l'énergie potentielle.
Notons que la fonctionnelle W n'est pas convexe par rapport à la variable vectorielle φ. Nous étudions W sur un ensemble des déformations admissibles V (non convexe), $V \subset H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ défini par :

$$V = \left\{\varphi \in H^2(\Omega,\mathbb{R}^3)\ :\ \|\varphi_{,1}\| = \|\varphi_{,2}\| = 1,\ \|\varphi_{,1}\wedge\varphi_{,2}\| \geq C_0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}$$

[1] Ron Postle, invité par l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Textiles de Mulhouse.

muni de la norme de l'espace $H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nous cherchons à prouver l'existence d'une déformation $\varphi \in V$ telle que $W(\varphi) = \inf_V W$.
Dans un premier temps nous énonçons ce résultat d'existence, ensuite nous procédons à sa démonstration qui se déroule en quatre étapes. Dans la première étape nous montrons que W est une fonctionnelle propre et nous établissons une inégalité de coercivité, dans la deuxième nous établissons des estimations *a priori* qui mènent à une convergence faible dans H^2 d'une sous-suite minimisante de W. L'étape trois consiste à passer à la limite dans les termes non linéaires de W. Enfin la quatrième étape est consacrée à prouver une faible semi-continuité inférieure de W et à la déduction du résultat.

3 Enoncé du résultat

Théorème :
Il existe $\varphi \in V$ *telle que* $W(\varphi) = \inf\limits_V W$.

Démonstration :
Etape 1 : W est une fonctionnelle propre.
En effet $\varphi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0) \in V$ et on a $W(\varphi_0) = 0 < \infty$; donc $W(\varphi)$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. D'autre part on a $\inf_V W > -\infty$. En effet :

$$-\int_\Omega \sigma g \varphi_3 \geq -\sigma g (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_3\|_2 \geq -\sigma g C(\Omega) ||\nabla \varphi_3||_2$$

par les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré. D'autre part, sur V on a $\|\varphi_{,1}\| = \|\varphi_{,2}\| = 1$ donc $||\nabla\varphi_3||_2^2 = \int_\Omega \varphi_{3,1}^2 + \varphi_{3,2}^2 dx \leq \int_\Omega \|\varphi_{,1}\|^2 + \|\varphi_{,2}\|^2 dx = 2\,\mathrm{mes}\,\Omega$. Finalement,

$$\exists C > 0, \qquad W(\varphi) \geq \frac{G}{2} \|\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2}\|_2^2 + \frac{g_\alpha}{2} \|(\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2})_{,\alpha}\|_2^2 + \frac{d_{\alpha\beta}}{2} \|\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N\|_2^2 - C \tag{1}$$

Etape 2 : estimations
Soit $(\varphi^n)_{n \geq 0} \subset V$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que $W(\varphi^n) \to \inf_V W$ quand $n \to \infty$.
(i) Comme $\left\|\varphi^n_{,1}\right\|^2 = 1$ et $\left\|\varphi^n_{,2}\right\|^2 = 1$, et que Ω est borné, nous avons

$$\left\|\varphi^n_{,1}\right\|_2^2 = \left\|\varphi^n_{,1}\right\|_2^2 = \mathrm{mes}\,\Omega$$

et par application de l'inégalité de Poincaré à la fonction $\varphi - \varphi_0$ qui s'annule sur Γ_0,

$$\exists C > 0, \qquad \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \leq C.$$

(ii) $a)$ L'idée de [3] et [4] est de dériver les contraintes de V. Dans notre cas il s'agit seulement de $\left\|\varphi^n_{,1}\right\|^2 = 1$, et $\left\|\varphi^n_{,2}\right\|^2 = 1$, le cisaillement n'étant plus supposé nul. On obtient

$$\varphi^n_{,11} \cdot \varphi^n_{,1} = 0, \quad \varphi^n_{,12} \cdot \varphi^n_{,1} = 0, \quad \varphi^n_{,22} \cdot \varphi^n_{,2} = 0, \quad \varphi^n_{,12} \cdot \varphi^n_{,2} = 0.$$

On en déduit que le vecteur $\varphi^n_{,12}$ est colinéaire au vecteur $\varphi^n_{,1} \wedge \varphi^n_{,2}$ (car par hypothèse $\varphi^n_{,1}$ et $\varphi^n_{,2}$ ne sont pas colinéaires en tout point de Ω) et donc à la normale $N_n := N(\varphi^n)$.
Par conséquent $\varphi^n_{,12} \cdot N_n = \epsilon_n \left\|\varphi^n_{,12}\right\|$ avec $\epsilon_n = \pm 1$ (dépendant du point $(x_1, x_2) \in \Omega$ *a priori*) et donc $W(\varphi^n) \geq \frac{d_{12}}{2} \left\|\varphi^n_{,12}\right\|^2 - C$ pour tout n d'après (1). On en déduit que :

$$\exists C > 0, \qquad \left\|\varphi^n_{,12}\right\|_2 \leq C.$$

$b)$ D'autre part on a : $\left(\varphi^n_{,1} \cdot \varphi^n_{,2}\right)_{,1} = \varphi^n_{,11} \cdot \varphi^n_{,2} + \varphi^n_{,1} \cdot \varphi^n_{,12} = \varphi^n_{,11} \cdot \varphi^n_{,2}$, donc $W(\varphi^n) \geq \frac{g_1}{2} \left\|\varphi^n_{,11} \cdot \varphi^n_{,2}\right\| - C$ d'après (1). Nous en déduisons que

$$\exists C > 0, \qquad \left\|\varphi^n_{,11} \cdot \varphi^n_{,2}\right\|_2 \leq C$$

et symétriquement

$$\exists C > 0, \qquad \left\|\varphi^n_{,22} \cdot \varphi^n_{,1}\right\|_2 \leq C.$$

Considérons le cas de la suite $\varphi^n_{,11}$ (celui de la suite $\varphi^n_{,22}$ est analogue par symétrie) :
Nous avons d'après les inégalités précédentes et (1) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left\|\varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2}\right\|_2 & \leq & C, \\ \varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,1} & = & 0, \\ \left\|\varphi^n_{,11}\cdot N_n\right\|_2 & \leq & C. \end{array} \right. \tag{2}$$

En s'inpirant toujours de [3], exprimons $\varphi^n_{,11}$ dans la base locale $\left(\varphi^n_{,1},\, \varphi^n_{,2},\, N_n\right)$:

$$\varphi^n_{,11} = \alpha^n\varphi^n_{,1} + \beta^n\varphi^n_{,2} + \gamma^n N_n$$

d'où $0 = \varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,1} = \alpha^n + \beta^n\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2}$ et $\varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2} = \alpha^n\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2} + \beta^n$. Par conséquent on obtient en remarquant que pour $\varphi^n_{,1}$ et $\varphi^n_{,2}$ unitaires : $\left\|\varphi^n_{,1}\wedge\varphi^n_{,2}\right\|^2 + (\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2})^2 = \left\|\varphi^n_{,1}\right\|^2\left\|\varphi^n_{,2}\right\|^2 = 1$,

$$\beta^n = \frac{\varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2}}{\left\|\varphi^n_{,1}\wedge\varphi^n_{,2}\right\|^2} \text{ et } \gamma^n = \varphi^n_{,11}\cdot N_n.$$

Comme $\left\|\varphi^n_{,11}\right\|^2 = \beta^n(\varphi^n_{,2}\cdot\varphi^n_{,11}) + \gamma^n(N_n\cdot\varphi^n_{,11})$ on a : $\left\|\varphi^n_{,11}\right\|^2 \leq \frac{(\varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2})^2}{C_0^2} + (\varphi^n_{,11}\cdot N_n)^2$ ce qui entraîne d'après (2)

$$\exists C>0, \qquad \left\|\varphi^n_{,11}\right\|_2^2 \leq C.$$

On montre de même que :

$$\exists C>0, \qquad \left\|\varphi^n_{,22}\right\|_2^2 \leq C.$$

On peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite convergente) qu'il existe $\varphi \in H^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\varphi^n \rightharpoonup \varphi \text{ quand } n\to\infty \text{ dans } H^2(\Omega,\mathbb{R}^3) \text{ faible et } H^1(\Omega,\mathbb{R}^3) \text{ fort,}$$

par compacité de l'injection de $H^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$. Notons que nous avons $\varphi \in V$. En effet la convergence forte dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ implique quitte à extraire une sous-suite, $\left\|\varphi^n_{,\alpha}\right\| \longrightarrow \|\varphi_{,\alpha}\|$ et $\left\|\varphi^n_{,1}\wedge\varphi^n_{,2}\right\| \longrightarrow \|\varphi_{,1}\wedge\varphi_{,2}\|$ presque partout sur Ω. Enfin on a $\varphi_{|\Gamma_0} = \varphi_0$ car l'application trace est un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\Gamma_0,\mathbb{R}^3)$.

Remarque : *L'apport des termes émanant de l'énergie liée à la variation de l'angle de cisaillement est très important car sans ceux-ci, on ne peut obtenir le fait que les dérivées secondes $\varphi^n_{,\alpha\beta}$ sont bornées dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et par conséquent que φ^n est borné dans l'espace $H^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$.*

Etape 3 : convergence faible des termes non linéaires

(*i*) La convergente forte de φ^n vers φ dans $H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et les contraintes $\left\|\varphi^n_{,1}\right\| = \left\|\varphi^n_{,2}\right\| = 1$ impliquent que $\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2} \longrightarrow \varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2}$ fortement dans $L^2(\Omega,\mathbb{R})$. En effet on a

$$\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2} - \varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2} = \varphi^n_{,1}\cdot(\varphi^n_{,2}-\varphi_{,2}) + (\varphi^n_{,1}-\varphi_{,1})\cdot\varphi_{,2}$$

donc

$$\left|\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2} - \varphi_{,1}\cdot\varphi_{,2}\right| \leq \left\|\varphi^n_{,1}\right\|\left\|\varphi^n_{,2}-\varphi_{,2}\right\| + \|\varphi_{,2}\|\left\|\varphi^n_{,1}-\varphi_{,1}\right\|$$

d'où le résultat car $\varphi^n_{,1}$ et $\varphi_{,2}$ sont unitaires.
(*ii*) D'autre part nous avons : $(\varphi^n_{,1}\cdot\varphi^n_{,2})_{,1} = \varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2}$
Pour déduire la convergence faible de $\varphi^n_{,11}\cdot\varphi^n_{,2}$ vers $\varphi_{,11}\cdot\varphi_{,2}$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R})$, nous appliquons le lemme suivant dû à [3], page 272 :

Lemme: *Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ faiblement, $v_n \longrightarrow v$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ fortement et $\|v_n\| = \|v\| = 1 \quad \forall n$, alors $u_n\cdot v_n \rightharpoonup u\cdot v$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ faiblement.*

(*iii*) Nous savons que : $\varphi^n_{,\alpha\beta} \rightharpoonup \varphi_{,\alpha\beta}$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ faiblement.
D'autre part nous avons $N_n \longrightarrow N$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ fortement.
Par le même lemme nous concluons que $\varphi^n_{,\alpha\beta}\cdot N_n \rightharpoonup \varphi_{,\alpha\beta}\cdot N$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ faiblement car $\|N_n\| = \|N\| = 1$.

Etape 4 : semi-continuité inférieure de W

Comme $\varphi^n \longrightarrow \varphi$ dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ fort le terme $\int_\Omega \sigma g \varphi_3^n dx$ (terme linéaire en φ^n) converge vers $\int_\Omega \sigma g \varphi_3 dx$. D'autre part la fonctionnelle de $\left(L^2(\Omega, \mathbb{R})\right)^6$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(u, v_1, v_2, w_{11}, w_{22}, w_{12}) \longmapsto \frac{1}{2} \int_\Omega \left(Gu^2 + g_\alpha v_\alpha^2 + d_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}^2\right) dx$$

est convexe et continue pour la topologie forte de $\left(L^2(\Omega, \mathbb{R})\right)^6$, donc semi-continue inférieurement pour sa topologie faible. Par suite W est faiblement semi-continue inférieurement pour les convergences obtenues à l'étape 3. Nous avons donc :

$$\inf_{\psi \in V} W(\psi) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} W(\varphi^n) \geq W(\varphi)$$

La fonction $\varphi \in V$ limite de cette sous-suite de $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ réalise donc l'infimum de W.

4 Conclusion

Le résultat précédent prouve donc que l'infimum de W sur V est atteint pour une déformation $\varphi \in V$. Pour autant ceci n'exclut pas que W puisse prendre des valeurs plus petites pour d'autres déformations n'appartenant pas à V. Cependant, pour les textiles que nous avons considéré (tissés), V semble être une classe raisonnable de déformations puisque les fibres sont quasiment inextensibles mais peuvent pivoter les unes par rapport aux autres (cisaillement).

Notons aussi que ce modèle a été implémenté numériquement avec succès (article en préparation).

References

[1] P.G. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris **1986**.

[2] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity II, Theory of plates*, North Holland **1997**.

[3] P.G. Ciarlet and D.Coutand, *An existence Theorem for nonlinearly elastic flexural shells*, J.Elasticity, 50, 261-277. **1998.**

[4] D. Coutand, *Existence d'un minimiseur pour le modèle proprement invariant de plaque en flexion non linéairement élastique*, C.R.Acad.Sci, Paris, série I, 324, 245-248, **1997.**

[5] V. Lods and B. Miara, *Nonlinearly Elastic Shell Models: A Formal Asymptotic Approach. II: The Flexural Mode*l, Arch. Rational Mech. Anal. 142, 355-374, **1998**.

[6] D. Fox, A. Raoult and J.C Simo, *A justification of nonlinear properly invariant plate theories, Arch. Rat. Mech. Anal.*, 124, 157-199, **1993.**

[7] T.J. Kang and W.R. Yu, *Drape simulation of woven fabric by using finite-element method*, J. Text. Inst., 86 No. 4, **1995**.