Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est l'étude des structures affines sur une algèbre de Lie ce qui correspond au problème d'existence de connexions affines invariantes à gauche sur un groupe de Lie.

L'existence d'une telle structure munie l'espace vectoriel sous jacent à l'algèbre de Lie d'une autre structure d'algèbre appelée algèbre symétrique gauche ou algèbre de Vinberg qui, par antisymétrie, redonne la structure d'algèbre de Lie.

Dans ce travail on propose une approche de ces algèbres au travers des algèbres admissibles. Par définition, une algèbre est admissible si le produit $X.Y$ vérifie que $XY - YX$ est un crochet de Lie. La classe des algèbres admissibles contient en particulier les algèbres de Lie, les algèbres de Vinberg, les algèbres associatives... La variété algébrique des algèbres admissibles est naturellement fibrée au dessus de la variété des algèbres de Lie. Le problème d'existence d'une structure affine revient à examiner l'intersection de la sous-variété des algèbres de Vinberg avec les fibres. L'idée de déformer une structure d'algèbre de Lie considérée comme algèbre admissible en une structure d'algèbre de Vinberg appartenant à la même fibre est donc naturelle. Ceci conduit à définir de manière précise les cohomologies de ces algèbres et de connaître précisemment les opérades associées à ces algèbres.

Une deuxième approche plus géométrique est liée aux travaux de Benoist et de Burde. Le problème d'existence des structures affines sur les algèbres nilpotentes avait été posé par J. Milnor. N. Boyom avait répondu par l'affirmative pour une classe précise d'algèbres nilpotentes, mais Benoist, en exhibant un contre exemple en dimension 11 montrait que toutes ces algèbres ne possèdent pas de telles structures. Burde donna des contre exemples en dimension 10. Une étude rapide des exemples de Benoist et de Burde montre que ces algèbres sans structure affine rentrent dans la famille des algèbres de Lie filiformes (nilindex maximal) et, en dimension impaire, elles sont munies d'une forme linéaire de contact. On s'est donc attaché dans ce travail à examiner l'existence de structures affines pour de telles algèbres.

Notons enfin que les structures affines sur le cas abélien ont fait l'objet de pas mal de travaux. On sait en particulier classer toutes les structures affines complètes (i.e connexions complètes) de dimension 2 et 3 et on sait donc qu'il existe dès la dimension 6 une infinité de telles structures. Ici, on s'est interessé au cas non complet afin d'avoir toutes les structures pour les algèbres abéliennes de dimension 2 et 3. Cette approche repose sur une étude parallèle des algèbres associatives commutatives réelles non unitaires.

Dans le chapitre 1, on rappelle les définitions des structures affines et les liens entre structures affines et représentations, ainsi que les résultats classiques sur l'existence de structures affines comme l'existence de telles structures pour toute algèbre symplectique, pour toute algèbre nilpotente munie d'une dérivation inversible, pour les algèbres nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7. On définit un produit scalaire associé à une connexion affine, ce qui permet dans certains cas de munir le groupe de Lie associé d'une sructure hessienne. On construit également, pour des représentations autres que la représentation adjointe, qui intervient dans le cas de la structure affine associée à une forme symplectique, des structures affines naturelles. Dans le chapitre 2 on s'intéresse plus particulièrement aux algèbres de Lie filiformes. On construit, en généralisant les constructions connues, de nouvelles structures pour les algèbres munies de dérivations non inversibles mais dont la restriction à l'algèbre de dérivation est inversible. En conséquence, toute algèbre filiforme non caractéristiquement nilpotente est munie d'une structure affine. Puis on généralise cette construction au cas non filiforme. On montre qu'il existe des structures non complètes sur les algèbres filiformes et que les structures complexes ne peuvent pas servir à construire de nouvelles structures affines pour ces algèbres. Le chapitre 3 est consacré aux algèbres abéliennes. On donne toutes les structures affines complès ou non sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ après avoir étudié les classifications des algèbres commutatives associatives réelles de dimension 2 et 3. On étudie leur rigidité et on décrit l'action affine associée à chaque structure affine ainsi que sa complétude ou non. Les structures affines invariantes sur les tores $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{T}^3$ en découlent. Dans le chapitre 4, on revient au contre exemple de Benoist en étudiant plus particulièrement la propriété d'admettre une forme de contact. Les algèbres de contact étant des extensions de dimension 1 des algèbres symplectiques qui, elles, admettent toujours des structures affines, on cherche des conditions algébriques nécessaires à l'obtention d'une structure affine sur une algèbre de contact à partir d'une structure affine de son algèbre symplectique associée.

On étudie ensuite, dans le chapitre 5, le problème de l'existence des structures affines par le biais des algèbres Lie admissibles et des opérades. Les algèbres Lie admissibles sont classées en 6 familles d'après l'action invariante d'un sous groupe du groupe symétrique $\sum_3$ sur l'associateur. Parmi ces 6 familles, on a les algèbres associatives, les algèbres de Vinberg. On définit les modules admissibles sur les algèbres de Lie admissibles, les opérades associées à chacune de ces classes d'algèbres Lie admissibles qui sont toutes quadratiques, on étudie les opérades duales. On définit une cohomologie admissible qui respecte les cohomologies déjà définies comme la cohomologie de Hochschild pour les algèbres associatives, la cohomologie de Chevalley pour les algèbres de Lie, la cohomologie de Harrison pour les algèbres associatives commutatives. Il est alors possible de donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'une algèbre de Lie considérée comme algèbre Lie admissible se déforme en une algèbre de Vinberg dans la variété des algèbres Lie admissibles.

Dans l'annexe, chapitre 6, on étudie les structures complexes invariantes et bi-invariantes sur les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles. On montre que les algèbres filiformes ne possèdent pas de telles structures et on fait la classification des algèbres résolubles munies de structures complexes bi-invariantes et invariantes.

Chapitre 1

Structures affines sur les Algèbres de Lie

1.1 Variétés affines

Définition 1.1.1 *Une connexion affine sur une variété M est une loi ∇ qui fait correspondre à chaque champ de vecteurs X une application linéaire ∇_X de $\mathcal{D}^1(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs dans lui-même satisfaisant aux deux conditions suivantes*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \nabla_{fX+gY} & = & f\nabla_X + g\nabla_Y; \\ (2) & \nabla_X(fY) & = & f\nabla_X(Y) + (Xf)Y \end{array}$$

pour $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$. L'opérateur ∇_X est appelé différentielle covariante de direction X.

Rappelons quelques résultats sur l'opérateur ∇.

1. Supposons que M ait une structure affine ∇ et soit U une sous-variété ouverte de M. Soient $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$. Si X ou Y est identiquement nul sur U, alors $\nabla_X(Y)$ est nul sur U.

En effet supposons que Y s'annule sur U. Soit $p \in U$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Pour montrer que $(\nabla_X(Y)g)(p) = 0$, on utilise une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que $f(p) = 0$ et $f = Id$ en-dehors de U. Alors $fY = Y$ et

$$\nabla_X(Y)g = \nabla_X(fY)g = f\left(\nabla_X(Y)\right)g + (Xf)\,(Yg)$$

qui s'annule en p. Avec la même fonction f, on obtient

$$\nabla_X(Y)g = \nabla_{fX}(Y)g = f\nabla_X(Y)g$$

qui s'annule aussi en p. ■

Une connexion affine ∇ sur M induit une connexion affine ∇_U sur une sous-variété affine quelconque de M. En effet, si X et Y sont deux champs de vecteurs sur U, pour tout $p \in U$ il existe des champs de vecteurs X' et Y' sur M qui coïncident avec X et Y sur un voisinage ouvert V de p. On pose

$$((\nabla_U)_X(Y))_q = (\nabla_{X'}(Y'))_q$$

pour $q \in V$. D'après le lemme ci-dessus, la partie droite de l'équation est indépendante du choix de X' et Y'. Donc la loi

$$\nabla_U : X \to (\nabla_U)_X \quad ,$$

$X \in \mathcal{D}^1(M)$, est une connexion affine sur U.

Définition 1.1.2 *On appelle tenseur de courbure de la connexion affine ∇ le tenseur C défini par*

$$C(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

On appelle tenseur de torsion de ∇ le tenseur T défini par

$$T(X,Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$$

Dans tout ce mémoire nous nous intéresserons surtout aux connexions affines sans courbure ni torsion c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y] &= 0 \\ \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} &= 0. \end{aligned}$$

Le lien entre connexion affine ∇ et applications affines peut se résumer ainsi :

Soit G un groupe de Lie opérant simplement et transitivement sur une variété différentiable X. Soit $U \subset X$ un ouvert et $f : U \to X$ une application différentiable. L'application f est appelée localement-(X,G) si pour toute carte $U_i \subset U$, il existe $g_i \in G$ tel que la restriction de g_i à $U_i \subset X$ soit égale à la restriction de f à $U_i \subset U$. Soit M une variété différentiable de même dimension que X. Un $(X,G)-$atlas sur M est une paire (U,ϕ) où U est un recouvrement ouvert de M et $\phi = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to X\}_{U_\alpha \in U}$ une collection de cartes locales telle que pour toute paire $(U_\alpha, U_\beta) \in U \times U$ la restriction de $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ à $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ est localement-(X,G). Enfin une $(X,G)-$structure sur M est un $(X,G)-$atlas maximal et M munie d'une $(X,G)-$structure est appelée une $(X,G)-$variété. Cette notion permet de transporter la structure de l'espace affine de dimension n sur une variété de même dimension via un groupe de Lie G, groupe des transformations affines.

Soit $Aff(\mathbb{R}^n)$ le groupe des transformations affines donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad / \quad A \in GL_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ce groupe opère sur l'espace affine réel $\left\{ (v,1)^t \quad / \quad v \in \mathbb{R}^n \right\}$ de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.1.3 *Soit M une variété de dimension n. Une $(X,G)-$structure sur M est appelée structure affine sur M si X est l'espace affine réel de dimension n, $\mathbb{R}^n$, et si $G = Aff(\mathbb{R}^n)$. M est appelée variété affine.*

Proposition 1.1.4 *Il y a une correspondance naturelle entre structures affines sur la variété M et connexions affines sans courbure ni torsion ∇ sur M.*

Ainsi une variété lisse M de dimension n est munie d'une structure affine si elle admet un atlas (U_i, ϕ_i) tel que les changements de cartes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient des transformations affines locales de $\mathbb{R}^n$.

La donnée d'une structure affine sur M équivaut donc à la donnée d'une connexion linéaire ∇ sur M sans courbure ni torsion. Une transformation de (M, ∇) est un difféomorphisme de M qui préserve ∇.

Supposons que ∇ soit une connexion affine sur M et que Φ soit un difféomor- phisme de M. On peut définir une nouvelle connexion affine sur M, ∇', en posant

$$\nabla'_X(Y) = (\nabla_{X^\Phi}(Y^\Phi))^{\Phi^{-1}} \qquad X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$$

Rappelons ce que signifie Y^Φ. Soient M et N des variétés C^∞ et Φ une application différentiable de M dans N. Soient X et Y des champs de vecteurs de M et N respectivement. Ils sont dits Φ-reliés si

$$d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)} \qquad \text{pour tout } p \in M \qquad (*)$$

Il est facile de voir que c'est équivalent à

$$(Yf) \circ \Phi = X(f \circ \Phi) \qquad \text{pour tout } f \in C^\infty(N)$$

Il est plus commode d'écrire

$$d\Phi \cdot X = Y$$

ou

$$X^\Phi = Y$$

au lieu de $(*)$. Supposons que $d\Phi \cdot X_i = Y_i$ $(i = 1, 2)$. Alors $d\Phi \cdot [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]$. Supposons que Φ est un difféomorphisme de M dans lui-même et notons $f^\Phi = f \circ \Phi^{-1}$ pour tout $f \in C^\infty(M)$. Alors si $X \in \mathcal{D}^1(M)$,

$$(fX)^\Phi = f^\Phi X^\Phi, \qquad (Xf)^\Phi = X^\Phi f^\Phi.$$

Définition 1.1.5 *Soit ∇ une connexion affine sur M et Φ est un difféomorphisme de M. On dira que Φ est une transformation affine asociée à la connexion ∇ si $\nabla'_X(Y) = \nabla_X Y$ pour tout $X, Y \in \mathcal{D}^1(M)$.*

1.2 Connexions affines invariantes sur un groupe de Lie

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1 *Soit (G, ∇) un groupe de Lie muni d'une connexion affine ∇. On dira que (G, ∇) est un groupe de Lie affine si la connexion ∇ est invariante à gauche ce qui revient à dire que les multiplications à gauche $L_\sigma : \tau \to \sigma\tau$ de G sont des transformations affines de (G, ∇).*

Dans ce cas ∇ est entièrement défini par son action sur $T_eG = \mathfrak{g}$. Il induit donc une opération bilinéaire, notée toujours ∇

$$\nabla : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y] = 0 \\ \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

1.2.2 Structures affines sur une algèbre de Lie

Le groupe de Lie $Aff(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^n$. Il est constitué des matrices

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Ce groupe opère sur l'espace affine réel $\widetilde{\mathbb{R}}^n = \left\{ (v,1)^t \quad / \quad v \in \mathbb{R}^n \right\}$ par

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son algèbre de Lie notée $aff(\mathbb{R}^n)$ est l'algèbre linéaire

$$aff(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad / \quad A \in gl_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Définition 1.2.2 *Une structure affine sur une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un morphisme d'algèbres de Lie*

$$\psi : \mathfrak{g} \to aff(\mathbb{R}^n)$$

Considérons une représentation affine du groupe de Lie G, c'est à dire un homomorphisme

$$\varphi : G \to Aff(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $g \in G$, $\varphi(g)$ est une transformation affine de l'espace affine $\widetilde{\mathbb{R}}^n$. Cette représentation induit une structure affine sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Soit Ψ un morphisme donnant une structure affine sur $\mathfrak{g}$:

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \Psi(X) = \begin{pmatrix} A(X) & b(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons

$$\nabla(X,Y) = b^{-1}\left(A(X).b(Y)\right)$$

où $b : A(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}^n$ est supposé bijectif.

Comme Ψ est une représentation affine de $\mathfrak{g}$ cela implique que l'opérateur bilinéaire ∇ vérifie les relations $(*)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie affine. Réciproquement, si $\nabla(X,Y)$ est induit par une connexion invariante à gauche sur un groupe de Lie affine d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et si L_X est l'opérateur sur $\mathfrak{g}$ défini par $L_X(Y) = \nabla(X,Y)$, alors l'application

$$X \to \begin{pmatrix} L_X & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

définit une structure affine sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il y a équivalence entre l'existence d'une connexion ∇ sur $\mathfrak{g}$ (i.e. d'une connexion affine invariante à gauche ∇ sur un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{g}$) et l'existence d'une structure affine sur $\mathfrak{g}$.

Remarque : Si Ψ est une structure affine sur $\mathfrak{g}$, elle définit une représentation

$$\Psi(X) = \begin{pmatrix} A(X) & b(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et une connexion ∇. Cette dernière induit une représentation affine

$$\begin{pmatrix} L_X & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est équivalente à Ψ (et égal si $b = Id$).

1.2.3 Structure symétrique gauche associée à une structure affine

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une structure affine. Alors la connexion ∇ définit un produit bilinéaire sur l'espace vectoriel sous-jacent $A(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Ce produit que l'on peut noter

$$\begin{array}{ccc} A(\mathfrak{g}) \times A(\mathfrak{g}) & \to & A(\mathfrak{g}) \\ (X,Y) & \mapsto & X.Y \end{array}$$

vérifie

1) $X.(Y.Z) - Y.(X.Z) = (X.Y).Z - (Y.X).Z$

2) $X.Y - Y.X = [X,Y]$

pour tout $X, Y, Z \in A(\mathfrak{g})$.

Définition 1.2.3 *Un tel produit est appelé produit symétrique gauche. Un espace vectoriel V muni d'un produit symétrique gauche est appelé algèbre symétrique gauche (ou également algèbre de Vinberg).*

Ainsi l'espace vectoriel $A(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'une structure affine est muni de deux lois d'algèbres, une loi d'algèbre de Lie et une loi d'algèbre symétrique gauche reliées par

$$X.Y - Y.X = [X,Y]$$

1.2.4 Structures affines complètes

Définition 1.2.4 *Une structure affine sur $\mathfrak{g}$ est dite complète si l'endomorphisme*

$$\theta_X : \begin{array}{ccc} A(\mathfrak{g}) & \to & A(\mathfrak{g}) \\ Y & \mapsto & Y + Y.X \end{array}$$

est bijectif pour tout $X \in A(\mathfrak{g})$.

Théorème 1.2.5 (H) *Ceci est équivalent à l'une des propriétés suivantes*

a)

$$R_X : \begin{array}{ccc} A(\mathfrak{g}) & \to & A(\mathfrak{g}) \\ Y & \mapsto & Y.X \end{array}$$

est nilpotent pour tout $X \in A(\mathfrak{g})$

b) $tr(R_X) = 0$ pour tout $X \in A(\mathfrak{g})$.

Une structure affine complète correspond à une connexion affine invariante à gauche complète sur un groupe de Lie connexe associé à l'algèbre de Lie donnée.

1.3 Représentation fidèle nilpotente associée

Soit ∇ une structure affine sur $\mathfrak{g}$ (par abus de langage on identifiera la structure affine et l'opérateur de connexion associé) où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension n. Considérons la représentation linéaire de dimension $(n+1)$

$$\rho : \mathfrak{g} \to End\,(\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R})$$

définie par

$$\rho(X) : (Y,t) \mapsto (\nabla(X,Y) + tX, 0)$$

Il est aisé de vérifier que ρ est une représentation fidèle de dimension $n+1$.
On peut remarquer que cette représentation donne également une représentation affine de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{rrc} \psi : & \mathfrak{g} \to & aff\,(\mathbb{R}^n) \\ & X \mapsto & \begin{pmatrix} A\,(X) & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

où $A\,(X)$ est la matrice de l'endomorphisme $\nabla_X : Y \to \nabla\,(X,Y)$ dans une base donnée.

On en déduit que toute algèbre de Lie munie d'une structure affine admet une représentation linéaire fidèle de dimension $n+1$.

Définition 1.3.1 *On dira que la représentation ρ est nilpotente si les endomorphismes $\rho(X)$ sont nilpotents pour tout X dans $\mathfrak{g}$.*

1.4 La conjecture de Milnor

1.4.1 Algèbres de Lie affines nilpotentes

Le problème de déterminer quelles sont les algèbres de Lie munies d'une structure affine se pose naturellement. En d'autres termes quelles sont les algèbres de Lie sous-jacentes à une algèbre symétrique gauche ? On montre assez rapidement qu'une algèbre de Lie semi-simple ne peut être munie d'une telle structure affine. Par contre, en petite dimension (au moins jusqu'en dimension 7), toute algèbre de Lie nilpotente est munie d'une structure affine. La conjecture suivante, énoncée par J. Milnor est assez naturelle : toute algèbre de Lie nilpotente est munie d'une structure affine [Mi].

1.4.2 Le contre exemple de Benoist

En 1995, Y.Benoist [Be] proposait un premier contre exemple à cette affirmation. Soit $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$ l'algèbre de Lie de dimension 11 défini par les crochets suivants sur une base $X_1, ..., X_{11}$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_i] = X_{i+1} \qquad i = 2, .., 10\\
&[X_2, X_3] = X_5\\
&[X_2, X_4] = X_6\\
&[X_2, X_5] = -2X_7 + X_8 + tX_9\\
&[X_2, X_6] = -5X_8 + 2X_9 + 2tX_{10}\\
&[X_2, X_7] = -\tfrac{13}{5}X_9 + \tfrac{51}{25}X_{10} + \tfrac{448+2475t}{2000}X_{11}\\
&[X_2, X_8] = \tfrac{26}{5}X_{10} + \tfrac{28}{25}X_{11}\\
&[X_2, X_9] = \tfrac{19}{16}X_{11}\\
&[X_3, X_4] = 3X_7 - X_8 - tX_9\\
&[X_3, X_5] = 3X_8 - X_9 - tX_{10}\\
&[X_3, X_6] = -\tfrac{12}{5}X_9 - \tfrac{1}{25}X_{10} + \tfrac{-448+1525t}{2000}X_{11}\\
&[X_3, X_7] = \tfrac{-39}{5}X_{10} + \tfrac{23}{25}X_{11}\\
&[X_3, X_8] = \tfrac{321}{80}X_{11}\\
&[X_4, X_5] = \tfrac{27}{5}X_9 - \tfrac{24}{25}X_{10} + \tfrac{448-3525t}{2000}X_{11}\\
&[X_4, X_6] = \tfrac{27}{5}X_{10} - \tfrac{24}{25}X_{11}\\
&[X_4, X_7] = -\tfrac{189}{16}X_{11}\\
&[X_5, X_6] = \tfrac{1377}{80}X_{11}
\end{aligned}
$$

Théorème 1.4.1 (Be) *Il n'existe aucune structure affine sur l'algèbre* $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$.

La démonstration, très technique, est essentiellement basée sur la recherche des représentations affines de dimension 12 d'une telle algèbre afin de montrer qu'il n'en existe aucune.

1.4.3 Les contre-exemples de Burde

En 1998 D. Burde donnait également des exemples en dimension 10 d'algèbres de Lie nilpotentes ne possédant aucune structure affine [Bu2].

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_i] = X_{i+1}, \qquad 2 \leq i \leq 9\\
&[X_2, X_3] = \alpha_{2,5}X_5 + \alpha_{2,6}X_6 + \alpha_{2,7}X_7 + \alpha_{2,8}X_8 + \alpha_{2,9}X_9 + \alpha_{2,10}X_{10}\\
&[X_2, X_4] = \alpha_{2,5}X_6 + \alpha_{2,6}X_7 + \alpha_{2,7}X_8 + \alpha_{2,8}X_9 + \alpha_{2,9}X_{10}\\
&[X_2, X_5] = (\alpha_{2,5} - \alpha_{3,7})\,X_7 + (\alpha_{2,6} - \alpha_{3,8})\,X_8 + (\alpha_{2,7} - \alpha_{3,9})\,X_9 + (\alpha_{2,8} - \alpha_{3,10})\,X_{10}\\
&[X_2, X_6] = (\alpha_{2,5} - 2\alpha_{3,7})\,X_8 + (\alpha_{2,6} - 2\alpha_{3,8})\,X_9 + (\alpha_{2,7} - 2\alpha_{3,9})\,X_{10}\\
&[X_2, X_7] = (\alpha_{2,5} - 3\alpha_{3,7} + \alpha_{4,9})\,X_9 + (\alpha_{2,6} - 3\alpha_{3,8} + \alpha_{4,10})\,X_{10}\\
&[X_2, X_8] = (\alpha_{2,5} - 4\alpha_{3,7} + 3\alpha_{4,9})\,X_{10}\\
&[X_2, X_9] = -\alpha_{5,10}X_{10}\\
&[X_3, X_4] = \alpha_{3,7}X_7 + \alpha_{3,8}X_8 + \alpha_{3,9}X_9 + \alpha_{3,10}X_{10}\\
&[X_3, X_5] = \alpha_{3,7}X_8 + \alpha_{3,8}X_9 + \alpha_{3,9}X_{10}\\
&[X_3, X_6] = (\alpha_{3,7} - \alpha_{4,9})\,X_9 + (\alpha_{3,8} - \alpha_{4,10})\,X_{10}\\
&[X_3, X_7] = (\alpha_{3,7} - 2\alpha_{4,9})\,X_{10}\\
&[X_3, X_8] = \alpha_{5,10}X_{10}\\
&[X_4, X_5] = \alpha_{4,9}X_9 + \alpha_{4,10}X_{10}\\
&[X_4, X_6] = \alpha_{4,9}X_{10}\\
&[X_4, X_7] = -\alpha_{5,10}X_{10}\\
&[X_5, X_6] = \alpha_{5,10}X_{10}
\end{aligned}
$$

les $\alpha_{k,s}$ vérifiant les égalités suivantes

$$\begin{array}{c} \alpha_{3,7} = -\alpha_{2,5} \neq 0 \\ \alpha_{4,9} = 3\alpha_{2,5} \\ \alpha_{4,10} = \frac{1}{\alpha_{2,5}} \left[\alpha_{5,10} \left(2\alpha_{2,7} + \alpha_{3,9}\right) - \alpha_{2,5} \left(16\alpha_{3,8} + 9\alpha_{2,6}\right)\right] \\ 3\alpha_{2,6} + \alpha_{3,8} \neq 0 \end{array}$$

1.5 Exemples classiques

1.5.1 Dimensions inférieures ou égales à 7

Toute algèbre de Lie nilpotente de dimension inférieure ou égale à 7 est munie d'une structure affine [Be].

1.5.2 Algèbres de Lie munies d'une dérivation régulière

([Bu4]). Une telle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nécessairement nilpotente (Il existe dans ce cas une dérivation régulière diagonalisable). Soit f une telle dérivation. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ posons

$$\nabla_X = f^{-1} \circ adX \circ f.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X Y - \nabla_Y X & = & f^{-1}([X, f(Y)] - [Y, f(X)]) \\ & = & f^{-1}(f([X, Y])) \\ & = & [X, Y]. \end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X & = & f^{-1} \circ adX \circ f \circ f^{-1} \circ adY \circ f \\ & & -f^{-1} \circ adY \circ f \circ f^{-1} \circ adX \circ f \\ & = & f^{-1} \circ ad[X, Y] \circ f \\ & = & \nabla_{[X,Y]}. \end{array}$$

L'opérateur ∇ définit une structure affine sur $\mathfrak{g}$.

1.5.3 Algèbres de Lie abéliennes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie abélienne. Alors la représentation

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathfrak{g} & \rightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ & X & \mapsto & f(X) = 0 \end{array}$$

définit une structure affine.

1.5.4 Algèbres de Lie symplectiques

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension $2p$ munie d'une forme symplectique $\theta \in \Lambda^2\mathfrak{g}^*$. Elle vérifie $d\theta = 0$ où

$$d\theta(X,Y,Z) = \theta(X,[Y,Z]) + \theta(Y,[Z,X]) + \theta(Z,[X,Y]).$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ nous pouvons définir un unique endomorphisme $f(X)$ par

$$\theta(adX(Y),Z) = -\theta(Y, f(X)(Z)).$$

Alors $\nabla(X,Y) = f(X)(Y)$ est une structure affine sur $\mathfrak{g}$.

En effet $X.Y = \nabla_X(Y)$ est symétrique gauche si et seulement si

$$X_1.(X_2.X_3) - (X_1.X_2).X_3 = X_2.(X_1.X_3) - (X_2.X_1).X_3$$

c'est à dire

$$f(X_1)\left(f(X_2)(X_3)\right) - f\left(f(X_1)(X_2)\right)(X_3) = f(X_2)\left(f(X_1)(X_3)\right) - f\left(f(X_2)(X_1)\right)(X_3)$$

donc

$$\left(f(X_1)\circ f(X_2)\right)(X_3) - f\left(f(X_1)(X_2)\right)(X_3) = \left(f(X_2)\circ f(X_1)\right)(X_3) - f\left(f(X_2)(X_1)\right)(X_3)$$

$$f(X_1)\circ f(X_2) - f(X_2)\circ f(X_1) = f\left(f(X_1)(X_2) - f(X_2)(X_1)\right)$$

Or comme ad est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, f est aussi une représentation. En effet

$$\begin{aligned}
& \theta(Z, (adX \circ adY - adY \circ adX)(T)) \\
= \; & \theta(Z,[X,[Y,T]]) - \theta(Z,[Y,[X,T]]) \\
= \; & -\theta(f(X)(Z),[Y,T]) + \theta(f(Y)(Z),[X,T]) \\
= \; & \theta((f(Y)\circ f(X))(Z),T) - \theta((f(X)\circ f(Y))(Z),T) \\
= \; & \theta((f(Y)\circ f(X) - f(X)\circ f(Y))(Z),T)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\theta(Z,(adX\circ adY - adY\circ adX)(T)) &= \theta(Z,(ad[X,Y])(T)) \\
&= -\theta(Z,[[X,Y],T]) \\
&= \theta(f([X,Y])(Z),T)
\end{aligned}$$

d'où

$$\theta((f(Y)\circ f(X) - f(X)\circ f(Y))(Z),T) = \theta(f([X,Y])(Z),T)$$

$\forall X,Y,Z,T \in \mathfrak{g}$.

Puisque θ est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée,

$$f(Y)\circ f(X) - f(X)\circ f(Y) = f([X,Y])$$

De plus

$$\begin{aligned}\theta(f(X_i)(X_j) - f(X_j)(X_i), X_k) &= -\theta\left(X_j, [X_i, X_K]\right) + \theta\left(X_i, [X_j, X_K]\right) \\ &= \theta\left(X_k, [X_j, X_i]\right) \\ &= \theta\left([X_i, X_j], X_k\right)\end{aligned}$$

d'où

$$f(X_i)(X_j) - f(X_j)(X_i) = [X_i, X_j]$$

ce qui montre bien que $\nabla(X, Y) = f(X)(Y)$ est une structure affine sur $\mathfrak{g}$.

1.6 Connexions symplectiques

Rappelons tout d'abord la définition d'une connexion symplectique [Fe].

Définition 1.6.1 *Soit (M, θ) une variété symplectique. Une connexion ∇ est dite symplectique si*

$$\begin{cases} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \\ \nabla\theta = 0 \end{cases}$$

La deuxième condition fait de la forme θ une forme parallèle sur M

Proposition 1.6.2 *Soit (G, θ) un groupe de Lie connexe symplectique tel que son algèbre sous-jacente soit nilpotente non abélienne. La connexion $\overset{\circ}{\nabla}$ définie par la forme symplectique θ n'est pas une connexion symplectique (au sens de Fedosov) puisque la forme θ n'est pas parallèle.*

Preuve. Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla}\theta(X, Y, Z) &= \overset{\circ}{\nabla}_Z\,\theta(X, Y) = -\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X, Y\right) - \theta\left(X, \overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right) \\ &= -\theta([Z, Y], X) + \theta\left([Z, X], Y\right)\end{aligned}$$

donc

$$\overset{\circ}{\nabla}\theta(X, Y, Z) = -\theta\left([X, Y], Z\right)$$

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne, il existe $X, Y \in \mathfrak{g}$ tel que $[X, Y] \neq 0$ et puisque θ est de rang maximum, il existe alors $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $\theta\left([X, Y], Z\right) \neq 0$ et

$$\overset{\circ}{\nabla}\theta \neq 0$$

et θ n'est pas parallèle sur G. ■

Par contre, on peut construire à partir de cette connexion $\overset{\circ}{\nabla}$ une connexion ∇ qui est symplectique en prenant

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + S(X, Y)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, avec S définie par

$$\theta\left(S\left(X, Y\right), Z\right) = \frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_X \theta\right)(Y, Z) + \frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_Y \theta\right)(X, Z)$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

En effet

$$\theta\left(S\left(X,Y\right)-S\left(Y,X\right),Z\right)=0$$

pour tout $Z \in \mathfrak{g}$, ce qui implique, comme θ est de rang maximum, $S\left(X,Y\right)-S\left(Y,X\right)=0$ d'où

$$S\left(X,Y\right)=S\left(Y,X\right)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ainsi, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y-\nabla_Y X &= \overset{\circ}{\nabla}_X Y+S(X,Y)-\overset{\circ}{\nabla}_Y X-S(Y,X) \\
&= \overset{\circ}{\nabla}_X Y-\overset{\circ}{\nabla}_Y X=[X,Y]
\end{aligned}$$

car $\overset{\circ}{\nabla}$ est une connexion sans torsion. De plus, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
\nabla\theta\left(X,Y,Z\right) &= \nabla_Z(\theta\left(X,Y\right))-\theta\left(\nabla_Z X,Y\right)-\theta\left(X,\nabla_Z Y\right) \\
&= -\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X,Y\right)-\theta\left(S\left(Z,X\right),Y\right)-\theta\left(X,\overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right) \\
&\quad -\theta\left(X,S\left(Z,Y\right)\right) \\
&= -\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X,Y\right)-\frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z \theta\right)\left(X,Y\right)-\frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_X \theta\right)\left(Z,Y\right) \\
&\quad -\theta\left(X,\overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right)+\frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z \theta\right)\left(Y,X\right)+\frac{1}{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}_Y \theta\right)\left(Z,X\right) \\
&= -\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X,Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X,Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(X,\overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right) \\
&\quad +\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_X Z,Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(Z,\overset{\circ}{\nabla}_X Y\right)-\theta\left(X,\overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z Y,X\right)-\frac{1}{3}\theta\left(Y,\overset{\circ}{\nabla}_Z X\right)-\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z,X\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}\theta\left(Z,\overset{\circ}{\nabla}_Y X\right) \\
&= -\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Z X,Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_X Z,Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(Z,\overset{\circ}{\nabla}_X Y\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}\theta\left(X,\overset{\circ}{\nabla}_Z Y\right)-\frac{1}{3}\theta\left(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z,X\right)-\frac{1}{3}\theta\left(Z,\overset{\circ}{\nabla}_Y X\right) \\
&= \frac{1}{3}\theta\left(\left[X,Z\right],Y\right)+\frac{1}{3}\theta\left(Z,\left[X,Y\right]\right)+\frac{1}{3}\theta\left(X,\left[Y,Z\right]\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\theta\left(Y,\left[Z,X\right]\right)+\theta\left(Z,\left[X,Y\right]\right)+\theta\left(X,\left[Y,Z\right]\right)\right)=0
\end{aligned}$$

d'où

$$\nabla\theta=0$$

∇ est une connexion symplectique.

1.7 Produit scalaire associé à une connexion affine.

1.7.1 Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une structure affine ∇. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, notons $f(X)$ l'application définie par

$$f(X): \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ Y & \mapsto & \nabla(X,Y) \end{array}$$

Considérons l'application

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

définie par

$$B(X,Y) = tr(f(f(X)(Y)))$$

Proposition 1.7.1 *B est une forme bilinéaire symétrique.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} B(X,Y) - B(Y,X) &= tr(f(f(X)(Y))) - tr(f(f(Y)(X))) \\ &= tr(f(f(X)(Y)) - f(f(Y)(X))) \\ &= tr(f([X,Y])) \end{aligned}$$

Or

$$f([X,Y]) = f(X) \circ f(Y) - f(Y) \circ f(X)$$

et pour toutes matrices A, B

$$tr(AB - BA) = 0$$

donc $B(X,Y) - B(Y,X) = 0$. ■

Expression analytique associée.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une connexion ∇. Considérons une base $\{X_1, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{g}$ et

$$f(X_i)(X_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k X_k$$

On a alors

$$B(X_i, X_j) = tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k f(X_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \sum_{s=1}^{n} a_{ks}^s$$

1.7.2 Propriétés

Proposition 1.7.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Si la connexion est complète, alors B est nulle.*

Preuve. On a $adX = R_X - L_X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. La nilpotence de $\mathfrak{g}$ entraîne que $tradX = 0$ pour tout X, et la structure étant complète, on a aussi $trR_X = 0$. On en déduit que $trL_X = trf(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ d'où

$$B(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k tr(f(X_k)) = 0$$

pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$. ■

Proposition 1.7.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente admettant une forme symplectique θ. Si la connexion est construite à partir de cette forme symplectique, alors la forme B est nulle.*

Preuve. Soit une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ adaptée à la forme symplectique θ c'est à dire une base $\{X_1, ..., X_{2n}\}$ telle que la matrice de θ soit de la forme

$$\Phi = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}$$

avec

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant

$$f(X_i)(X_j) = \sum_k a_{ij}^k X_k$$

alors

$$\begin{aligned} B(X_i, X_j) &= tr(f(\sum_k a_{ij}^k X_k)) = \sum_k a_{ij}^k tr(f(X_k)) \\ &= \sum_k a_{ij}^k tr(-\Phi^{-1} \circ {}^t adX_k \circ \Phi) \\ &= -\sum_k a_{ij}^k tr({}^t adX_k) = -\sum_k a_{ij}^k tr(adX_k) \end{aligned}$$

Or $\mathfrak{g}$ étant nilpotente, toutes les matrices adX_k sont nilpotentes et

$$tr(adX_k) = 0$$

pour tout $X_k \in \mathfrak{g}$, d'où

$$B(X_i, X_j) = 0$$

pour tous $X_i, X_j \in \mathfrak{g}$. ■

Remarque. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas nilpotente, la forme B peut être non nulle.

Exemple. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2 définie par

$$[X_1, X_2] = X_2$$

$\mathfrak{g}$ admet alors une forme symplectique exacte (elle est frobeniusienne)

$$\theta = d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2$$

Dans la base $\{X_1, X_2\}$ la matrice de θ est donnée par

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et d'après la contruction d'une connexion à partir d'une forme symplectique, on a

$$\nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de B est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7.3 Groupes de Lie affines localement hessiens

Soit (G, ∇) un groupe de Lie affine connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Se donner une pseudo-métrique invariante à gauche localement hessienne relativement à ∇ sur G équivaut à se donner une forme bilinéaire q symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ telle que, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$q(\nabla(X,Y),Z) - q(\nabla(Y,X),Z) = q(X, \nabla(Y,Z)) - q(Y, \nabla(X,Z))$$

(voir [Au])

Ainsi si la forme B est non dégénérée, elle induit une pseudo-métrique invariante à gauche localement hessienne sur le groupe de Lie G puisque

$$\begin{aligned} B(\nabla(X,Y),Z) - B(\nabla(Y,X),Z) &= tr\,[f(f(X)(Y))(Z) - f(f(Y)(X))(Z)] \\ &= tr\,[f(f(X)(Y) - f(Y)(X))(Z)] \\ &= tr\,[f([X,Y)]\,(Z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(X, \nabla(Y,Z)) - B(Y, \nabla(X,Z)) &= tr\,(f((f(X) \circ f(Y))\,(Z) - (f(Y) \circ f(X))\,(Z))) \\ &= tr\,(f(f(X) \circ f(Y) - f(Y) \circ f(X))(Z)) \\ &= tr\,[f([X,Y)]\,(Z)] \end{aligned}$$

1.7.4 Etude de la forme B en petite dimension

Cas résoluble non abélien de dim2

Soit $\mathfrak{g}$ définie par $[X_1, X_2] = X_2$. Les connexions sont données par

$$\begin{array}{llll} 1) & \nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+2e}{e} & b \\ -b\frac{b^2+e}{e^2} & -\frac{b^2-e}{e} \end{pmatrix} & \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} b & e \\ -\frac{b^2}{e} & -b \end{pmatrix} & b \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{R}^* \\ 2) & \nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} & \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & a, c \in \mathbb{R} \\ 3) & \nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} & \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} & a \in \mathbb{R} \end{array}$$

Notons que la structure définie en 3 pour $a = 0$ est la seule qui soit complète. Notons également que cette structure 3 pour $a = -1$ correspond au cas symplectique.

Les matrices des formes bilinéaires B associées sont

$$
\begin{array}{ll}
1) & \begin{pmatrix} 3\frac{b^2+2e}{e} & 3b \\ 3b & 3e \end{pmatrix} \\
2) & \begin{pmatrix} a\left(a+1\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
3) & \begin{pmatrix} a\left(2a+1\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ainsi, dans les cas 2 et 3, la forme bilinéaire B est de rang 1 si $a \neq 0$, de rang 0 si $a = 0$. Seul le cas 1 permet d'obtenir une forme bilinéaire symétrique B de rang 2 et de lui associer une forme quadratique q_B

$$
\begin{aligned}
q_B\left(X\right) &= 3\frac{b^2+2e}{e}x_1^2 + 6bx_1x_2 + 3ex_2^2 \\
&= \left(\sqrt{3}\left(\sqrt{e}x_2 + \frac{b}{\sqrt{e}}x_2\right)\right)^2 + \left(\sqrt{6}x_2\right)^2
\end{aligned}
$$

avec $X = x_1X_1 + x_2X_2$.

Cas de $\mathbb{R}^2$

Nous classons dans le chapitre 3 toutes les structures affines sur $\mathbb{R}^2$, ce qui nous permet d'obtenir la liste des connexions affines suivantes

$$
\begin{array}{llll}
1) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
2) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
3) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
4) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
5) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
6) & \nabla_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \nabla_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Les structures complètes correspondent aux cas 4 et 5, et on a

$$
B_4 = B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Pour les autres, on a

$$
B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Proposition 1.7.4 *Les formes B_1 et B_3 relatives aux structures 1 et 3 sont non dégénérées. Elles ont pour signature $(2,0)$ et $(1,1)$.*

Cas de $\mathbb{R}^3$

A partir des strucures affines sur $\mathbb{R}^3$ (cf chapitre 3), les connexions sur $\mathbb{R}^3$ sont

$$1)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$2)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$3)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$4)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$5)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$6)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$7)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$8)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$9)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$10)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$11)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$12)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$13)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$14)\quad \nabla_{e_1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \nabla_{e_3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Pour la structure 15),

$$\nabla_{e_1} = \nabla_{e_2} = \nabla_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les structures complètes correspondant aux cas 11 à 15, la forme B est nulle pour chacune de ces structures. Pour les autres cas, on a

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.7.5 *Les formes B_1 et B_2 relatives aux structures 1 et 2 sont non dégénérées. Elles ont pour signature $(3,0)$ et $(2,1)$.*

Preuve. On a

$$q_{B_1}(X) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2,$$

et

$$q_{B_2}(X) = 2x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2{x_3}^2. \quad \blacksquare$$

Cas de l'algèbre de Heisenberg de dim 3

L'algèbre de Heisenberg de dimension 3 est munie de la connexion non complète définie par

$$\nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ \beta - 1 & \alpha + 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Nous verrons au chapitre 2 comment est construite une telle connexion). Alors la matrice de B est égale à

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & 4a^2 & 0 \\ 4a^2 & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée à B est

$$q(X_1 + X_2 + X_3) = 4a^2(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = [2a\,(X_1 + X_2)]^2$$

donc q est de rang 1.

1.8 Structure affine associée à une représentation

Soit $\rho : \mathfrak{g} \to End\mathfrak{g}$ une représentation linéaire de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Soit $P \in GL(n)$. On pose, pour $X \in \mathfrak{g}$

$$\nabla(X) = P^{-1}\rho(X)P$$

$\nabla : \mathfrak{g} \to End\mathfrak{g}$ est encore une représentation linéaire.

Proposition 1.8.1 *La représentation ∇ définit une connexion affine sur $\mathfrak{g}$ si et seulement si l'endomorphisme P vérifie*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \qquad \rho(X)P(Y) - \rho(Y)P(X) = P\,[X,Y] \qquad (*)$$

Preuve. Comme ∇ vérifie déjà

$$\nabla(X)\nabla(Y) - \nabla(Y)\nabla(X) = \nabla\,[X,Y]$$

c'est une connexion affine si et seulement si on a

$$\nabla(X)(Y) - \nabla(Y)(X) = [X,Y] \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Donc

$$P^{-1}\rho(X)P(Y) - P^{-1}\rho(Y)P(X) = [X,Y]$$

soit

$$\rho(X)P(Y) - \rho(Y)P(X) = P\,[X,Y]\,. \quad \blacksquare$$

Notons que si ρ correspond à la représentation adjointe alors P est une dérivation inversible.

On notera $\mathcal{D}er_\rho(\mathfrak{g})$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ vérifiant $(*)$. En général $\mathcal{D}er_\rho(\mathfrak{g})$ n'est pas muni d'une structure d'algèbres de Lie.

Remarque. Considérons un $\mathfrak{g}-$module M associé à la représentation $\mathfrak{g}$ et soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}+M$, où M apparait comme un idéal abélien de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et l'action de $\mathfrak{g}$ sur M étant définie par la représentation. L'application P est la restriction à la sous-algèbre $\mathfrak{g}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ d'une dérivation de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Exemple. Soit t l'endomorphisme transposé

$$\begin{array}{rccc} t: & End(\mathfrak{g}) & \to & End(\mathfrak{g}) \\ & A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

Considérons la représentation

$$\rho(X) = -{}^t adX$$

ρ est bien une représentation linéaire

$$\begin{array}{rl} & \left(-{}^t adX\right) \circ \left(-{}^t adY\right) - \left(-{}^t adY\right) \circ \left(-{}^t adX\right) \\ = & {}^t adX \circ^t adY -^t adY \circ^t adX \\ = & {}^t(adY \circ adX - adX \circ adY) \\ = & -{}^t(ad\,[X,Y]) \end{array}$$

Soit $P \in GL(n, \mathbb{R})$ et vérifiant $(*)$, c'est à dire

$$(-{}^t adX)(P(Y)) + \left({}^t adY\right)(P(X)) = P\,[X,Y]$$

Proposition 1.8.2 *$P^{-1}\left(-{}^t adX\right)P = \nabla\left(X\right)$ définit une connexion affine sur $\mathfrak{g}$*

Exemple : Soit $n = 2p$ et soit θ une forme symplectique sur $\mathfrak{g}$. Alors nous avons la connexion affine définie par

$$\theta\left(adX(Y), Z\right) = -\theta\left(Y, \nabla(X)(Z)\right)$$

Soit $X_1, ..., X_{2p}$ une base de $\mathfrak{g}$, P la matrice de ω relative à cette base. La relation ci dessus s'écrit :

$$^t(adX(Y))P(Z) +^t YP\nabla(X)(Z) = 0$$

$$^tY\,^t\left(adX\right)PZ +^t YP\nabla(X)Z = 0$$

$$^t(adX)P - P\nabla(X) = 0$$

d'où $\nabla(X) = P^{-1}(-{}^t adX)P$. Ainsi la connexion ∇ est associée à la représentation $-{}^t adX$.

La réciproque est aussi vraie.

Proposition 1.8.3 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{2p}$ admet une forme symplectique si et seulement s'il existe P antisymétrique inversible appartenant à $\mathcal{D}er_\rho(\mathfrak{g}_{2p})$ avec $\rho = -{}^t adX$*

La construction ci-dessus généralise donc la construction des connexions affines à partir des formes symplectiques.

Remarque : Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations associées de $\mathfrak{g}$, c'est à dire

$$\exists P, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \qquad \rho_2(X) = P^{-1}\rho_1(X)P.$$

Alors toute connexion associée à ρ_2 peut se voir comme une connexion associée à ρ_1 et vice versa. Si les représentations adjointe et coadjointe sont associées, les connexions qui en découleront seront donc identiques. C'est le cas des algèbres de Lie métrisables.

Chapitre 2

Algèbres de Lie filiformes affines

2.1 Algèbres de Lie filiformes

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 *Une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimension n est filiforme si le plus petit entier k tel que $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ est égal à $n-1$.*

Dans ce cas la suite descendante est de la forme suivante

$$\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \supset \cdots \supset \mathcal{C}^{n-2}\mathfrak{g} \supset \{0\} = \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g}$$

et nous avons

$$\begin{cases} \dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-2, \\ \dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = n-i-1, \text{ pour } i = 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Exemple. L'algèbre de Lie nilpotente de dimension $n+1$, L_n, définie par

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \text{ pour } i \in \{1, ..., n-1\}$$

est filiforme.

On peut noter que toute algèbre de Lie filiforme est une déformation linéaire de L_n [G.K].

2.1.2 Algèbres filiformes non caractéristiquement nilpotentes

Rappelons qu'une algèbre de Lie nilpotente est dite caractéristiquement nilpotent si toutes les dérivations sont nilpotentes. Si l'algèbre n'est pas caractéristi- quement nilpotente, il existe alors une dérivation non nilpotente. Comme sa partie semi- simple est aussi une dérivation, une algèbre caractéristiquement nilpotente peut donc être caractérisée par l'existence d'une dérivation diagonale non triviale.

Définition 2.1.2 *Une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre des dérivations $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ constituée des dérivations semi-simples est appelée tore maximal des dérivations de $\mathfrak{g}$.*

Tous les tores maximaux de dérivations de $\mathfrak{g}$ sont mutuellement conjugés dans $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ ([Mal]). La dimension d'un tore maximal des dérivations de $\mathfrak{g}$ est appelé le rang de $\mathfrak{g}$. Pour une algèbre de Lie filiforme $\mathfrak{g}$ le rang de $\mathfrak{g}$ est inférieur ou égal à 2.

Algèbres filiformes de rang 2

Il y a seulement 2 types d'algèbres de Lie filiformes de rang 2 ([G.K2]) : $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{Q}_n$.

Cas $\mathcal{L}_n$:
Soit $(X_0, X_1, ..., X_n)$ une base de $\mathcal{L}_n$

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Les endomorphismes $(d_1, d_2, t, h_2, ..., h_{n-1}, adX_0, ..., adX_{n-1})$ où

$$\begin{array}{l} d_1(X_0) = 0, \quad d_1(X_i) = X_i \quad 1 \leq i \leq n \\ d_2(X_0) = X_0, \quad d_2(X_i) = (i-1)X_i \quad 1 \leq i \leq n \\ t(X_0) = X_1, \quad t(X_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \\ h_j(X_0) = 0, \quad h_j(X_i) = X_{i+j} \quad 2 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq i \leq n-j \end{array}$$

forment une base de l'algèbre des dérivations $\mathcal{D}er(\mathcal{L}_n)$ et un tore maximal de dérivations de $\mathcal{L}_n$ est engendré par d_1 et d_2.

Cas $\mathcal{Q}_n, \quad n = 2k+1$:
Soit $(X_0, X_1, ..., X_n)$ une base de $\mathcal{Q}_n$

$$\begin{array}{l} [X_0, X_i] = X_{i+1} \quad i = 1, ..., n-1 \\ [X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n \quad i = 1, ...k \end{array}$$

Dans la base $(Z_0, Z_1, ..., Z_n)$ où $Z_0 = X_0 + X_1, \quad Z_i = X_i \quad i = 1, ..., n$, cette algèbre est définie par

$$\begin{array}{l} [Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \quad i = 1, ..., n-2 \\ [Z_i, Z_{n-i}] = (-1)^i Z_n \quad i = 1, ...k \end{array}$$

Les endomorphismes $(d_1, d_2, t, h_3, h_5, ..., h_{2k-1}, adZ_0, ..., adZ_{n-1})$ où

$$\begin{array}{l} d_1(Z_0) = Z_0, \quad d_1(Z_i) = (i-1)Z_i \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad d_1(Z_n) = (n-2)Z_n \\ d_2(Z_0) = 0, \quad d_2(Z_i) = Z_i \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad d_2(Z_n) = 2Z_n \\ t(Z_0) = Z_n, \quad t(Z_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \\ h_j(X_0) = 0, \quad h_j(X_i) = X_{i+j} \quad 2 \leq j \leq n-1, \quad 1 \leq i \leq n-j \end{array}$$

forment une base de l'algèbre des dérivations $\mathcal{D}er(\mathcal{Q}_n)$ et un tore maximal de dérivations de $\mathcal{Q}_n$ est engendré par d_1 et d_2.

Algèbres filiformes de rang 1

Théorème 2.1.3 (G.K2) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de rang 1. Il existe une base $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$ de $\mathfrak{g}$ dont les crochets vérifient l'un des cas suivants :*

$$i)\mathfrak{g} = A_n^k(\lambda_1, \cdots, \lambda_t) \ , \quad 2 \leq k \ , \quad t = [\frac{n-k+1}{2}]$$

$$[Y_1, Y_i] = Y_{i+1} \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$[Y_i, Y_{i+1}] = \lambda_{i-1} Y_{2i+k-1} \ , \quad 2 \leq i \leq [\frac{n-k+1}{2}]$$

$$[Y_i, Y_j] = a_{ij} Y_{i+j+k-2} \ , \quad 2 \leq i < j \quad et \quad i+j+k-2 \leq n.$$

$$ii) \mathfrak{g} = B_n^k(\lambda_1, \cdots, \lambda_t) \ , \ n = 2m \ , \ 2 \leq k \leq n-3 \ , \ t = [\frac{n-k}{2}]$$
$$[Y_1, Y_i] = Y_{i+1} \quad 2 \leq i \leq n-2$$
$$[Y_i, Y_{n-i+1}] = (-1)^{i+1} Y_n \quad 2 \leq i \leq n-1$$
$$[Y_i, Y_{i+1}] = \lambda_{i-1} Y_{2i+k-1} \ , \quad i = 2, \cdots, [\frac{n-k}{2}]$$
$$[Y_i, Y_j] = a_{ij} Y_{i+j+k-2} \ , \quad 2 \leq i, j \leq n-2 \ et \ i+j+k-2 \leq n-1 \ , \ j \neq i+1$$

$$iii) \mathfrak{g} = C_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_t) \ , \ n = 2m+2 \ , \ t = m-1$$
$$[Y_1, Y_i] = Y_{i+1} \quad 2 \leq i \leq n-2$$
$$[Y_i, Y_{n-i+1}] = (-1)^{i-1} Y_n \quad 2 \leq i \leq m+1$$
$$[Y_i, Y_{n-i-2k+1}] = (-1)^{i+1} \lambda_k Y_n \ , \ 2 \leq i \leq n-2-2k \ et \ 1 \leq k \leq m-1.$$

Preuve. Voir [G.K2]. ■

2.1.3 Théorème

Théorème 2.1.4 *Toute algèbre de Lie filiforme non caractéristiquement nilpotente est affine.*

Preuve. D'après [G.K2] si $r = 2$ on a $\mathfrak{g} = L_n$ ou $\mathfrak{g} = Q_n$. Dans les deux cas, il existe $f \in \mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ régulière et diagonalisable. Dans ce cas

$$\nabla_X = f^{-1} \circ adX \circ f$$

est une structure affine. Si $r = 1$, pour A_n, B_n il existe également une dérivation non singulière diagonalisable donc une structure affine. Supposons que l'algèbre de Lie soit du type C_n. Toute dérivation diagonalisable est de la forme

$$f(Y_1) = 0, f(Y_i) = Y_i, \quad i = 2, ..., n-1, \quad f(Y_n) = 2Y_n.$$

Une telle dérivation est singulière. Soit g l'endomorphisme défini par

$$g(Y_1) = 0, g(Y_i) = Y_i, \quad i = 2, ..., n-1, \quad g(Y_n) = 1/2 Y_n.$$

Les endomorphismes f et g laissent stable l'algèbre dérivée et leurs restrictions sont inversibles et vérifient $f \circ g = Id$. On en déduit que l'opérateur

$$\nabla_X = g \circ adX \circ f$$

définit une connexion affine. En effet

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) &= g \circ adX \circ f(Y) - g \circ adY \circ f(X) \\ &= g(f[X, Y]) \end{aligned}$$

car f est une dérivation. Comme g et f sont inverses l'un de l'autre sur l'algèbre dérivée, on en déduit

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X,Y].$$

De même

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y(Z) - \nabla_Y\nabla_X(Z) &= g[X,[Y,f(Z)]] - g[Y,[X,f(Z)]] \\
&= -g[f(Z),[X,Y]] \\
&= \nabla_{[X,Y]}(Z)
\end{aligned}$$

D'où le théorème. ■

2.1.4 Une généralisation au cas non filiforme

La construction ci-dessus se généralise aisément aux algèbres non filiformes. Supposons qu'il n'existe pas de dérivation régulière sur l'algèbre $\mathfrak{g}$ mais qu'en revanche il existe une dérivation singulière dont la restriction à l'algèbre dérivée $D^1(\mathfrak{g})$ soit inversible.

Soit f une telle dérivation. Notons h la restriction de f à $D^1(\mathfrak{g})$. Cet endomorphisme est une dérivation inversible de $D^1(\mathfrak{g})$. Soit g un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. Il laisse stable $D^1(\mathfrak{g})$
2. La restriction à $D^1(\mathfrak{g})$ est inversible et admet pour inverse h.

Ces conditions impliquent que l'algèbre dérivée admet une dérivation inversible.

Prenons ∇ défini par

$$\nabla(X,Y) = (g \circ adX \circ f)\,(Y)$$

Alors $\forall X, Y \in D^1(\mathfrak{g})$

$$\nabla(X,Y) - \nabla(Y,X) = g([X,fY]) - g\,([Y,fX]) = gf([X,Y]) = [X,Y]$$

car $g|_{D^1(\mathfrak{g})} \circ f|_{D^1(\mathfrak{g})} = Id|_{D^1(\mathfrak{g})}$. De même

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y(Z) - \nabla_Y\nabla_X(Z) &= (g \circ adX \circ f)((g \circ adY \circ f)(Z)) \\
&\quad -(g \circ adY \circ f)((g \circ adX \circ f(Z)) \\
&= (g \circ adX \circ f)(g([Y,f(Z)])) \\
&\quad -(g \circ adY \circ f)(g([X,f(Z)])) \\
&= g([X,f \circ g([Y,f(Z)])) - g([Y,f \circ g([X,f(Z)]) \\
&= g[X,[Y,f(Z)]] - g[Y,[X,f(Z)]] \\
&= -g[f(Z),[X,Y]] \\
&= g([[X,Y],f(Z)] \\
&= \nabla_{[X,Y]}(Z)
\end{aligned}$$

Ainsi ∇ est une connexion affine.

Théorème 2.1.5 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une dérivation dont la restriction à l'algèbre dérivée soit inversible. Alors $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure affine.*

Exemple. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension 7 de rang non nul. Si 0 est racine de cette algèbre, alors l'espace raciniel associé est complémentaire à l'algèbre dérivée. La construction ci-dessus permet de munir ces algèbres d'une structure affine.

2.1.5 Cas caractéristiquement nilpotent.

Dans le chapitre 4 nous verrons que les contre exemples de Benoist sont des algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes. Si dans le paragraphe précédent nous avons vu que toute algèbre filiforme de rang strictement positif était affine, la réciproque est fausse. Les deux exemples suivants le prouvent :

Exemples.
1. Considérons l'algèbre filiforme de dimension 7 donnée par

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & 2 \leq i \leq 5 \\ [X_2, X_5] = -X_6 & \\ [X_2, X_7] = -X_5 - X_6 & \\ [X_3, X_4] = X_6 & \\ [X_3, X_7] = -X_6 & \end{array}$$

L'algèbre des dérivations $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ est de dimension 10 et est isomorphe à

$$\begin{array}{lll} [Z_1, Z_2] = Z_3 & [Z_2, Z_6] = -Z_5 & [Z_3, Z_8] = -Z_5 \\ [Z_1, Z_3] = Z_4 & [Z_2, Z_8] = -Z_6 & [Z_3, Z_9] = -Z_5 \\ [Z_1, Z_4] = Z_5 & [Z_2, Z_9] = -Z_4 - 2Z_6 & [Z_7, Z_8] = 2Z_5 - 2Z_6 + 2Z_{10} \\ [Z_1, Z_7] = -Z_4 & [Z_2, Z_{10}] = -Z_5 & [Z_7, Z_9] = Z_5 - 2Z_6 + 2Z_{10} \\ [Z_1, Z_8] = -Z_6 & & [Z_8, Z_9] = 2Z_6 - 2Z_{10} \end{array}$$

Elle est donc nilpotente ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est caractéristiquement nilpotente. Comme elle est de dimension 7, elle est munie d'une structure affine. Notons que Campoamor ([Ca]) a prouvé que $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ n'était pas caractéristiquement nilpotente, ce qui n'est pas le cas dans l'exemple suivant.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 2\}$ la famille des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7 définies par

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & 2 \leq i \leq 5 \\ [X_2, X_4] = -\alpha X_6 & \\ [X_2, X_3] = -\alpha X_5 - X_7 & \\ [X_2, X_7] = -X_5 - X_6 & \\ [X_3, X_7] = -X_6 & \end{array}$$

est caractéristiquement nilpotente d'ordre 2 et munie d'une structure affine. Son algèbre des dérivations $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ est de dimension 10 isomorphe à

$$\begin{array}{lll} [Z_1, Z_2] = Z_3 & [Z_2, Z_3] = -\alpha Z_5 - Z_7 & [Z_3, Z_9] = -Z_5 \\ [Z_1, Z_3] = Z_4 & [Z_2, Z_6] = -Z_5 & [Z_3, Z_{10}] = -Z_5 \\ [Z_1, Z_4] = Z_5 & [Z_2, Z_{10}] = -Z_4 - \alpha Z_5 & [Z_7, Z_9] = 2Z_5 \\ [Z_1, Z_7] = -Z_4 & & [Z_7, Z_{10}] = Z_5 \\ [Z_1, Z_8] = -Z_5 & & [Z_9, Z_{10}] = \frac{2}{\alpha} Z_8 + \frac{2}{\alpha} Z_4 \\ [Z_1, Z_9] = -Z_6 & & \\ [Z_1, Z_{10}] = -Z_8 - Z_4. & & \end{array}$$

Elle est caractéristiquement nilpotente.

2.2 Structures affines non complètes

2.2.1 Rappel

Une structure affine sur $\mathfrak{g}$ est dite complète si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
a)

$$\begin{array}{cccc} R_X : & A(\mathfrak{g}) & \to & A(\mathfrak{g}) \\ & Y & \mapsto & Y.X \end{array}$$

est nilpotent pour tout $X \in A(\mathfrak{g})$
b) $tr(R_X) = 0$ pour tout $X \in A(\mathfrak{g})$.

2.2.2 Représentations non nilpotentes sur les algèbres de Lie nilpotentes

Proposition 2.2.1 *([Be]) Supposons que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe non abélienne, indécomposable et nilpotente et soit ρ une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$. Alors il existe une représentation nilpotente fidèle de même dimension.*

Preuve. Soit le $\mathfrak{g}$-module M associé à ρ. Alors, puisque $\mathfrak{g}$ est nilpotent, M peut se décomposer ainsi

$$M = \oplus_{i=1}^{k} M_{\lambda_i}$$

où M_{λ_i} est un $\mathfrak{g}$-sousmodule, et les λ_i sont des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la restriction de $\rho(X)$ à M_i a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda_i(X) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i(X) \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbb{K}_{\lambda_i}$ le $\mathfrak{g}$-module de dimension 1 défini par

$$\mu : X \in \mathfrak{g} \to \mu(X) \in End\mathbb{K}$$

avec

$$\mu(X)(a) = \rho(X)(a) = \lambda_i(X)\, a$$

Le produit tensoriel $M_{\lambda_i} \otimes \mathbb{K}_{-\lambda_i}$ est le $\mathfrak{g}$-module associé à

$$X \cdot (Y \otimes a) = \rho(X)(Y) \otimes a - Y \otimes \lambda_i(X)\, a$$

Donc $\widetilde{M} = \oplus (M_{\lambda_i} \otimes K_{-\lambda_i})$ est un $\mathfrak{g}$-module nilpotent. Montrons que $\widetilde{M}$ est fidèle. Rappelons qu'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ est fidèle si et seulement si $\rho(Z) \neq 0$ pour tout $Z \neq 0 \in Z(\mathfrak{g})$. Considérons $X \neq 0 \in Z(\mathfrak{g})$. Si $\widetilde{\rho}(X) = 0$, alors $\rho(X)$ est un endomorphisme diagonal. Par hypothèse $\mathfrak{g} \neq Z(\mathfrak{g})$ et $\exists i \geq 1$ i.e $X \in \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$. Donc

$$X = \sum_j a_j \,[Y_j, Z_j]$$

avec $Y_j \in \mathcal{C}^{i-1}(\mathfrak{g})$ et $Z_j \in \mathfrak{g}$. Les endomorphismes $\rho(Y_j)\rho(Z_j) - \rho(Z_j)\rho(Y_j)$ sont nilpotents et les valeurs propres de $\rho(X)$ sont 0. Ainsi $\rho(X) = 0$ et ρ n'est pas fidèle. Donc $\widetilde{\rho}(X) \neq 0$ et $\widetilde{\rho}$ est une représentation fidèle. ■

Le problème d'existence d'une connexion affine sur les algèbres de Lie nilpotentes se ramène au problème d'existence de connexions complètes c'est à dire de représentations nilpotentes. Mais cela ne doit pas évacuer l'étude générale des connexions. Le problème qui se pose naturellement est de savoir s'il existe des classes d'algèbres de Lie nilpotentes dont toutes les connexions affines sont complètes. La proposition 1 laisse penser que les algèbres filiformes vérifient une telle propriété. Nous allons voir dans ce qui suit qu'il n'en est rien. Mais le problème d'existence d'une classe d'algèbres de Lie telle que

$$\forall \nabla \quad \nabla \text{ soit complète}$$

reste posé.

2.2.3 Exemples de structures non complètes sur des algèbres filiformes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension n munie d'une structure affine définie par la connexion ∇. Soit ρ la représentation fidèle de dimension $(n+1)$ associée à ∇ et $M = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$ le $\mathfrak{g}$-module complexe correspondant. Comme $\mathfrak{g}$ est filiforme, le module admet une des décompositions suivante

$$\begin{array}{l} M = M_0 \quad \text{et } M \text{ est irréducible,} \\ \text{ou } M = M_0 \oplus M_\lambda, \quad \lambda \neq 0 \end{array}$$

Pour une représentation fidèle, appelons caractéristique la suite ordonnée des dimensions des sous-modules irréductibles. Dans le cas des algèbres de Lie filiformes, on a $c(\rho) = (n+1)$ ou $(n,1)$ ou $(n-1,1,1)$ ou $(n-1,2)$. En effet, la filiformité de $\mathfrak{g}$ implique qu'il existe un sous-module irréductible de dimension supérieure ou égale à $n-1$. Plus généralement, si la suite caractéristique d'une algèbre de Lie nilpotente est égale à $(c_1,..,c_p,1)$ (see [G.K]) alors pour toute représentation fidèle ρ on a $c(\rho) = (d_1,..,d_q)$ avec $d_1 \geq c_1$.

Théorème 2.2.2 *Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie filiforme L_n. Il existe des $\mathfrak{g}$-modules fidèles qui ne sont pas nilpotents.*

Preuve. Considérons la représentation suivante donnée par les matrices $\rho(X_i)$ où $\{X_1,..,X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$

$$\rho(X_1) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & \cdots & \cdots & & & 0 & 1 \\ a & a & 0 & & & & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{i-3}{i-2} & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-3}{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\rho(X_2) = \begin{pmatrix}
a & a & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\
a & a & 0 & & & & & \vdots & 1 \\
-1 & 1 & 0 & & & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \frac{1}{i-2} & \ddots & & \vdots & 0 \\
0 & 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\
\beta & \alpha & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

et pour $j \geq 3$ les endomorphismes $\rho(X_j)$ vérifient :

$$
\begin{cases}
\rho(X_j)(e_1) = -\frac{1}{j-1} e_{j+1} \\
\rho(X_j)(e_2) = \frac{1}{j-1} e_{j+1} \\
\rho(X_j)(e_3) = \frac{1}{j(j-1)} e_{j+2} \\
\cdots \\
\rho(X_j)(e_{i-j+1}) = \frac{(j-2)!(i-j-1)!}{(i-2)!} e_i, \quad i = j-2, ..., n \\
\rho(X_j)(e_{i-j+1}) = 0, \quad i = n+1, .., n+j-1 \\
\rho(X_j)(e_{n+1}) = e_j
\end{cases}
$$

où $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}\}$ est la base donnée par $e_i = (X_i, 0)$ et $e_{n+1} = (0, 1)$. On peut vérifier facilement que ces matrices décrivent une représentation fidèle non nilpotente.

La précédente représentation est associée à une structure affine sur l'algèbre de Lie L_n définie par

$$\nabla (X_i, Y) = \rho(X_i)(Y, 0)$$

où L_n est identifié au premier facteur de dimension n du module libre de dimension $n+1$ que nous venons de définir. Cette structure affine est complète si et seulement si les endomorphismes $R_X \in End(\mathfrak{g})$ définis par

$$R_X(Y) = \nabla(Y, X)$$

sont nilpotents pour tout $X \in \mathfrak{g}$ ([H]). Mais la matrice de R_{X_1} est de la forme :

$$
\begin{pmatrix}
a & a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a & a & & & \vdots & & \vdots & 0 \\
0 & -1 & & & \vdots & & \vdots & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \cdots & \vdots & 0 \\
0 & 0 & \vdots & \ddots & -\frac{1}{j-1} & & \vdots & 0 \\
\alpha & \beta & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n-2} & 0
\end{pmatrix}
$$

Sa trace est égale à $2a$ et pour $a \neq 0$ l'endomorphisme n'est pas nilpotent. Nous avons prouvé :

Proposition 2.2.3 *Il existe des structures affines sur les algèbres de Lie filiformes L_n qui ne sont pas complètes.*

2.2.4 Une représentation non nilpotente de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_3$

Appliquons le résultat précédent en dimension 3. Dans ce cas L_3 est l'algèbre de Heisenberg. On trouve une représentation nilpotente non fidèle associée à la structure affine non complète donné par :

$$\nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ \beta - 1 & \alpha + 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\{X_1, X_2, X_3\}$ est une base de $\mathfrak{h}_3$ vérifiant $[X_1, X_2] = X_3$ et les endomorphismes ∇_{X_i} de $\mathfrak{h}_3$ sont définis par

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \nabla(X_i, X_j)$$

La représentation affine est donnée par

$$\begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) & a(x_1 + x_2) & 0 & x_1 \\ a(x_1 + x_2) & a(x_1 + x_2) & 0 & x_2 \\ \alpha x_1 + (\beta - 1)x_2 & \beta x_1 + (\alpha + 1)x_2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Structures complexes et connexions affines

Toute variété différentiable munie d'une structure complexe intégrable admet une connexion affine de torsion nulle. En effet la condition d'intégrabilité de Nijenhuis n'est rien d'autre que l'expression du tenseur de torsion de la connexion associée. On peut donc se demander si sur une algèbre de Lie munie d'une structure complexe intégrable la connexion associée est aussi à courbure nulle. Nous démontrons en annexe qu'il n'existe en fait aucune structure complexe intégrable sur une algèbre de Lie filiforme. Ceci réduit à pas grand chose notre problème dans le cas filiforme.

Chapitre 3

Algèbres de Lie abéliennes affines

3.1 Approche algébrique

Les connexions complètes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont parfaitement déterminées depuis les travaux de [Ku] et [F.D]. Dernièrement [D.O] ont mis en évidence une infinité de structures affines complètes sur $\mathbb{R}^6$. Le but de ce chapitre est de classer toutes les connexions complètes ou non de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie abélienne réelle. Si $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure affine alors l'algèbre symétrique gauche $A(\mathfrak{g})$ est une algèbre commutative associative réelle. En effet, on a

$$X.Y - Y.X = 0 = [X, Y]$$

et

$$X.(Y.Z) - Y.(X.Z) = ([X, Y].Z) = 0$$

donc

$$X.(Z.Y) = (X.Z).Y$$

et $A(\mathfrak{g})$ est associative.

Soit Ψ_1 et Ψ_2 deux structures affines sur $\mathfrak{g}$. Elles sont affinement équivalentes si, et seulement si, les algèbres commutatives associatives réelles correspondantes sont isomorphes. Ainsi la classification des structures affines sur les algèbres de Lie abéliennes correspond à la classification des algèbres commutatives associatives (unitaires ou non). Si la structure affine est complète, les endomorphismes R_X sont nilpotents. Comme $A(\mathfrak{g})$ est commutatif, $A(\mathfrak{g})$ est une algèbre associative commutative nilpotente. La classification des structures affines complètes sur les algèbres de Lie abéliennes correspond à la classification des algèbres commutatives associatives nilpotentes.

3.2 Structures affines rigides

3.2.1 Définition

Soit une base fixée $\{e_1, ..., e_n\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Une loi associative de $\mathbb{R}^n$ est donnée par une application bilinéaire

$$\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

vérifiant $\mu(e_i,\mu(e_j,e_k)) = \mu(\mu(e_i,e_j),e_k)$. Si on note $\mu(e_i,e_j) = \sum_k C_{ij}^k e_k$, les constantes de structures C_{ij}^k vérifient alors

$$(1) \quad \sum_l (C_{il}^s C_{jk}^l - C_{ij}^l C_{lk}^s) = 0, \qquad s = 1,...,n.$$

De plus si μ est commutative, on a

$$(2) \quad C_{ij}^k = C_{ji}^k$$

Alors l'ensemble des lois associatives de $\mathbb{R}^n$ s'identifie avec le sous ensemble algébrique plongé dans $\mathbb{R}^{n^3}$, défini par les équations polynomiales (1) et (2). Nous noterons cet ensemble $\mathcal{A}^c(n)$.

La loi μ est unitaire s'il existe $e \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mu(e,x) = x$. L'ensemble des lois unitaires de $\mathcal{A}^c(n)$ est un sous-ensemble noté $\mathcal{A}_1^c(n)$.

Le groupe linéaire $GL(n,\mathbb{R})$ opère sur $\mathcal{A}^c(n)$:

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{R}) \times A^c(n) & \rightarrow & \mathcal{A}^c(n) \\ (f,\mu) & \mapsto & \mu_f \end{array}$$

où $\mu_f(e_i,e_j) = f^{-1}\mu(f(e_i),f(e_j))$.

Nous noterons $\theta(\mu)$ l'orbite de μ associée à cette action. Elle est isomorphe à l'espace homogène $\frac{GL(n,\mathbb{R})}{G_\mu}$ où $G_\mu = \{f \in GL(n,\mathbb{R}) \quad / \quad \mu_f = \mu\}$. La topologie de $\mathcal{A}^c(n)$ est induite par la topologie de $\mathbb{R}^{n^3}$.

Définition 3.2.1 *La loi $\mu \in \mathcal{A}^c(n)$ est rigide si $\theta(\mu)$ est ouverte dans $\mathcal{A}^c(n)$.*

Soit μ la loi d'une algèbre associative réelle et notons par $\mu_{\mathbb{C}}$ la loi de l'algèbre associative complexe correspondante. Si μ est rigide dans $\mathcal{A}^c(n)$ alors soit $\mu_{\mathbb{C}}$ est rigide dans le schéma Ass_n les lois associatives complexes, soit $\mu_{\mathbb{C}}$ admet une déformation $\widetilde{\mu}_{\mathbb{C}}$ qui n'est pas la complexifiée d'une algèbre associative réelle.

Cette approche topologique de la variété des algèbres associatives permet d'introduire la notion de rigidité sur les structures affines.

Définition 3.2.2 *Une structure affine Ψ sur une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}$ est dite rigide si l'algèbre associative correspondante $A(\mathfrak{g})$ est rigide dans $\mathcal{A}^c(n)$.*

3.2.2 Approche cohomologique

Il est bien connu qu'une condition suffisante pour qu'une algèbre associative $\mathfrak{a}$ soit rigide dans $\mathcal{A}(n)$ est que $H^2(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ =0 où $H^*(\mathfrak{a},\mathfrak{a})$ est la cohomologie de Hochschild de $\mathfrak{a}$. Supposons que $\mathfrak{a}$ soit commutative. Si μ est l'application bilinéaire définissant le produit sur $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}$ est rigide si toute déformation $\mu_t = \mu + \sum_i t^i\varphi_i$ de μ est isomorphe à μ. La commutativité de μ permet de supposer que toute application φ_i est bilinéaire symétrique. Ainsi, en ne considérant que les cochaines symétriques φ, on peut définir la cohomologie commutative de Harrison de μ en prenant :

$$Z_s^2(\mu,\mu) = \{\varphi \in Sym(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad | \quad \delta_\mu\varphi = 0\}$$

où

$$\delta_\mu\varphi(x,y,z) = \mu(x,\varphi(y,z) - \varphi(\mu(x,y),z) - \mu(\varphi(x,y),z) + \varphi(x,\mu(y,z)).$$

On peut remarquer que pour toute application $f \in End(\mathbb{R}^3)$ le cobord $\delta_\mu f \in Sym(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et donc $\delta_\mu f \in Z_s^2(\mu,\mu)$.

Proposition 3.2.3 *Si* $H_s^2(\mu,\mu) = \frac{Z_s^2(\mu,\mu)}{B_s^2(\mu,\mu)} = \{0\}$ *alors la structure affine correspondante sur* $\mathbb{R}^3$ *est une structure rigide.*

3.3 Structures affines sur une algèbre de Lie abélienne de dimension 2

3.3.1 Classification des algèbres commutatives associatives réelles

• Supposons que l'algèbre A soit commutative associative et unitaire. Alors sa loi est isomorphe à l'une des lois suivantes

$$\left\{\begin{array}{l}\mu_1(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_1(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_1(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_1(e_2,e_2)=e_2\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l}\mu_2(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_2(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_2(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_2(e_2,e_2)=0\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l}\mu_3(e_1,e_1)=e_1\\ \mu_3(e_1,e_2)=e_2\\ \mu_3(e_2,e_1)=e_2\\ \mu_3(e_2,e_2)=-e_1\end{array}\right.$$

• Supposons que A soit nilpotente (et non unitaire). Sa loi est isomorphe à

$$\mu_4(e_1,e_1)=e_2 \qquad ; \qquad \mu_5=0$$

• Supposons que A soit non nilpotente et non unitaire. Alors sa loi est isomorphe à

$$\mu_6(e_1,e_1)=e_1$$

(dans cette liste, les produits non définis sont nuls).

3.3.2 Description des structures affines

Proposition 3.3.1 *Il existe 6 structures affines non-affinement équivalentes sur les algèbres de Lie abéliennes de dimension 2.*

Dans le tableau suivant nous donnons les structures affines sur les algèbres de Lie de dimension

2, l'action correspondante et nous précisons la complétude ou non de ces structures

	structure affine	action affine	complète
A_1	$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ b & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & e^a-1 \\ e^a(e^b-1) & e^ae^b & e^a(e^b-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_2	$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ b & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & e^a-1 \\ be^a & e^a & be^a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_3	$\begin{pmatrix} a & -b & a \\ b & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b & 1-e^a\cos b \\ e^a\sin b & e^a\cos b & e^a\sin b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & \frac{a^2}{2}+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_6	$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & e^a-1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON

3.3.3 Sur le groupe des transformations affines

A chaque structure affine A_i correspond une connexion affine plate et sans torsion ∇^i sur le groupe de Lie abélien G.

L'ensemble de toutes ces transformations affines de (G, ∇^i) est un groupe de Lie, noté $Aff(G, \nabla^i)$. Son algèbre de Lie est l'ensemble des champs de vecteurs affines complet c'est à dire des champs de vecteurs complets vérifiant

$$[X, \nabla^i_Y Z] = \nabla^i_{[X,Y]} Z + \nabla^i_Y [X, Z]$$

Si ∇^i est complet (dans notre cas $i = 4, 5$) alors l'algèbre de Lie de $Aff(G, \nabla^i)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs affines $aff(G, \nabla^i)$ et $Aff(G, \nabla^i)$ agit de façon transitive sur G.

Considérons l'action affine correspondante de ∇^i décrite ci-dessus. La translation correspondante définit un ensemble ouvert $U_i \subset \mathbb{R}^2$. Pour le cas complet $U_i = \mathbb{R}^2$. Pour le cas non complet, on a

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 = U_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > -1\} \\ U_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,,\, (x, y) \neq (1, 0)\} \end{aligned}$$

Soit ϕ une transformation affine qui laisse U_i invariant. Pour $i = 1, 2, 6$ la matrice de ϕ a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a & 0 & e^t - 1 \\ b & c & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $Aff(G,\nabla^i)$ est le plus grand groupe inclus dans le semi-groupe engendré par les matrices précédentes.

Le groupe $Aff(G,\nabla^i) = B_2 \times \mathbb{R}$ où B_2 est le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ constitué des matrices triangulaires.

3.3.4 Structures affines rigides sur une algèbre de Lie abélienne de dimension 2

Lemme 3.3.2 *Toute déformation infinitésimale d'une algèbre associative unitaire dans $\mathcal{A}^c(n)$ est unitaire.*

Preuve. La démonstration est basée sur l'étude des perturbations éléments idempotents faite dans [Ma]. Soit X un élément idempotent d'une algèbre associative de loi μ. Les opérateurs

$$Y \xrightarrow{l_X} XY$$

et

$$Y \xrightarrow{r_X} YX$$

sont simultanément diagonalisables et les valeurs propres sont respectivement (1,1,1,...,1,0,...,0) et (1,1,1,...,1,0,...,0). L'ensemble des valeurs propres est appelé bisystème associé à X. Si X correspond à l'identité, le bisystème est $\{(1,...,1)\,(1,...,1)\}$.

D'après [Ma], si μ' est une perturbation de μ, il existe dans μ' un élément idempotent X' tel que $b(X') = b(X)$. Considérons la perturbation de l'identité dans μ'. Comme le bisystème correspond à $\{\{1,...,1\},\{1,...,1\}\}$ on peut en conclure que X' est l'identité de μ'. ■

Conséquence. L'ensemble des lois des algèbres associatives unitaires est un ouvert de $\mathcal{A}^c(n)$.

Notons par $\theta(\mu)$ l'orbite de la loi μ dans $\mathcal{A}^c(n)$. D'après la classification précédente, on a vu que

$$\mu_i \in \overline{\theta(\mu_1)}$$

pour $i = 2,5,6$. Nous avons donc :

Théorème 3.3.3 *Les structures affines A_1 et A_3 sur une algèbre de Lie abélienne de dimension 2 sont rigides. Les autres structures peuvent être déformées en les structures A_1 ou A_3.*

Conséquence. Toute structure affine complète n'est pas rigide.

3.4 Structures affines invariantes sur $\mathbb{T}^2$

Le groupe de Lie abélien compact $\mathbb{T}^2$ est défini par $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en identifiant (x,y) avec $(x+p,y+q)$, $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

Proposition 3.4.1 *Seules les structures A_4 et A_5 engendrent des structures affines sur le tore $\mathbb{T}^2$.*

Preuve. Il est facile de voir que les actions affines associées à A_1, A_2, A_3 et A_6 sont incompatibles avec le réseau défini par $\mathbb{Z}^2$. Donc seules les structures complètes donnent des structures affines sur $\mathbb{T}^2$. Pour A_4 on obtient les transformations affines suivantes

$$(x,y) \to \left(x+p, px+y+\left(q+p^2\right)\right).$$

Cette structure sur $\mathbb{T}^2$ n'est pas euclidienne. Pour A_5 la structure affine sur $\mathbb{T}^2$ qui est euclidienne correspond aux transformations

$$(x,y) \to (x+p, y+q)\,. \quad \blacksquare$$

Remarque : Dans cette proposition on retrouve dans le cas particulier du tore un résultat classique de Kuiper [Ku] donnant la classification des structures affines sur les surfaces.

3.5 Structures affines sur l' algèbre de Lie abélienne de dimension 3

3.5.1 Classification des algèbres associatives commutatives de dimension 3

Commençons par décrire la classification des algèbres associatives commutatives réelles. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre associative réelle de dimension 3, non-nécessairement unitaire.

Si $\mathfrak{a}$ est simple, alors $\mathfrak{a}$ est, d'après le théorème de Wedderburn, isomorphe à $(M_1(\mathbb{R}))^3$ou $M_1(\mathbb{R}) \oplus M_1(\mathbb{C})$, où $M_n(D)$ est une algèbre de matrices sur une algèbre de division $\mathbb{R}$, c'est à dire $D = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On obtient les algèbres suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_1(e_1,e_i) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_1(e_i,e_1) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_1(e_2,e_2) = e_2 & \\ \mu_1(e_3,e_3) = e_3 & \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{ll} \mu_2(e_1,e_i) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_2(e_i,e_1) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_2(e_2,e_2) = e_2 & \\ \mu_2(e_3,e_3) = e_2 - e_1 & \end{array}\right.$$

Si $\mathfrak{a}$ n'est pas simple, alors $\mathfrak{a} = J(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{s}$ où $\mathfrak{s}$ est simple et $J(\mathfrak{a})$ est l'idéal de Jacobson de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{s} = (M_1(\mathbb{R}))^2$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_3(e_1,e_i) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_3(e_i,e_1) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_3(e_2,e_2) = e_2 & \end{array}\right.$$

Si $\mathfrak{s} = M_1(\mathbb{C})$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_4(e_1,e_i) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_4(e_i,e_1) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_4(e_3,e_3) = e_2 & \end{array}\right.$$

si $J(\mathfrak{a})$ est non abélien ou

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_5(e_1,e_i) = e_i & i=1,2,3 \\ \mu_5(e_i,e_1) = e_i & i=1,2,3 \end{array}\right.$$

si $J(\mathfrak{a})$ est abélien.

Supposons que $\mathfrak{a}$ n'est pas unitaire. Comme la décomposition de Levi est encore vraie dans ce cas, on a les possibilitiés suivantes $\mathfrak{a} \simeq (M_1(\mathbb{R}))^2 \oplus J(\mathfrak{a})$ ou $M_1(\mathbb{C}) \oplus J(\mathfrak{a})$. Ce qui donne les algèbres suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_6(e_1,e_1) = e_1 \\ \mu_6(e_2,e_2) = e_2 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{l} \mu_7(e_1,e_1) = e_1 \\ \mu_7(e_1,e_2) = e_2 \\ \mu_7(e_2,e_1) = e_2 \\ \mu_7(e_2,e_2) = -e_1 \end{array}\right.$$

$$\{\mu_8(e_1, e_1) = e_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_9(e_1, e_1) = e_1 \\ \mu_9(e_1, e_2) = e_2 \\ \mu_9(e_2, e_1) = e_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{10}(e_1, e_1) = e_1 \\ \mu_{10}(e_2, e_2) = e_3 \end{array} \right.$$

Si $\mathfrak{a}$ est nilpotente, elle est isomorphe à l'une des algèbres suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{11}(e_1, e_1) = e_2 \\ \mu_{11}(e_3, e_3) = e_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{12}(e_1, e_1) = e_2 \\ \mu_{12}(e_3, e_3) = -e_2 \end{array} \right.$$

$$\{\mu_{13}(e_1, e_1) = e_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{14}(e_1, e_1) = e_2 \\ \mu_{14}(e_1, e_2) = e_3 \\ \mu_{14}(e_2, e_1) = e_3 \end{array} \right.$$

$$\{\mu_{15}(e_i, e_j) = 0 \qquad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Théorème 3.5.1 *Toute algèbre de Lie associative commutative réelle $\mathfrak{a}$ de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2, ..., 15$. Si $\mathfrak{a}$ est nilpotente, elle est isomorphe à $\mathfrak{a}_i$, $i = 11, ..., 15$.*

3.5.2 Structures affines sur $\mathbb{R}^3$

Pour toute algèbre associative de la classification précédente, on peut entièrement décrire l'action affine sur $\mathbb{R}^3$.

	structure affine	action affine	complète
A_1	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & a+b & 0 & b \\ c & 0 & a+c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ e^a\left(e^b-1\right) & e^{a+b} & 0 & e^a\left(e^b-1\right) \\ e^a\left(e^c-1\right) & 0 & e^{a+c} & e^a\left(e^c-1\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_2	$\begin{pmatrix} a & 0 & -c & a \\ b & a+b & c & b \\ c & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a\cos c & 0 & -e^a\sin c & e^a\cos c-1 \\ -e^a\cos c+e^{a+b} & e^{a+b} & e^a\sin c & -e^a\cos c+e^{a+b} \\ e^a\sin c & 0 & e^a\cos c & e^a\sin c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_3	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & a+b & 0 & b \\ c & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ e^a\left(e^b-1\right) & e^{a+b} & 0 & e^a\left(e^b-1\right) \\ ce^a & 0 & e^a & ce^a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_4	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & a & c & b \\ c & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ \frac{1}{2}\left(2b+c^2\right)e^a & e^a & ce^a & \frac{1}{2}\left(2b+c^2\right)e^a \\ ce^a & 0 & e^a & ce^a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_5	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ c & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ be^a & e^a & 0 & be^a \\ ce^a & 0 & e^a & ce^a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_6	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ 0 & e^b & 0 & e^b-1 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_7	$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b & 0 & e^a\cos b-1 \\ e^a\sin b & e^a\cos b & 0 & e^a\sin b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_8	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_9	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ be^a & e^a & 0 & be^a \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_{10}	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & e^a-1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & b & 1 & \frac{b^2}{2}+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	NON
A_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & 1 & c & b+\frac{1}{2}\left(a^2+c^2\right) \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & 1 & -c & b+\frac{1}{2}\left(a^2-c^2\right) \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & 1 & 0 & \frac{a^2}{2}+b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ a & 1 & 0 & \frac{a^2}{2}+b \\ \frac{a^2}{2}+b & a & 1 & \frac{a^3}{6}+ab+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI
A_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	OUI

Théorème 3.5.2 *Il existe 15 structures affines non affinement équivalentes sur $\mathbb{R}^3$. Elles sont données par :*

A_1	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x+e^{\alpha}-1, \\ e^{\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)x+e^{\alpha+\beta}y, \\ e^{\alpha}\left(e^{\gamma}-1\right)x+e^{\alpha+\gamma}z+e^{\alpha}\left(e^{\gamma}-1\right) \end{cases}$
A_2	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} xe^{\alpha}\cos\gamma-ze^{\alpha}\sin\gamma+e^{\alpha}\cos\gamma-1, \\ \left(-e^{\alpha}\cos\gamma+e^{\alpha+\beta}\right)x+e^{\alpha+\beta}y+ze^{\alpha}\sin\gamma-e^{\alpha}\cos\gamma+e^{\alpha+\beta}, \\ xe^{\alpha}\sin\gamma+ze^{\alpha}\cos\gamma+e^{\alpha}\sin\gamma \end{cases}$
A_3	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x+e^{\alpha}-1, \\ e^{\alpha}\left(e^{\beta}-1\right)x+e^{\alpha+\beta}y+e^{\alpha}\left(e^{\beta}-1\right), \\ \gamma e^{\alpha}x+e^{\alpha}z+\gamma e^{\alpha} \end{cases}$
A_4	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ \beta x+e^{\alpha}y+\gamma z+\beta, \\ \gamma x+e^{\alpha}z+\gamma \end{cases}$
A_5	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ \beta x+e^{\alpha}y+\beta, \\ \gamma x+e^{\alpha}z+\gamma \end{cases}$
A_6	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ e^{\beta}y-1+e^{\beta}, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_7	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} xe^{\alpha}\cos\beta-ye^{\alpha}\sin\beta-1+e^{\alpha}\cos\beta, \\ xe^{\alpha}\sin\beta+ye^{\alpha}\cos\beta+e^{\alpha}\sin\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_8	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ y+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_9	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ \beta x+e^{\alpha}y+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_{10}	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} e^{\alpha}x-1+e^{\alpha}, \\ y+\beta, \\ \beta y+z+\gamma \end{cases}$
A_{11}	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} x+\alpha, \\ \alpha x+y+\gamma z+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_{12}	$(x,y,z)\rightarrow$	$\begin{cases} x+\alpha, \\ \alpha x+y-\gamma z+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$

A_{13}	$(x,y,z) \to$	$\begin{cases} x+\alpha, \\ \alpha x+y+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$
A_{14}	$(x,y,z) \to$	$\begin{cases} x+\alpha, \\ \alpha x+y+\beta, \\ \beta x+\alpha y+z+\gamma \end{cases}$
A_{15}	$(x,y,z) \to$	$\begin{cases} x+\alpha, \\ y+\beta, \\ z+\gamma \end{cases}$

Seules les structures A_i, $i = 11, .., 15$ sont complètes.

3.5.3 Structures affines rigides

Rappelons qu'une structure affine sur $\mathbb{R}^3$ est dite rigide si l'algèbre associative commutative réelle correspondante est rigide dans la variété algébrique $\mathcal{A}^c(3)$.

Comme les lois μ_1 et μ_2 définissent des algèbres associatives semi-simples, leur second groupe de cohomologie est trivial. Ces structures sont rigides.

Considérons les autres lois μ_i. On peut aisément déterminer l'espace linéaire $H^2_s(\mu,\mu)$ et présenter les résultats de la manière suivante :

Cas unitaire :

lois	$dim H^2_s(\mu,\mu)$	base de $H^2_s(\mu,\mu)$
μ_3	1	$\varphi(e_3,e_3) = e_2 - e_1$
μ_4	2	$\begin{cases} \varphi_1(e_2,e_2) = e_2 \\ \varphi_2(e_2,e_3) = e_3. \end{cases}$
μ_5	4	$\begin{cases} \varphi_1(e_2,e_2) = e_2 \\ \varphi_2(e_2,e_3) = e_3. \end{cases}$; $\begin{cases} \varphi_3(e_3,e_3) = e_2 \\ \varphi_4(e_3,e_3) = e_3. \end{cases}$

Cas non unitaire :

lois	$dim H^2_s$	base de $H^2_s(\mu,\mu)$
μ_6	1	$\varphi_1(e_3,e_3) = e_3$
μ_7	1	$\varphi_1(e_3,e_3) = e_3$
μ_8	6	$\begin{cases} \varphi_1(e_2,e_2) = e_2 \\ \varphi_2(e_2,e_2) = e_3. \end{cases}$; $\begin{cases} \varphi_3(e_3,e_3) = e_2 \\ \varphi_4(e_3,e_3) = e_3. \end{cases}$; $\begin{cases} \varphi_5(e_2,e_3) = e_2 \\ \varphi_6(e_3,e_3) = e_3. \end{cases}$
μ_9	3	$\begin{cases} \varphi_1(e_2,e_2) = e_1 \\ \varphi_2(e_2,e_3) = e_2. \end{cases}$; $\varphi_3(e_3,e_3) = e_3$
μ_{10}	1	$\varphi_1(e_2,e_3) = e_2, \varphi_1(e_3,e_3) = e_3.$

Cas nilpotent et complet :

lois	$dimH_s^2$	base de $H_s^2(\mu,\mu)$
μ_{11}	3	$\begin{cases}\varphi_1(e_1,e_3)=e_1\\ \varphi_1(e_2,e_3)=e_2.\end{cases};\begin{cases}\varphi_2(e_1,e_3)=e_3\\ \varphi_2(e_3,e_3)=e_1.\end{cases};\{\ \varphi_3(e_3,e_3)=e_3.$
μ_{12}	4	$\begin{array}{l}\varphi_1(e_1,e_2)=e_2.\\ \varphi_2(e_3,e_3)=e_3.\end{array};\begin{cases}\varphi_3(e_1,e_3)=e_3\\ \varphi_3(e_3,e_3)=e_1.\end{cases};\begin{cases}\varphi_4(e_1,e_1)=e_3\\ \varphi_4(e_1,e_3)=e_1\\ \varphi_4(e_2,e_3)=2e_2.\end{cases}$
μ_{13}	7	$\begin{cases}\varphi_1(e_1,e_2)=e_1\\ \varphi_1(e_2,e_2)=e_2.\end{cases}\ \varphi_2(e_1,e_2)=e_2.\ ;\ \varphi_3(e_1,e_2)=e_3.\ \begin{cases}\varphi_4(e_1,e_3)=e_1\\ \varphi_4(e_2,e_3)=e_2.\end{cases}\ \begin{array}{l}\varphi_5(e_1,e_3)=e_3.\\ \varphi_6(e_3,e_3)=e_2.\\ \varphi_7(e_3,e_3)=e_3.\end{array}$
μ_{14}	3	$\begin{cases}\varphi_1(e_1,e_3)=e_1\\ \varphi_1(e_2,e_2)=e_1\\ \varphi_1(e_2,e_3)=e_2\\ \varphi_1(e_3,e_3)=e_3.\end{cases};\begin{cases}\varphi_2(e_1,e_3)=e_2\\ \varphi_2(e_2,e_2)=e_2\\ \varphi_2(e_2,e_3)=e_3.\end{cases};\begin{cases}\varphi_3(e_1,e_3)=e_3\\ \varphi_3(e_2,e_2)=e_3.\end{cases}$
μ_{15}	18	

On suppose que $\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i)$ et que les $\varphi(e_s,e_t)$ non définis sont nuls.
On notera $\mu_i \to \mu_j$ quand $\mu_i \in \overline{\mathcal{O}(\mu_j)}$. On obtient alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \rightarrow & \mu_1 & & & \mu_2 & \\
 & \nearrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & & & \nwarrow \\
\nearrow & & \mu_{10} & \mu_6 & \mu_4 & & & \mu_3 \\
\uparrow & \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \nearrow & \uparrow \\
\mu_{14} & \mu_{12} & \mu_{11} & \uparrow & \mu_5 & \nearrow & & \mu_7 \\
 & & \uparrow & \mu_8 & & & & \uparrow \\
 & & \mu_{13} & & \searrow & \rightarrow & & \mu_9
\end{array}$$

Théorème 3.5.3 *Il existe deux structures affines rigides sur l'algèbre de Lie abélienne de dimension 3. Ce sont les structures associées aux algèbres associatives semi-simples définies par les lois μ_1 et μ_2.*

3.6 Structures affines invariantes sur $\mathbb{T}^3$

On peut voir que les actions affines de A_1 à A_{10} sont compatibles avec l'action de $\mathbb{Z}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ si les exponentielles qui apparaissent dans les expressions analytiques des transformations affines sont égales à 1. On obtient l'identité pour A_1 et A_3. Comme A_2 est incompatible avec l'action de $\mathbb{Z}^3$ pour toutes les valeurs des paramètres α,β,γ, les structures affines correspondant aux cas unitaires sont données par A_4 et A_5 pour $\alpha=0$. Cela correspond aux structures affines suivantes sur le tore $\mathbb{T}^3$:

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to \begin{cases} x \\ px+y+qz+p \\ qx+z+q \end{cases}$$

et

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to \left\{ \begin{array}{l} x \\ px+y+p \\ qx+z+q \end{array} \right.$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

Les actions de A_6 à A_{10}, induisent des structures affines sur le tore si $\alpha = \beta = 0$ pour A_6 et $\alpha = 0$ pour les structures A_7 à A_{10}. Mais cela apparait comme cas particulier de A_{11}, A_{13} et A_{14}. Examinons les cas complet et nilpotent ; on trouve les structures affines suivantes sur $\mathbb{T}^3$:

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to$	$\left\{ \begin{array}{l} x+p, \\ px+y+rz+q, \\ z+r \end{array} \right.$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to$	$\left\{ \begin{array}{l} x+p, \\ px+y-rz+q, \\ z+r \end{array} \right.$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to$	$\left\{ \begin{array}{l} x+p, \\ px+y+q, \\ z+r \end{array} \right.$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to$	$\left\{ \begin{array}{l} x+p, \\ px+y+q, \\ qx+py+z+r \end{array} \right.$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \to$	$\left\{ \begin{array}{l} x+p, \\ y+q, \\ z+r \end{array} \right.$

Théorème 3.6.1 *Il existe 7 structures affines sur le tore $\mathbb{T}^3$. Elles correspondent aux sous-groupes affines cristallographiques de $Aff(\mathbb{R}^3)$:*

$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & q & p \\ q & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & p \\ q & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\Gamma_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ p & 1 & r & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\Gamma_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ p & 1 & -r & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\Gamma_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ p & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	$\Gamma_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ p & 1 & 0 & q \\ q & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\Gamma_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$	

Remarque. Les structures nilpotentes complètes et les structures affines complètes sur les algèbres unimodulaires sont entièrement classifiées dans [F.D].

Chapitre 4

Algèbres de contact filiformes

4.1 Propriétés de l'algèbre de Benoist

Comme nous l'avons rappelé au premier chapitre, Yves Benoist ([Be]) a montré que sur les algèbres de Lie $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$ de dimension 11 définies par les crochets suivants sur une base $X_1, ..., X_{11}$

$$\begin{array}{l}
[X_1, X_i] = X_{i+1} \qquad i = 2, .., 10 \\
[X_2, X_3] = X_5 \\
[X_2, X_4] = X_6 \\
[X_2, X_5] = -2X_7 + X_8 + tX_9 \\
[X_2, X_6] = -5X_8 + 2X_9 + 2tX_{10} \\
[X_2, X_7] = -\frac{13}{5}X_9 + \frac{51}{25}X_{10} + \frac{448+2475t}{2000}X_{11} \\
[X_2, X_8] = \frac{26}{5}X_{10} + \frac{28}{25}X_{11} \\
[X_2, X_9] = \frac{19}{16}X_{11} \\
[X_3, X_4] = 3X_7 - X_8 - tX_9 \\
[X_3, X_5] = 3X_8 - X_9 - tX_{10} \\
[X_3, X_6] = -\frac{12}{5}X_9 - \frac{1}{25}X_{10} + \frac{-448+1525t}{2000}X_{11} \\
[X_3, X_7] = \frac{-39}{5}X_{10} + \frac{23}{25}X_{11} \\
[X_3, X_8] = \frac{321}{80}X_{11} \\
[X_4, X_5] = \frac{27}{5}X_9 - \frac{24}{25}X_{10} + \frac{448-3525t}{2000}X_{11} \\
[X_4, X_6] = \frac{27}{5}X_{10} - \frac{24}{25}X_{11} \\
[X_4, X_7] = -\frac{189}{16}X_{11} \\
[X_5, X_6] = \frac{1377}{80}X_{11}
\end{array}$$

il n'existe aucune structure affine.

Proposition 4.1.1 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$ est munie d'une forme de contact*

Preuve. Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension $2p+1$ est dite de contact s'il existe une forme ω sur $\mathfrak{g}^*$telle que

$$\omega \wedge d\omega^p \neq 0$$

Soit $\omega_1, ..., \omega_{11}$ la base duale de $X_1, ..., X_{11}$. Les équations de Maurer Cartan donnent

$$d\omega_{11} \quad = \quad -\omega_1 \wedge \omega_{10} - \frac{448+2475t}{2000}\omega_2 \wedge \omega_7 - \frac{28}{25}\omega_2 \wedge \omega_8 - \frac{19}{16}\omega_2 \wedge \omega_9 +$$

$$\frac{448-1525t}{2000}\omega_3\wedge\omega_6-\frac{23}{25}\omega_3\wedge\omega_7-\frac{321}{80}\omega_3\wedge\omega_8+$$
$$\frac{-448+3525t}{2000}\omega_4\wedge\omega_5+\frac{24}{25}\omega_4\wedge\omega_6+$$
$$\frac{189}{16}\omega_4\wedge\omega_7-\frac{1377}{80}\omega_5\wedge\omega_6$$

et donc $\omega_{11}\wedge(d\omega_{11})^5\neq 0$. Ainsi ω_{11} est une forme de contact sur $\mathfrak{a}_{-2,1,t}$.■

Définition 4.1.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ est l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est caractéristiquement nilpotente si toute dérivation $f\in\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ est un endomorphisme nilpotent.*

Proposition 4.1.3 *L'algèbre de Benoist $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_{-2,1,0}$ est caractéristiquement nilpotente.*

Preuve. Une base de $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ est donnée par

$$\{adX_1,adX_2,adX_3,adX_4,adX_5,adX_6,adX_7,adX_8,adX_9,adX_{10},f_1,f_2,f_3\}$$

où les dérivations f_1,f_2,f_3 sont données par

$$\left\{\begin{array}{llllll} f_1: & X_2\longmapsto X_9 & f_2: & X_2\longmapsto X_{10} & f_3: & X_2\longmapsto X_{11} \\ & X_3\longmapsto X_{10}\ , & & X_3\longmapsto X_{11}\ , & & \\ & X_4\longmapsto X_{11} & & & & \end{array}\right\}$$

La justification se fait en utilisant le procédé de construction des algèbres caractéristiquement nilpotentes développé par Campoamor dans sa thèse [Ca]. L'algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ s'écrit donc sur la base $Z_i=adX_i\quad 1\leq i\leq 10$, $Z_j=f_j\quad 11\leq j\leq 13$

$$\begin{array}{ll}
[Z_1,Z_i]=Z_{i+1}\qquad i=2,..,9 & [Z_2,Z_{12}]=-Z_{10}\\
[Z_2,Z_3]=Z_5 & [Z_3,Z_4]=3Z_7-Z_8\\
[Z_2,Z_4]=Z_6 & [Z_3,Z_5]=3Z_8-Z_9\\
[Z_2,Z_5]=-2Z_7+Z_8 & [Z_3,Z_6]=-\frac{12}{5}Z_9-\frac{1}{25}Z_{10}\\
[Z_2,Z_6]=-5Z_8+2Z_9 & [Z_3,Z_7]=-\frac{39}{5}Z_{10}\\
[Z_2,Z_7]=-\frac{13}{5}Z_9+\frac{51}{25}Z_{10} & [Z_3,Z_{11}]=-Z_{10}\\
[Z_2,Z_8]=\frac{26}{5}Z_{10} & [Z_4,Z_5]=\frac{27}{5}Z_9-\frac{24}{25}Z_{10}\\
[Z_2,Z_{11}]=-Z_9 & [Z_4,Z_6]=\frac{27}{5}Z_{10}
\end{array}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc caractéristiquement nilpotente. ■

Corollaire 4.1.4 $\mathcal{D}er(\mathfrak{a}_{-2,1,0})=\mathfrak{n}_{12}\oplus\mathbb{R}$ *où $\mathfrak{n}_{12}$ est un idéal nilpotent de dimension* 12, *le produit étant direct.*

Preuve. Le vecteur $Z_{13}\in Z(\mathcal{D}er(\mathfrak{g}))$ et $Z_{13}\notin\mathcal{C}^1(\mathcal{D}er(\mathfrak{g}))$. Ainsi $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})=\mathfrak{n}_1\oplus\mathbb{K}Z_{13}$, $\mathfrak{n}_1$ et $\mathbb{K}Z_{13}$ étant des idéaux de $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$. ■

Proposition 4.1.5 $\mathcal{D}er(\mathfrak{a}_{-2,1,0})=\mathfrak{n}_{12}\oplus\mathbb{R}$ *est une algèbre de Lie nilpotente non caractéristiquement nilpotente mais l'idéal $\mathfrak{n}_{12}$ est caractéristiquement nilpotent.*

Preuve. Soit $f\in\mathcal{D}er(\mathcal{D}er(\mathfrak{g}))$ défini par

$$f(Z_i)=0\quad i=1,...,12$$
$$f(Z_{13})=Z_{13}$$

Une telle dérivation est semi-simple ce qui montre que $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ n'est pas caractéristiquement nilpotente. Par contre, d'après [Ca], l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_{12}$ est nilpotente et caractéristiquement nilpotente. ■

Dans le chapitre 2 nous avons vu que toute algèbre de Lie filiforme non caractéristiquement nilpotente était affine. Nous avons également vu que la réciproque était fausse en examinant l'exemple de Dixmier. Ceci nous conduit à émettre une conjecture sur la structure des algèbres caractéristiquement nilpotentes non-affines.

Conjecture : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas affine alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0$ est caractéristiquement nilpotente et pour chaque $i \geq 0$, $\mathcal{D}er(\mathfrak{g}_i)$ est une extension centrale triviale d'une algèbre caractéristiquement nilpotente, $\mathfrak{g}_{i+1}$.

4.2 Algèbres de Lie de contact

Proposition 4.2.1 *([Go]) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une forme de contact. Alors son centre $Z(\mathfrak{g})$ est de dimension 1.*

Preuve. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension $2p+1$ et munie d'une forme de contact alors $\dim Z(\mathfrak{g}) \leq 1$. Ceci résulte du fait que si l'on suppose $\omega(Z(\mathfrak{g})) = 0$ alors

$$\forall X \in Z(\mathfrak{g}) \quad d\omega(X,Y) = -\omega\,[X,Y] = 0$$

donc $\exists X$ tel que $\omega(X) = 0$ et $X \lrcorner d\omega = 0$. X appartient au sous-espace caractéristique et donc $\omega \wedge d\omega^p = 0$. Donc $\omega(Z(\mathfrak{g})) \neq 0$ ce qui prouve que $\dim Z(\mathfrak{g}) \leq 1$. Si de plus l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors $\dim Z(\mathfrak{g}) = 1$ puisque le centre d'une algèbre nilpotente n'est jamais réduit à $\{0\}$. D'où la proposition. ■

Proposition 4.2.2 *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente munie d'une forme de contact alors $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ est symplectique.*

Preuve. Sur $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ le cocycle induit par $d\omega$, où ω est de contact, est de rang maximum.

On en déduit donc que toute algèbre de contact est une extension centrale d'une algèbre de Lie symplectique :

$$0 \to V \to \mathfrak{g}_{2p+1} \to (\mathfrak{g}_{2p}, \theta) \to 0. \quad ■$$

L'algèbre $\mathfrak{g}_{2p+1}$ est donc isomorphe à $V \oplus \mathfrak{g}_{2p}$ et on a les crochets suivants

$$\begin{array}{l} [V, X_i] = 0 \\ [X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k + \theta(X_i, X_j)V \end{array}$$

Or toute algèbre symplectique est affine. Ainsi on a

Proposition 4.2.3 *Toute algèbre de Lie nilpotente de contact est une extension centrale d'une algèbre affine.*

4.3 Structures affines sur les algèbres de Lie de contact.

Quand l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de contact, en quotientant par le centre, on obtient une algèbre de Lie symplectique qui est elle toujours affine. L'idée est donc de construire des structures affines sur $\mathfrak{g}$ en prolongeant une structure affine donnée sur l'algèbre de Lie symplectique associée.

Soit donc $(\mathfrak{g}_{2p}, \theta)$ une algèbre de Lie symplectique. Nous avons rappelé au premier chapitre que la structure définie par

$$\nabla_X Y = f(X)Y$$

où $f(X)$ est l'endomorphisme défini par

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \qquad \theta\left(f(X)(Y), Z\right) = -\theta(Y, [X, Z])$$

est une structure affine.

4.3.1 Extension centrale d'algèbres de Lie nilpotentes affines

Soit $(\mathfrak{g}, \nabla)$ une algèbre de Lie munie d'une structure affine ∇. Considérons un 2-cocycle $\theta \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ et l'extension centrale associée

$$0 \to V \to \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

avec $\dim V = 1$.

Le crochet de Lie sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ identifiée à $\mathfrak{g} \oplus V$ est défini par

$$[(X, \alpha), (Y, \lambda)]_{\widetilde{\mu}} = \left([X, Y]_\mu, \theta(X, Y)\right)$$

Soit $\widetilde{\nabla} : \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ un opérateur vérifiant

$$\begin{cases} \widetilde{\nabla}((X,0),(Y,0)) = (\nabla(X,Y), \varphi(X,Y)) \\ \widetilde{\nabla}((X,0),(0,\lambda)) = \widetilde{\nabla}((0,\lambda),(X,0)) \end{cases}$$

où φ est une application bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ vérifiant

$$\varphi(X, Y) - \varphi(Y, X) = \theta(X, Y).$$

Alors, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\nabla}((X,\alpha),(Y,\lambda)) - \widetilde{\nabla}((Y,\lambda),(X,\alpha)) \\ &=(\nabla(X,Y), \varphi(X,Y)) + \lambda\widetilde{\nabla}((X,0),(0,1)) + \alpha\widetilde{\nabla}((0,1),(Y,0)) \\ &+\alpha\lambda\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) - (\nabla(Y,X), \varphi(Y,X)) - \alpha\widetilde{\nabla}((Y,0),(0,1)) \\ &-\lambda\widetilde{\nabla}((0,1),(X,0)) - \lambda\alpha\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) \\ &=\left([X,Y]_\mu, \theta(X,Y)\right) \end{aligned}$$

Mais comme

$$[(X, \alpha), (Y, \lambda)]_{\widetilde{\mu}} = \left([X, Y]_\mu, \theta(X, Y)\right)$$

on en déduit
$$\widetilde{\nabla}\left(\left(X,\alpha\right),\left(Y,\lambda\right)\right)-\widetilde{\nabla}\left(\left(Y,\lambda\right),\left(X,\alpha\right)\right)=\left[\left(X,\alpha\right),\left(Y,\lambda\right)\right]_{\widetilde{\mu}}.$$

L'opérateur $\widetilde{\nabla}$ est donc associé à une connexion linéaire sans torsion sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Posons
$$\begin{aligned}&C(\ (X,\alpha),(Y,\lambda),(Z,\rho))\\&=\widetilde{\nabla}\Big((X,\alpha),\widetilde{\nabla}\left((Y,\lambda),(Z,\rho)\right)\Big)-\widetilde{\nabla}\Big((Y,\lambda),\widetilde{\nabla}\left((X,\alpha),(Z,\rho)\right)\Big)\\&-\widetilde{\nabla}\left(\left[(X,\alpha),(Y,\lambda)\right]_{\widetilde{\mu}},(Z,\rho)\right).\end{aligned}$$

On a :
$$\begin{aligned}&C(\ (X,\alpha),(Y,\lambda),(Z,\rho))\\&=\widetilde{\nabla}\Big((X,\alpha),\left(\nabla\left(Y,Z\right),\varphi\left(Y,Z\right)\right)+\rho\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)+\lambda\widetilde{\nabla}\left((0,1),(Z,0)\right)+\lambda\rho\widetilde{\nabla}\left((0,1),(0,1)\right)\Big)\\&\text{-}\widetilde{\nabla}\Big((Y,\lambda),\left(\nabla\left(X,Z\right),\varphi\left(X,Z\right)\right)+\rho\widetilde{\nabla}\left((X,0),(0,1)\right)+\alpha\widetilde{\nabla}\left((0,1),(Z,0)\right)+\alpha\rho\widetilde{\nabla}\left((0,1),(0,1)\right)\Big)\\&-\widetilde{\nabla}\Big(\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},\theta\left(X,Y\right)\Big),(Z,\rho)\Big)\end{aligned}$$

En particulier
$$\begin{aligned}&C(\ (X,0),(Y,0),(Z,0))\\&=\widetilde{\nabla}\left((X,0),\left(\nabla\left(Y,Z\right),\varphi\left(Y,Z\right)\right)\right)-\widetilde{\nabla}\left((Y,0),\left(\nabla\left(X,Z\right),\varphi\left(X,Z\right)\right)\right)\\&-\widetilde{\nabla}\Big(\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},\theta\left(X,Y\right)\Big),(Z,0)\Big)\\&=\left(\nabla\left(X,\nabla\left(Y,Z\right)\right),\varphi\left(X,\nabla\left(Y,Z\right)\right)\right)+\varphi\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((X,0),(0,1)\right)\\&-\left(\nabla\left(Y,\nabla\left(X,Z\right)\right),\varphi\left(Y,\nabla\left(X,Z\right)\right)\right)-\varphi\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)\\&-\Big(\nabla\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\Big),\varphi\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\Big)\Big)-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)\\&=\Big(0,\varphi\left(X,\nabla\left(Y,Z\right)\right)-\varphi\left(Y,\nabla\left(X,Z\right)\right)-\varphi\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\Big)\Big)+\varphi\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((X,0),(0,1)\right)\\&-\varphi\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)\end{aligned}$$

D'où
$$\begin{aligned}&C((X,0),(Y,0),(Z,0))\\&=\Big(0,\varphi\left(X,\nabla\left(Y,Z\right)\right)-\varphi\left(Y,\nabla\left(X,Z\right)\right)-\varphi\Big(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\Big)\Big)\\&+\varphi\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((X,0),(0,1)\right)-\varphi\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)\\&-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)\end{aligned}$$

De même
$$\begin{aligned}&C((X,0),(0,1),(Y,0))\\&=\widetilde{\nabla}\Big((X,0),\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)\Big)-\widetilde{\nabla}\left((0,1),\left(\nabla(X,Y),\varphi\left(X,Y\right)\right)\right)\\&=\widetilde{\nabla}\Big((X,0),\widetilde{\nabla}\left((Y,0),(0,1)\right)\Big)-\widetilde{\nabla}\left((\nabla(X,Y),0),(0,1)\right)-\varphi\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((0,1),(0,1)\right)\end{aligned}$$

Supposons que le tenseur C vérifie
$$C((X,0),(0,1),(Y,0))=0$$

et
$$\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,\widetilde{\nabla}\left((Y,0)\,,(0,1)\right)\right)=\widetilde{\nabla}\left((\nabla(X,Y),(0,1))+\varphi\,(X,Y)\,\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,(0,1)\right)\right.$$

On en déduit que $C(\ (X,0)\,,(Y,0)\,,(0,1))=0$ car

$$\begin{aligned}
&C(\ (X,0)\,,(Y,0)\,,(0,1))\\
&=\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,\widetilde{\nabla}\left((Y,0)\,,(0,1)\right)\right)-\widetilde{\nabla}\left((Y,0)\,,\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,(0,1)\right)\right)\\
&-\widetilde{\nabla}\left(([X,Y]\,,\theta(X,Y)),(0,1)\right)\\
&=\widetilde{\nabla}\left((\nabla(X,Y),0),(0,1)\right)+\varphi\,(X,Y)\,\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,(0,1)\right)\\
&-\widetilde{\nabla}\left((\nabla(Y,X),0),(0,1)\right)-\varphi\,(Y,X)\,\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,(0,1)\right)-\widetilde{\nabla}\left(([X,Y]\,,\theta(X,Y)),(0,1)\right)\\
&=\widetilde{\nabla}\left(([X,Y]\,,0),(0,1)\right)+\theta(X,Y)\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,(0,1)\right)\\
&-\widetilde{\nabla}\left([X,Y]\,,0),(0,1)\right)-\theta(X,Y)\widetilde{\nabla}\left(0,1),(0,1)\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

Enfin nous avons la relation

$$C((0,1)\,,(Y,0)\,,(0,1))=\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,\widetilde{\nabla}\left((Y,0)\,,(0,1)\right)\right)-\widetilde{\nabla}\left((Y,0)\,,\widetilde{\nabla}\left((0,1)\,,(0,1)\right)\right)$$

Ecrivons les conditions pour que le tenseur C soit identiquement nul. Soit π la projection canonique de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$:

$$\pi(X,\alpha)=X.$$

Identifions $(X,0)$ à X ce qui permet de considérer $\mathfrak{g}$ comme un sous-espace de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Notons V_X le vecteur

$$V_X=\pi(\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,(0,1)\right).$$

Si le tenseur C est nul alors

$$C((X,0)\,,(Y,0)\,,(Z,0))=0$$

implique, d'après les relations ci dessus :

$$\varphi\,(Y,Z)\,V_X-\varphi\,(X,Z)\,V_Y-\theta\,(X,Y)\,V_Z=0$$

pour tous $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

Examinons tout d'abord le cas où $\theta=0$, ce qui donne $\varphi=0$. Dans ce cas l'extension est triviale. L'opérateur $\widetilde{\nabla}$ défini par

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,(Y,0)\right)&=(\nabla\,(X,Y)\,,0)\\
\widetilde{\nabla}\left((X,0)\,,(0,\lambda)\right)&=0\\
\widetilde{\nabla}\left((0,\mu)\,,(0,\lambda)\right)&=0
\end{aligned}$$

définit une structure affine sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Supposons donc $\varphi\neq 0$.

4.3.2 Cas où $(\mathfrak{g},\theta)$ est symplectique et $\varphi=\frac{\theta}{2}$.

On a alors

$$\theta\left(\left[X,Y\right],Z\right)=-\theta\left(Y,\nabla(X,Z)\right)$$

et les relations ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned}
&C((X,0),(Y,0),(Z,0))\\
=\;&\frac{1}{2}\left(0,\theta\left(X,\nabla\left(Y,Z\right)\right)-\theta\left(Y,\nabla\left(X,Z\right)\right)-\theta\left(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\theta\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,1\right)\right)-\frac{1}{2}\theta\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(Y,0\right),\left(0,1\right)\right)\\
&-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\left(0,-\theta\left(\left[Y,X\right],Z\right)+\theta\left(\left[X,Y\right],Z\right)-\theta\left(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\theta\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,1\right)\right)-\frac{1}{2}\theta\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(Y,0\right),\left(0,1\right)\right)\\
&-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)\\
=\;&-\frac{1}{2}\left(0,\theta\left(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\right)\right)+\frac{1}{2}\theta\left(Y,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,1\right)\right)-\\
&\frac{1}{2}\theta\left(X,Z\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(Y,0\right),\left(0,1\right)\right)-\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left((Z,0),(0,1)\right)
\end{aligned}$$

D'après les notations ci-dessus on peut écrire $\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,1\right)\right)=\left(V_X,a_X\right)$. Le tenseur de courbure nul implique que

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}\theta\left(Y,Z\right)V_X-\tfrac{1}{2}\theta\left(X,Z\right)V_Y-\theta\left(X,Y\right)V_Z=0_n\\
\theta\left(\left[X,Y\right]_{\mu},Z\right)+\theta\left(Y,Z\right)a_X-\theta\left(X,Z\right)a_Y-2\theta\left(X,Y\right)a_Z=0
\end{gathered}$$

Comme θ est de rang maximum, pour tout $X\in\mathfrak{g}$, il existe $Y,Z\in\mathfrak{g}$ tels que $\theta\left(X,Z\right)=0=\theta\left(X,Y\right)$ et $\theta\left(Y,Z\right)=1$. La première des relations précédentes implique donc $V_X=0$. Ainsi

$$\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,1\right)\right)=\left(0,a_X\right)$$

pour tout $X\in\mathfrak{g}$. On a alors

$$\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\widetilde{\nabla}\left(\left(Y,0\right),\left(0,1\right)\right)\right)=\widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,a_Y\right)\right)=a_Xa_Y\left(0,1\right)$$

donc

$$C((X,0),(0,1),(Y,0))=0$$

entraîne que

$$a_Xa_Y\left(0,1\right)=a_{\nabla(X,Y)}\left(0,1\right)+\frac{1}{2}\theta\left(X,Y\right)\widetilde{\nabla}\left(\left(0,1\right),\left(0,1\right)\right)$$

Choisissons $X,Y\in\mathfrak{g}$ tels que $\theta\left(X,Y\right)=1$. On en déduit que

$$\pi(\widetilde{\nabla}\left(\left(0,1\right),\left(0,1\right)\right))=0$$

et donc

$$\widetilde{\nabla}\left(\left(0,1\right),\left(0,1\right)\right)=\left(0,a\right).$$

De plus

$$\begin{aligned} a_X a_Y &= a_{\nabla(X,Y)} + \frac{1}{2}\theta\left(X,Y\right)a \\ a_X a_Y &= a_{\nabla(Y,X)} - \frac{1}{2}\theta\left(X,Y\right)a \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \theta\left(X,Y\right)a &= -a_{\nabla(X,Y)} + a_{\nabla(X,Y)} \\ &= -a_{[X,Y]}. \end{aligned}$$

Considérons la forme α de $\mathfrak{g}^*$ définie par $\alpha(X) = a_X$. Si $a \neq 0$ alors $\theta\left(X,Y\right) = \frac{1}{a}d\alpha(X,Y)$. Le cocycle symplectique θ est donc exact. Or sur toute algèbre de Lie nilpotente, la classe des formes linéaires est impaire ([Go]). On en déduit qu'il ne peut exister sur $\mathfrak{g}$ de forme symplectique exacte et l'égalité précédente ne peut avoir lieu. Si $a = 0$, alors

$$\widetilde{\nabla}\left(\left(0,1\right),\left(0,1\right)\right)=0$$

et

$$a_{[X,Y]} = 0.$$

Ainsi l'application

$$\alpha : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$$

donnée par $\alpha(X) = a_X$ définit une représentation linéaire de dimension 1.

Proposition 4.3.1 *L'application $\widetilde{\nabla}$ sur l'algèbre de contact $\widetilde{\mathfrak{g}}$ donnée par*

$$\begin{cases} \widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(Y,0\right)\right) = \left(\nabla\left(X,Y\right), 1/2\theta\left(X,Y\right)\right) \\ \widetilde{\nabla}\left(\left(X,0\right),\left(0,\lambda\right)\right) = \widetilde{\nabla}\left(\left(0,\lambda\right),\left(X,0\right)\right) \end{cases}$$

où ∇ est une structure affine sur $\mathfrak{g} = \frac{\widetilde{\mathfrak{g}}}{Z(\widetilde{\mathfrak{g}})}$ associée à la structure symplectique θ est une structure affine s'il existe une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ telle que

$$\theta\left(\left[X,Y\right]_\mu, Z\right) + \theta\left(Y,Z\right)a_X - \theta\left(X,Z\right)a_Y - 2\theta\left(X,Y\right)a_Z = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

4.3.3 Cas où $(\mathfrak{g}, \theta)$ est symplectique et $\varphi \neq \frac{\theta}{2}$

On suppose toujours

$$\theta\left(\left[X,Y\right],Z\right) = -\theta\left(Y,\nabla(X,Z)\right)$$

Nous avons vu que la courbure nulle impliquait :

$$\varphi\left(Y,Z\right)V_X - \varphi\left(X,Z\right)V_Y - \theta\left(X,Y\right)V_Z = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $V_X \neq 0$. Soit un tel X . L'orthogonal pour θ de l'espace $\mathbb{R}\{X\}$ est de codimension 1. Soit $Y \in \mathbb{R}\{X\}^{\perp}$. Alors $\theta(X, Y) = 0$ et

$$\varphi(Y, Z) V_X = \varphi(X, Z) V_Y \quad , Z \in \mathfrak{g}$$

On a $V_Y \neq 0$ s'il existe $Z \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi(Y, Z) \neq 0$ et dans ce cas les vecteurs non nuls V_X et V_Y sont colinéaires. Posons

$$V_X = \lambda_{X,Y} V_Y$$

alors

$$\lambda_{X,Y} \varphi(Y, Z) = \varphi(X, Z)$$

pour tout $Z \in \mathfrak{g}$. Considérons une base $(X_1, ..., X_{2m})$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à laquelle la matrice de θ est réduite :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Ceci montre que la matrice de φ est au moins de rang 2 car $\varphi(X, Y) - \varphi(Y, X) = \theta(X, Y)$. Par exemple en dimension 4 la matrice de φ serait de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 - 1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_3 & \alpha_7 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_4 & \alpha_8 & \alpha_{12} - 1 & \alpha_{16} \end{pmatrix}$$

On peut supposer que $\varphi(X_1, \cdot) \neq 0$ (sinon il existe un X_i tel que $\varphi(X_i, Z) \neq 0$ puisque φ est de rang non nul et il suffit de prendre une base adaptée à θ dont le premier vecteur est le vecteur X_i). Soit $Y \in \{X_3, ..., X_{2n}\}$; on a $\theta(X_1, Y) = 0$

$$\varphi(X_1, Z) = \lambda_{X_1,Y} \varphi(Y, Z) \qquad \text{pour tout } Z \in \mathfrak{g}$$

et

$$\lambda_{X_1,Y} \neq 0$$

Donc les $2m - 2$ dernières colonnes de la matrice de φ (relative à la base choisie) sont proportionnelles à la première.Mais on a aussi $\theta(X_2, X_3) = 0$ et

$$\varphi(X_2, Z) = \lambda_{X_2,X_3} \varphi(X_3, Z)$$

De même $\theta(X_1, X_3) = 0$ et

$$\varphi(X_1, Z) = \lambda_{X_1,X_3} \varphi(X_3, Z) \qquad \text{pour tout } Z \in \mathfrak{g}$$

donc $\varphi(X_2, Z) = \lambda \varphi(X_1, Z)$.

On en déduit que φ est de rang 1 ce qui est impossible. Donc $V_X = 0$.

Proposition 4.3.2 *Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente munie d'une forme de contact. Si la structure affine ∇ définie par un cocycle symplectique sur $\mathfrak{g} = \frac{\widetilde{\mathfrak{g}}}{Z(\widetilde{\mathfrak{g}})}$ se prolonge en une structure affine $\widetilde{\nabla}$ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ alors*

$$\pi(\widetilde{\nabla}(X,T)) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $T \in Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$.

4.3.4 Sur l'existence des connexions (θ de rang maximum)

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $V_X = 0$. Alors $\widetilde{\nabla}((X,0),(0,1)) = (0, a_X)$ et

$$C((X,0),(Y,0),(Z,0)) = 0$$

implique

$$\begin{aligned}&\varphi(X, \nabla(Y,Z)) - \varphi(Y, \nabla(X,Z)) - \varphi\left([X,Y]_\mu, Z\right)\\ &= -a_X\varphi(Y,Z) + a_Y\varphi(X,Z) + a_Z\theta(X,Y)\end{aligned}$$

De même $C((X,0),(0,1),(Y,0)) = 0$ implique

$$\widetilde{\nabla}((X,0),(0,a_Y)) - \left(0, a_{\nabla(X,Y)}\right) - \varphi(X,Y)\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = 0$$

soit

$$\varphi(X,Y)\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = (a_Y a_X - a_{\nabla(X,Y)})(0,1)$$

On en déduit

$$\varphi(Y,X)\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = (a_Y a_X - a_{\nabla(Y,X)})(0,1)$$

et

$$\begin{aligned}\theta(X,Y)\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) &= (a_{\nabla(Y,X)} - a_{\nabla(X,Y)})(0,1)\\ &= a_{[X,Y]}(0,1).\end{aligned}$$

Ceci montre en particulier que $\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = \rho(0,1)$. Dans ces conditions nous avons

$$\rho\theta(X,Y) = a_{[X,Y]}$$

Enfin $C((0,1),(Y,0),(0,1)) = 0$ implique

$$a_Y\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = \widetilde{\nabla}\left((Y,0), \widetilde{\nabla}((0,1),(0,1))\right)$$

d'où

$$a_Y\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = \rho(0,a_Y)$$

ce qui est vérifié.

Supposons alors $\rho \neq 0$. Dans ce cas $a_{[X,Y]} \neq 0$ dès que $\theta(X,Y) \neq 0$. Prenons $X \in Z(\mathfrak{g})$. Comme θ est supposé de rang maximum, il existe Y tel que $\theta(X,Y) \neq 0$. Or $[X,Y] = 0$ d'où $a_{[X,Y]} = 0$ ce qui conduit à une contradiction.

Conclusion : $\rho = 0$, c'est-à-dire $\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = 0$. Alors $a_{[X,Y]} = 0$ et l'application $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha(X) = a_X$ définit une représentation linéaire de dimension 1 de $\mathfrak{g}$. On en déduit

Théorème 4.3.3 *Si la représentation α est triviale, alors $\widetilde{\nabla}$ est une connexion affine si et seulement si*

1) $\widetilde{\nabla}(U,(0,1)) = 0$ *pour tout* $U \in \widetilde{\mathfrak{g}}$.

2) φ *vérifie* $\varphi(X, \nabla(Y,Z)) - \varphi(Y, \nabla(X,Z)) - \varphi\left([X,Y]_\mu, Z\right) = 0$, *c'est-à-dire est un 2-cocycle pour la cohomologie de l'algèbre de Vinberg associée à* ∇ *à valeurs dans le module trivial.*

Si la représentation α *est non-triviale, alors* $\widetilde{\nabla}$ *est une connexion affine si et seulement si*

1) $\widetilde{\nabla}((0,1),(0,1)) = 0$, $\widetilde{\nabla}((X,0),(0,1)) = 0$ *pour tout* $X \in Ker\alpha$.

2) $\varphi(X, \nabla(Y,Z)) - \varphi(Y, \nabla(X,Z)) - \varphi\left([X,Y]_\mu, Z\right) = \alpha(Z)\theta(X,Y)$ *pour tout* $X, Y \in Ker(\alpha)$

4.4 Exemple

Soit $\mathfrak{g}$ de dimension 4 définie dans la base $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ par

$$[X_1, X_4] = X_3$$

Cette algèbre admet une forme symplectique $\theta = -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_3 \wedge \omega_4$. La connexion ∇ associée s'écrit :

$$\nabla_{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \nabla_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \nabla_{X_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ l'extension centrale de $\mathfrak{g}$ définie comme précédemment à partir du cocycle θ. D'après le théorème précédent, l'existence de la connexion $\widetilde{\nabla}$ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est liée à l'existence d'une représentation linéaire de dimension 1 telle que

$$\varphi(X, \nabla(Y,Z)) - \varphi(Y, \nabla(X,Z)) - \varphi\left([X,Y]_\mu, Z\right) = 0$$

si cette représentation est triviale, ou bien

$$\varphi(X, \nabla(Y,Z)) - \varphi(Y, \nabla(X,Z)) - \varphi\left([X,Y]_\mu, Z\right) = \alpha(Z)\theta(X,Y)$$

dans le cas contraire. Supposons $\alpha = 0$. Dans la base $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ la matrice de θ s'écrit :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et la matrice de φ est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta-1 & \varepsilon & \delta \\ \beta & a & \nu & \delta' \\ \varepsilon & \nu & b & \overline{\delta}-1 \\ \delta & \delta' & \overline{\delta} & \widetilde{\delta} \end{pmatrix}.$$

Alors φ vérifie

$$d_{\nabla}\varphi = \varphi\left(X, \nabla\left(Y,Z\right)\right) - \varphi\left(Y, \nabla\left(X,Z\right)\right) - \varphi\left(\left[X,Y\right]_{\mu}, Z\right) = 0$$

si l'on a

$$\begin{gathered} \varepsilon = \nu = a = b = 0 \\ \beta = 2\overline{\delta} - 1 \end{gathered}$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 2\overline{\delta}-2 & 0 & \delta \\ 2\overline{\delta}-1 & 0 & 0 & \delta' \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\delta}-1 \\ \delta & \delta' & \overline{\delta} & \widetilde{\delta} \end{pmatrix}$$

Comme $\widetilde{\nabla}_{X_5}$ est supposé nul, on en déduit la connexion suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{X_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2\overline{\delta}-1 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \quad \widetilde{\nabla}_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\overline{\delta}-2 & 0 & 0 & \delta' & 0 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\nabla}_{X_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\delta} & 0 \end{pmatrix} \quad \widetilde{\nabla}_{X_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \delta' & \overline{\delta}-1 & \widetilde{\delta} & 0 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\nabla}_{X_5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrons enfin que nécessairement la représentation α est triviale.

Comme $\theta\left(X,Y\right)\rho = \alpha_{[X,Y]}$, alors $\theta\left(X_1,X_4\right)\rho = \alpha_{[X_1,X_4]}$ et puisque $\theta\left(X_1,X_4\right) = 0$

$$\alpha_{X_3} = 0$$

Rappelons que l'on peut écrire en général

$$\begin{aligned} &\varphi\left(X, \nabla\left(Y,Z\right)\right) - \varphi\left(Y, \nabla\left(X,Z\right)\right) - \varphi\left(\left[X,Y\right]_{\mu}, Z\right) \\ &= -a_X\varphi\left(Y,Z\right) + a_Y\varphi\left(X,Z\right) + a_Z\theta\left(X,Y\right) \end{aligned}$$

Comme $\theta(X_1, X_3) = 0$ et $\alpha_{X_3} = 0$,

$$\varphi(X_3, Z)\, a_{X_1} = \varphi(X_3, \nabla(X_1, Z))$$

pour tout $Z \in \mathfrak{g}$. Or $\nabla(X_1, X_4) = X_3$ et $\nabla(X_1, X_i) = 0$ dès que $i \neq 4$. Ainsi

$$\varphi(X_3, X_4)\, a_{X_1} = \varphi(X_3, X_3)$$

et

$$\varphi(X_3, X_i)\, a_{X_1} = 0$$

pour $i = 1, 2, 3$. Si on suppose que $\alpha_{X_1} \neq 0$, on obtient alors

$$\varphi(X_3, Z) = 0$$

pour tout $Z \in \mathfrak{g}$. Comme

$$\varphi(X, Y) - \varphi(Y, X) = \theta(X, Y).$$

on a alors

$$\begin{array}{ll} \varphi(X_i, X_3) = 0 & \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \varphi(X_4, X_3) = 1 & \end{array}$$

On a aussi, en appliquant l'égalité (2) avec $X = X_1$, $Y = X_4$ et $Z = X_3$

$$-\varphi(X_4, X_3)\, \alpha_{X_1} + \varphi(X_1, X_3)\, \alpha_{X_4} = -\varphi(X_3, X_3) = 0$$

car $\theta(X_1, X_4) = 0$. D'où

$$\varphi(X_4, X_3) = 0$$

ce qui contredit notre hypothèse. D'où

$$\alpha_{X_1} = 0$$

Si on suppose maintenant que $\alpha_{X_2} \neq 0$ on obtient que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(X_2, X_2)\, \alpha_{X_1} - \varphi(X_1, X_2)\, \alpha_{X_2} - \theta(X_1, X_2)\, \alpha_{X_2} \\ = \varphi(X_1, \nabla(X_2, X_2)) - \varphi(X_2, \nabla(X_1, X_2)) - \varphi\left([X_1, X_2]_\mu, X_2\right) \\ \varphi(X_4, X_2)\, \alpha_{X_1} - \varphi(X_1, X_2)\, \alpha_{X_4} - \theta(X_1, X_4)\, \alpha_{X_2} \\ = \varphi(X_1, \nabla(X_4, X_2)) - \varphi(X_4, \nabla(X_1, X_2)) - \varphi\left([X_1, X_4]_\mu, X_2\right) \end{array} \right.$$

ce qui donne, compte tenu des relations précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \varphi(X_1, X_2))\, \alpha_{X_2} = 0 \\ \varphi(X_1, X_2)\, \alpha_{X_4} = -\varphi(X_3, X_2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(X_1, X_2) = 1 \\ \varphi(X_1, X_2)\, \alpha_{X_4} = -\varphi(X_3, X_2) \end{array} \right.$$

Or

$$\begin{array}{rl} & \varphi(X_3, X_2)\, \alpha_{X_2} - \varphi(X_2, X_2)\, \alpha_{X_3} - \theta(X_2, X_3)\, \alpha_{X_2} \\ = & \varphi(X_2, \nabla(X_3, X_2)) - \varphi(X_3, \nabla(X_2, X_2)) - \varphi\left([X_2, X_3]_\mu, X_2\right) \end{array}$$

implique
$$\varphi(X_3, X_2)\,\alpha_{X_2} = 0$$
donc
$$\varphi(X_3, X_2) = 0$$
et
$$\varphi(X_1, X_2)\,\alpha_{X_4} = -\varphi(X_3, X_2) = 0$$
implique puisque $\varphi(X_1, X_2) = 1$
$$\alpha_{X_4} = 0$$
Ainsi
$$\varphi(X_4, X_3)\,\alpha_{X_2} - \varphi(X_2, X_3)\,\alpha_{X_4} - \theta(X_2, X_4)\,\alpha_3 = 0$$
implique
$$\varphi(X_4, X_3)\,\alpha_{X_2} = 0$$
d'où
$$\varphi(X_4, X_3) = 0$$
Or avec $X = X_3$, $Y = X_2$ et $Z = X_4$ on obtient
$$\varphi(X_3, X_4) = 0$$
et
$$\varphi(X_4, X_3) = -\theta(X_3, X_4) = 1$$
D'où une nouvelle contradiction. Ainsi
$$\alpha_{X_2} = 0$$
En reprenant $X = X_1$, $Y = X_2$ et $Z = X_4$
$$\alpha_{X_4} = -\varphi(X_2, X_3)$$
et avec $X = X_2$, $Y = X_4$ et $Z = X_3$
$$\varphi(X_2, X_3)\,\alpha_{X_4} = 0$$
puisque $\nabla(X_4, X_3) = \nabla(X_2, X_3) = 0$. Ainsi
$$\alpha_{X_4} = \varphi(X_2, X_3) = 0$$
Tous les α_{X_i} étant nuls $i \in \{1, ..., 4\}$, la représentation est triviale.

4.5 Une construction directe

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de contact. Soit ω la forme de contact. Elle vérifie $\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0$ avec $n = 2p + 1 = \dim \mathfrak{g}$. Posons
$$\theta = d\omega$$
On a alors $d\theta = 0$ et $Ker\theta$ est de dimension 1.

4.5.1 Un peu d'algèbre bilinéaire

Lemme 4.5.1 *Soit $f \in End\mathfrak{g}$. Il existe un adjoint f^* défini par*

$$\theta(f(X), Y) = -\theta(X, f^*(Y))$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ si et seulement si

$$f : Ker\theta \to Ker\theta$$

Preuve. En effet si $X \in Ker\theta, \theta(X, f^*(Y)) = 0$ pour tout Y. On doit donc avoir $f(X) \in Ker\theta$. Réciproquement la forme θ est de rang $2p$. Elle induit donc une forme de rang maximum $\overline{\theta}$ sur l'espace quotient $\mathfrak{g}/Ker\theta$. Soit $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Ker\theta$ la projection canonique. Comme f laisse stable $Ker\theta$ elle induit un endomorphisme $\overline{f}$ de $\mathfrak{g}/Ker\theta$ où $\overline{f}(\overline{v}) = f(v)$ avec $\pi(v) = \overline{v}$. Soit $\overline{f}^*$ le dual de $\overline{f}$:

$$\overline{\theta}(\overline{f}(X), Y) = -\overline{\theta}(X, \overline{f}^*(Y))$$

Alors l'endomorphisme f^* défini par $f^*(X) = \sigma(\overline{f}^*(\pi(X)))$ où $\sigma : \mathfrak{g}/Ker\theta \to \mathfrak{g}$ est une section donnée du fibré $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Ker\theta$. ■

4.5.2 Application

Il existe une base $\mathfrak{g}$ telle que dans la base duale $\{\omega_1 ..., \omega_{2p+1}\}$ on ait :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{2p+1} \\ d\omega &= \omega_1 \wedge \omega_2 + ... + \omega_{2p-1} \wedge \omega_{2p} \end{aligned}$$

La matrice de θ dans cette base est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit M la matrice de f. Alors la matrice de f^* doit vérifier

$${}^tM\Phi = \Phi M^*$$

Une telle équation matricielle admet une solution dès que $f(X_{2p+1}) = \lambda X_{2p+1}$. Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit nilpotente. Alors l'existence d'une forme de contact implique que $Z(\mathfrak{g})$ soit de dimension 1 et $Z(\mathfrak{g}) = Ker\theta$. Pour $X \in \mathfrak{g}$ donné, soit $f = adX$. Cet endomorphisme laisse $Ker\theta$ invariant. Cet endomorphisme admet un adjoint dès qu'une section σ a été choisie.

Soient f_1^* et f_2^* deux adjoints de f correspondants à deux choix de sections. Alors

$$Im(f_1^* - f_2^*) \subset Ker\theta$$

La démonstration découle directement du calcul matriciel ci-dessus.

Ceci étant, construire une connexion sur $\mathfrak{g}$ en posant

$$\nabla_X = (adX)^*$$

revient à trouver une section $\sigma : \mathfrak{g}/Ker\theta \to \mathfrak{g}$ de manière à vérifier les conditions sur la courbure et la torsion. Or les matrices de ces opérateurs sont de la forme

$$\begin{pmatrix} M(X) & 0 \\ A & \alpha \end{pmatrix}$$

où $M(X)$ est la connexion affine associée à la forme symplectique θ sur $\mathfrak{g}/Ker\theta$. On est donc ramené à la situation précédente.

Chapitre 5

Algèbres Lie admissibles

5.1 Définition

Soit $\mathcal{A} = (A, \mu)$ une algèbre de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, μ étant la loi de $\mathcal{A}$ c'est à dire une opération

$$\mu : A \otimes A \to A$$

sur l'espace vectoriel A.

Définition 5.1.1 *([A]) L'algèbre $\mathcal{A} = (A, \mu)$ est une algèbre Lie admissible si la loi μ vérifie*

$$\sum_{\sigma \in \sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} [(\mu(X_{\sigma(1)}, \mu(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})) - (\mu(\mu(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), X_{\sigma(3)}))] = 0 \quad (*)$$

pour tous X_1, X_2, X_3 dans A, où $\sum_3$ est le groupe des permutations d'ordre 3.

Cette définition est équivalente à dire que l'application $[,]_\mu : A \otimes A \to A$ définie par $[X, Y]_\mu = \mu(X, Y) - \mu(Y, X)$ est un crochet de Lie. On notera $\mathcal{A}_L$ l'algèbre de Lie $(A, [,]_\mu)$.

5.1.1 Exemples

1. Toute algèbre associative (non nécessairement unitaire) est une algèbre Lie admissible.
2. Une algèbre $\mathcal{A} = (A, \mu)$ est une algèbre de Vinberg (aussi appelée algèbre symétrique à gauche) si sa loi vérifie

$$\mu(X, \mu(Y, Z)) - \mu(Y, \mu(X, Z)) = \mu(\mu(X, Y), Z) - \mu(\mu(Y, X), Z).$$

C'est aussi une algèbre Lie admissible.

3. Bien sûr, une loi d'algèbre de Lie est une loi d'algèbre Lie admissible, puisque les conditions de Jacobi impliquent $(*)$.

4. Une algèbre de pré-Lie est définie par une loi μ telle que

$$\mu(\mu(X, Y), Z) - \mu(X, \mu(Y, Z)) = \mu(\mu(X, Z), Y) - \mu(X, \mu(Z, Y)).$$

Le crochet $[,]_\mu$ étant un crochet de Lie, une algèbre de pré-Lie est une algèbre Lie admissible.

Remarques.

Toute algèbre associative est une algèbre de Vinberg et une algèbre de pré-Lie. Une algèbre de Vinberg est une algèbre de pré-Lie si et seulement si tous les associateurs sont égaux :

$$\begin{aligned} & (\mu(X_{\sigma(1)}, \mu(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})) - (\mu(\mu(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), X_{\sigma(3)})) \\ = \ & (\mu(X_{v(1)}, \mu(X_{v(2)}, X_{v(3)})) - (\mu(\mu(X_{v(1)}, X_{v(2)}), X_{v(3)})) \end{aligned}$$

pour tout v et σ dans $\sum_3$.

Une algèbre de Lie est associative (respectivement de Vinberg, respectivement une algèbre de pré-Lie) si et seulement si elle est 2-nilpotente.

5.2 Actions du groupe symétrique $\sum_3$

5.2.1 Algèbres G-associatives

Soit $a_\mu : V \otimes V \otimes V \rightarrow V$ l'opérateur associateur de la loi d'algèbre μ : $a_\mu(X, Y, Z) = \mu(\mu X, Y), Z) - \mu(X, \mu(Y, Z))$. Pour tout $\sigma \in \sum_3$ considérons l'action

$$a_\mu \circ \sigma(X_1, X_2, X_3) = a_\mu(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}).$$

Soit G un sous-groupe de $\sum_3$. On dira que la loi d'algèbre est invariante par G si

$$\sum_{\sigma \in G} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma(X_1, X_2, X_3) = 0$$

pour tous X_1, X_2, X_3 de A. Mais les sous-groupes de $\sum_3$ sont bien connus. On a $G_1 = \{Id\}, G_2 = \{Id, \tau_{12}\}, G_3 = \{Id, \tau_{23}\}, G_4 = \{Id, \tau_{13}\}, G_5 = \{Id, (231), (312)\}$, $G_6 = \sum_3$ où τ_{ij} est la transposition entre i et j et (231) le cycle d'ordre 3 . On déduit les types suivants d'algèbres Lie admissibles :

1. Si μ est invariante par G_1 alors μ est une loi associative.
2. Si μ est invariante par G_2 alors μ est une loi d'algèbre de Vinberg.
3. Si μ est invariante par G_3 alors μ est une loi d'algèbre de pré-Lie.
4. Si μ est invariante par G_4 alors μ vérifie

$$(X.Y).Z - X.(Y.Z) = (Z.Y).X - Z.(Y.X)$$

5. Si μ est invariante par G_5 alors μ vérifie la condition générale de Jacobi :

$$(X.Y).Z + (Y.Z).X + (Z.X).Y = X.(Y.Z) + Y.(Z.X) + Z.(X.Y)$$

Si de plus la loi est antisymétrique, alors c'est une loi d'algèbre de Lie.

6. Si μ est invariante par G_6 alors μ est une loi d'algèbre Lie admissible.

Exemple : Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions réelles infiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut munir cet espace des structures d'algèbres suivantes :

1. $\mu_1(f, g) = f.g$ et $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mu_1)$ est associative (type 1)

2. $\mu_2(f,g) = f.g'$ et $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mu_2)$ est une algèbre de Vinberg (type 2)
3. $\mu_3(f,g) = f'.g$ et $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mu_3)$ est une algèbre de pré-Lie (type 3)
4. $\mu_4(f,g) = f'.g + fg'$ et $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mu_4)$ est invariante par G_4 (type 4).

Supposons que μ est invariante par G_5. Si cette loi est aussi antisymétrique alors c'est une loi d'algèbre de Lie. Ceci montre que la définition de G_5 invariance donne une généralisation d'algèbre de Lie "non-commutative" autre que la notion d'algèbre de Leibniz.

5.2.2 Interprétation géométrique

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'une structure affine. La dérivation covariante associée $\bigtriangledown$ vérifie

$$\begin{cases} \bigtriangledown_X Y - \bigtriangledown_Y X - [X,Y] = 0 \\ \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y - \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X = \bigtriangledown_{[X,Y]} \end{cases}$$

Donc le produit $\mu(X,Y) = \bigtriangledown_X Y$ munit l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre symétrique à gauche (algèbre de Vinberg). Comme on a $[X,Y] = \mu(X,Y) - \mu(Y,X)$, toute algèbre de Lie munie d'une structure affine est subordonnée à une algèbre Lie admissible qui est dans ce cas une algèbre de Vinberg. De façon plus générale, toute algèbre de Lie est subordonnée à une algèbre Lie admissible. En effet il est suffisant de considérer la connexion de Levi Civita (qui existe toujours) associée à une forme quadratique définie positive. Comme la torsion est nulle la dérivée covariante vérifie la première des équations précédentes et $\mu(X,Y) = \bigtriangledown_X Y$ est une loi d'algèbre Lie admissible telle que $[X,Y] = [X,Y]_\mu$.

Ceci permet de considérer l'ensemble des lois d'algèbres Lie admissibles comme l'ensemble des connexions linéaires invariantes à torsion nulle sur les algèbres de Lie. En effet si μ est une loi d'algèbre Lie admissible, en prenant $\bigtriangledown_X Y = \mu(X,Y)$, on constate que $\bigtriangledown$ définit une connexion linéaire si les identités de Bianchi sont vérifiées. Soit $R(X,Y)$ le tenseur de courbure correspondant à $\bigtriangledown$. Comme μ est une loi d'algèbre Lie admissible, on a $R(X,Y).Z + R(Y,Z).X + R(Z,X).Y = 0$ alors la première identité est réalisée. Pour la seconde, on peut montrer que

$$(\bigtriangledown_X R)(Y,Z) + (\bigtriangledown_Y R)(Z,X) + (\bigtriangledown_Z R)(X,Y) = 0.$$

En utilisant les relations $(\bigtriangledown_X R)(Y,Z) = \bigtriangledown_X(R(Y,Z)) - R(\bigtriangledown_X Y, Z) - R(Y, \bigtriangledown_X Z)$, et $\bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y - \bigtriangledown_{[X,Y]} = \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X$, on déduit la seconde identité.

5.3 Modules admissibles sur une algèbre de Lie

5.3.1 Module sur une algèbre Lie admissible

Soit $\mathcal{A} =(A,\mu)$ une algèbre Lie admissible et M un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 5.3.1 *M est un $\mathcal{A}$-module s'il existe des applications bilinéaires*

$$\begin{aligned} \lambda &: A \otimes M \to M \\ \rho &: M \otimes A \to M \end{aligned}$$

vérifiant :

$$\lambda(X,\lambda(Y,v)-\lambda(Y,\lambda(X,v)-\lambda([X,Y]_\mu,v)-\lambda(X,\rho(v,Y)+\rho(\lambda(X,v),Y)$$
$$+\rho(v,[X,Y]_\mu)-\rho(\rho(v,X),Y)-\rho(\lambda(Y,v),X)+\lambda(Y,\rho(v,X))+\rho(\rho(v,Y),X)$$
$$=0$$

pour tous $X,Y\in A$ *et* $v\in M$.

Par exemple, l'espace vectoriel A est un $\mathcal{A}$-module. D'un autre côté, si $\mathcal{A}_V=(A,\mu_V)$ est une algèbre de Vinberg un $\mathcal{A}_V$-module M est donné par les applications λ et ρ vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases}\lambda(X,\lambda(Y,v)-\lambda(Y,\lambda(X,v)-\lambda([X,Y]_\mu,v)=0\\ \lambda(X,\rho(v,Y)-\rho(\lambda(X,v),Y)-\rho(v,\mu(X,Y))+\rho(\rho(v,X),Y)=0.\end{cases}$$

En considérant $\mathcal{A}_V$ comme une algèbre Lie admissible, M est aussi un module sur cette algèbre Lie admissible.

La notion de $\mathcal{A}$-module est bien connue dans le cas les algèbres de type 1 (associative), type 2 (Vinberg), type 3 (pré-Lie). Il est facile de restreindre la définition générale d'un module sur une algèbre Lie admissible (type 6) pour écrire les définitions de module sur des algèbres de type 4 and 5. On trouve :

- type 4 :

$$\begin{cases}\lambda(\mu(X,Y),v)-\lambda(X,\lambda(Y,v)-\rho(\rho(v,Y),X)+\rho(v,\mu(Y,X))=0\\ \rho(\lambda(X,v),Y)-\lambda(X,\rho(v,Y)-\rho(\lambda(Y,v),X)+\lambda(Y,\rho(v,X))=0\end{cases}$$

-type 5 :

$$\lambda(\mu(X,Y),v)-\lambda(X,\lambda(Y,v)+\rho(\lambda(X,v),Y)-\lambda(X,\rho(v,Y)-\rho(v,\mu(X,Y))+\rho(\rho(v,X),Y)=0.$$

On peut voir que si μ est antisymétrique (c.a.d une loi d'algèbre de Lie) alors on retrouve la définition de module sur des algèbres de Lie en prenant $\rho(v,X)=-\lambda(X,v)$.

Proposition 5.3.2 *Soit* $\mathcal{A}=(A,\mu)$ *une algèbre Lie admissible et* M *un* $\mathcal{A}$*-module défini par les applications* λ *et* ρ*. Alors les applications bilinéaires*

$$\widehat{\lambda}:A\otimes M\to M$$

définies par

$$\widehat{\lambda}(X,v)=\lambda(X,v)-\rho(v,X)$$

munissent l'espace vectoriel M *d'une structure de* $\mathcal{A}_L$*-module où* $\mathcal{A}_L$ *est l'algèbre de Lie* $(A,[,]_\mu)$.

On retrouve les résultats établis par Nijenhuis dans [N] pour les algèbres de Vinberg.

5.3.2 Modules admissibles sur des algèbres de Lie

Soit $\mathcal{A}=(A,\mu)$ une algèbre de Lie. Considérons cette algèbre comme une algèbre Lie admissible que nous noterons $\mathcal{A}_{ad}=(A,\mu)$ pour distinguer les deux structures. Il est clair que tout module M sur l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ est aussi un module sur l'algèbre Lie admissible $\mathcal{A}_{ad}$. Mais la réciproque est fausse.

Définition 5.3.3 *On appelle module admissible sur l'algèbre de Lie* $\mathcal{A} = (A, \mu)$ *tout module sur l'algèbre Lie admissible* $\mathcal{A}_{ad} = (A, \mu)$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie résoluble non abélienne de dimension 2. Il existe une base $\{X_1, X_2\}$ telle que $[X_1, X_2] = X_2$. Tout module de dimension 1 sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donné par l'application λ (ici $\rho = -\lambda$) définie par

$$\begin{aligned} \lambda(X_1, v) &= \alpha v \\ \lambda(X_2, v) &= 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, un module admissible sur $\mathfrak{g}$ est déterminé par les applications λ et ρ définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(X_1, v) = \alpha v \\ \lambda(X_2, v) = \beta v \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(v, X_1) = \gamma v \\ \rho(v, X_2) = \beta v \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que M est un module admissible de dimension n sur $\mathfrak{g}$. Alors si A, B, C, D sont les matrices des opérateurs linéaires

$$\lambda(X_1, .), \lambda(X_2, .), \rho(., X_1), \rho(., X_2)$$

dans une base donnée de M, alors ces matrices vérifient

$$[(B - D), (C - A)] = B - D$$

On décrit de cette façon toutes les structures des modules admissibles sur $\mathfrak{g}$.

Considérons maintenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$. Par un calcul similaire on peut voir que tout module admissible de dimension n sur $sl(2, \mathbb{C})$ est décrit par les représentations matricielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_1 - B_1, A_2 - B_2] = 4(A_2 - B_2) \\ [A_1 - B_1, A_3 - B_3] = -4(A_3 - B_3) \\ [A_2 - B_2, A_3 - B_3] = 2(A_1 - B_1) \end{array} \right. .$$

De telles représentations sont aussi complètement réductibles.

5.4 L'opérade Lie Admissible

5.4.1 Opérades quadratiques

Une opérade $\mathcal{P}$ est une suite d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}(n)$, $n \geq 1$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit un module sur $\mathbb{K}[\sum_n]$, la $\mathbb{K}$-algèbre du groupe symétrique $\sum_n$, avec des applications de composition

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n + m - 1) \qquad i = 1, ..., n$$

satisfaisant des propriétés "associatives", les axiomes de May [M].

Soit E un $\mathbb{K}[\sum_n]$-module. Alors d'après [G.K], il existe une opérade $\mathcal{F}(E)$ appelée l'opérade libre engendrée par E telle que $\mathcal{F}(E)(1) = \mathbb{K}$, $\mathcal{F}(E)(2) = E$ et pour toute opérade $\mathcal{P}$ et pour tout morphisme $\mathbb{K}[\sum_2]$-linéaire $f : \mathcal{F}(E)(2) = E \to \mathcal{P}(2)$ il existe un unique morphisme d'opérade $\widehat{f} : \mathcal{F}(E) \to \mathcal{P}$ tel que $\widehat{f}(2) = f$

Exemple : Supposons que $E = \mathbb{K}[\sum_2]$. Soit $\mathcal{F}(E)$ l'opérade libre engendrée par E. Une base de $\mathcal{F}(E)(n)$, en tant qu'espace vectoriel, est donné par les "produits parenthésés" sur n variables indexés par $\{1, 2, ..., n\}$. Par exemple, une base de $\mathcal{F}(E)(2)$ est donnée par $(x_1.x_2)$ et $(x_2.x_1)$, et une base de $\mathcal{F}(E)(3)$ est donnée par $\{((x_i.x_j).x_k), (x_i.(x_j.x_k).), i \neq j \neq k \neq i, i, j, k \in \{1, 2, 3\}\}$.

Soit R un $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ et notons $\mathcal{R}$ l'idéal de $\mathcal{F}(E)$ engendré par R. L'opérade $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}$ définie par

$$(\mathcal{F}(E)/\mathcal{R})(n) = \frac{\mathcal{F}(E)(n)}{\mathcal{R}(n)}$$

est appelée l'opérade quadratique engendrée par E et les relations R .

Ainsi une opérade $\mathcal{P}$ est quadratique si et seulement s'il existe un $\mathbb{K}[\sum_2]$-sous-module E et un $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$, R, tel que $\mathcal{P} \simeq \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}$.

Exemple. L'opérade associative $\mathcal{A}ss$, l'opérade de Lie $\mathcal{L}ie$, l'opérade de Leibniz $\mathcal{L}eib$ sont des opérades quadratiques ([Gi,K],[L])

5.4.2 L'opérade Lie admissible

Considérons R le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module engendré par le vecteur

$$\begin{aligned} u &= x_1.(x_2.x_3) + x_2.(x_3.x_1) + x_3.(x_1.x_2) - x_2.(x_1.x_3) - x_3.(x_2.x_1) \\ &\quad -x_1.(x_3.x_2) - (x_1.x_2).x_3 - (x_2.x_3).x_1 - (x_3.x_1).x_2 + (x_2.x_1).x_3 \\ &\quad +(x_3.x_2).x_1 + (x_1.x_3).x_2 \end{aligned}$$

L'opérade Lie Admissible, notée $\mathcal{A}dm$ est l'opérade quadratique définie par

$$\mathcal{A}dm = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}$$

Comme nous avons distingué 6 classes d'algèbres Lie admissibles, on peut déterminer chacune des opérades correspondantes. On obtient les opérades quadratiques suivantes :

1. $\mathcal{A}ss$ correspond aux algèbres associatives

2. $\mathcal{V}inb$ correspond aux algèbres de Vinberg. Ici le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module est engendré par les vecteurs

$$x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3 - x_2.(x_1.x_3) + (x_2.x_1).x_3.$$

3. $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie$ correspond aux algèbres de pré-Lie (G_3-associative). Les vecteurs qui engendrent l'idéal R sont :

$$x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3 - x_1.(x_3.x_2) + (x_1.x_3).x_2.$$

4. $G_4 - \mathcal{A}ss$ correspond aux algèbres G_4-associatives. R est engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3 - x_3.(x_2.x_1) + (x_3.x_2).x_1.$$

5. $G_5 - \mathcal{A}ss$ correspond aux algèbres G_5-associatives. R est engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3 + x_2.(x_3.x_1) - (x_2.x_3).x_1 + x_3.(x_1.x_2) - (x_3.x_1).x_2.$$

6. $\mathcal{A}dm$.

5.4.3 L'opérade duale $\mathcal{A}dm^!$

Si $\mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ est une opérade quadratique, l'opérade quadratique duale est $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(\mathbb{K}^{op}, E^\vee, R^\perp)$ où $E^\vee = Hom_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ et $R^\perp$ le complément orthogonal dans $\mathcal{F}(E^\vee)(3) = \mathcal{F}(E)(3)^\vee$ de R. Avant d'étudier les opérades duales de chacune des opérades admissibles définies ci-dessus, introduisons quelques classes d'algèbres associatives.

Définition 5.4.1 *Une algèbre associative A est dite abélienne d'ordre 3 si on a*

$$X_1 X_2 X_3 = X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)}$$

pour tout $\sigma \in \sum_3$ et pour tout $X_i \in A$.

Les algèbres abéliennes d'ordre 3 unitaires sont les algèbres commutatives. Mais il existe des algèbres abéliennes d'ordre 3 non-commutatives. Considérons, par exemple, l'algèbre associative de dimension 5 définie par

$$e_1^2 = e_2, \quad e_1^3 = e_3, \quad e_1 e_4 = e_5, \quad e_4 e_1 = e_3 + e_5, \quad e_4^4 = e_3.$$

Si A est une algèbre abélienne d'ordre 3, la sous-algèbre $\mathcal{D}(A)$ engendrée par le product xy est abélien. Alors A est une extension

$$0 \to V \to A \to A_1 \to 0$$

où A_1 est abélienne et V vérifie $vx = xv$ pour tous $x \in A_1$ et $v \in V$. Dans ce cas, l'algèbre de Lie correspondante est 2 nilpotente. En effet, comme on a $abc = bac$, alors $[a, b]c = 0$. On a aussi $c[a, b] = 0$ ainsi $[[a, b], c] = 0$. Revenons à l'interprétation géométrique. Une telle algèbre de Lie est munie d'une connexion affine sans courbure ni torsion. De plus l'opérateur de connexion vérifie

$$\nabla_X = 0$$

pour tout X dans le centre et

$$\nabla_X \nabla_Y = \nabla_Y \nabla_X$$

pour tout générateurs X et Y.

Considérons maintenant le produit scalaire sur $\mathcal{F}(E)(3)$ défini par

$$< \quad i(jk), i(jk) >= sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

$$< \quad (ij)k, (ij)k >= -sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

Soit R le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module qui détermine l'opérade $\mathcal{A}dm$. $R^\perp$, l'orthogonal par rapport au produit scalaire défini ci-dessus, est de dimension 11. Soit R' le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les relations

$$(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}), (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)} - (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(3)}) x_{\sigma(2)},$$
$$(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)} - (x_{\sigma(2)} x_{\sigma(1)}) x_{\sigma(3)}.$$

Alors $\dim R' = 11$ et $< u, v >= 0$ pour tout $v \in R'$, u étant le vecteur qui engendre R. Ceci implique que $R' \simeq R^\perp$ et $(\mathcal{F}(E)/\mathcal{R})^!$ correspond à l'opérade quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^\perp$.

Proposition 5.4.2 *L'opérade duale de $\mathcal{A}dm$ est l'opérade quadratique correspondant aux algèbres A associatives satisfaisant*

$$abc = acb = bac$$

c'est-à-dire A est abélienne d'ordre 3.

Revenons aux différentes classes d'algèbres admissibles. Il est connu que $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$ ([G.K]) et $\mathcal{P}reLie^! = \mathcal{P}erm$ ([C.L]). Rappelons que cette dernière correspond à l'algèbre dont le produit est associatif et vérifie les identités suivantes :

$$abc = acb$$

Proposition 5.4.3 *Les opérades duales de $\mathcal{V}inb$, $G_4 - \mathcal{A}ss$, $G_5 - \mathcal{A}ss$ sont les opérades quadratiques dont les algèbres correspondantes sont associatives et vérifient respectivement :*
- *pour $\mathcal{V}inb^!$: $abc = bac$*
- *pour $G_4 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = cba$*
- *pour $G_5 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = bca = cab$.*

La preuve est basée sur la preuve précédente.

5.5 Cohomologie des algèbres Lie admissible

5.5.1 Le produit de Nijenhuis-Gerstenhaber

Soient f et g deux applications respectivement n et m-linéaires sur un espace vectoriel V. On définit l'application $(n+m-1)$-linéaire $f \odot_6 g$ par

$$f \odot_6 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{\sigma \in \sum_{n+m-1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_{\sigma(1)}, .., X_{\sigma(i-1)}, g(X_{\sigma(i)}, .., X_{\sigma(i+m-1)}), X_{\sigma(i+m)}, .., X_{\sigma(n+m-1)})$$

où $\sum_p$ est le groupe $p-$symétrique.

Par exemple si $f = g = \mu$ et $n = m = 2$ alors

$$\mu \odot_6 \mu(X_1, X_2, X_3) = \sum_{\sigma \in \sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \{\mu(\mu(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), X_{\sigma(3)}) - \mu(X_{\sigma(1)}, \mu(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})\}$$

et μ est une loi d'algèbre Lie admissible si et seulement si

$$\mu \odot_6 \mu = 0.$$

De même si μ est une application bilinéaire et f un endomorphisme de V, alors

$$\mu \odot_6 f(X_1, X_2) = \mu(f(X_1), X_2) - \mu(f(X_2), X_1) + \mu(X_1, f(X_2)) - \mu(X_2, f(X_1))$$

et

$$f \odot_6 \mu(X_1, X_2) = f(\mu(X_1, X_2)) - f(\mu(X_2, X_1)) = f([X_1, X_2]_\mu)$$

dès que $\mu \odot_6 \mu = 0$.

Nous noterons $\mathcal{C}^n(V)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires de V. Comme chaque algèbre G_i-associative ($i = 1, ..., 5$) est un cas particulier d'algèbre Lie admissible, on peut également définir un produit de Nijenhuis-Gerstenhaber adapté.

Algèbres G_1- associatives (cas associatif)

$$f \odot_1 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{i=1,..,n} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_1, .., X_{i-1}, g(X_i, .., X_{i+m-1}), X_{i+m}, .., X_{n+m-1}) \ .$$

Ce produit est noté $f \bar{o} g$ dans [N].

Algèbres G_2- associatives (algèbres de Vinberg)

$$f \odot_2 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{\sigma \in \sum_{n+m-2}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \{ \sum_{i=1,..,n-1} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_{\sigma(1)}, .., X_{\sigma(i-1)}, g(X_{\sigma(i)}, .., X_{\sigma(m+i-1)}), X_{\sigma(m+i)}, ., X_{\sigma(n+m-2)}, X_{n+m-1}) + (-1)^{(n-1)} f(X_{\sigma(1)}, .., X_{\sigma(n-1)}, g(X_{\sigma(n)}, .., X_{\sigma(m+n-2)}, X_{n+m-1}) \}.$$

Dans [N] on introduit un produit noté $f ç g$ sur $\oplus Hom(\wedge^k(V) \otimes V, V)$. On peut noter que si f (resp. g) est dans $Hom(\wedge^{n-1}(V) \otimes V, V)$ (resp. $Hom(\wedge^{m-1}(V) \otimes V, V)$) alors $f \odot_2 g = (n-1) f ç g$. Dans ce travail on préfère considérer le même espace des cochaines pour toutes les algèbres G_i-associatives.

Agèbres G_3- associatives (algèbres de pré-Lie)

$$f \odot_3 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{\sigma \in \sum_{n+m-2}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \{ f(g(X_1, X_{\sigma(2)}, .., X_{\sigma(m)}), X_{\sigma(m+1)}, .., X_{\sigma(m+n-1)}) + \sum_{i=2,..,n-1} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_1, X_{\sigma(2)}, .., X_{\sigma(i)}, g(X_{\sigma(i+1)}, .., X_{\sigma(m+i)}), ., X_{\sigma(n+m-1)}) \}$$

Si on restreint l'ensemble des cochaines à $\oplus Hom(V \otimes \wedge^k(V), V)$ alors on retrouve un produit associé à la cohomologie des algèbres symétriques à droite proposé dans [Dz].

Algèbres G_4- associatives

$$f \odot_4 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{\sigma \in \sum_{n+m-2}} \sum_{i=0,..,n-1} (-1)^{\varepsilon(\sigma) + i(m-1)} f(X_{\sigma(1)}, X_2, X_{\sigma(3)}, ..., X_{\sigma(i)}, g(X_{\sigma(i+1)}, .., X_{\sigma(m+i)}), ..., X_{\sigma(n+m-1)}).$$

Algèbres G_5- associatives (version des algèbres de Lie non commutatives)

$$f \odot_5 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{\sigma \in A_{n+m-1}} \sum_{i=0,..,n-1} (-1)^{i(m-1)} f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}, ..., X_{\sigma(i)}, g(X_{\sigma(i+1)}, .., X_{\sigma(m+i)}), ..., X_{\sigma(n+m-1)}).$$

où A_p est le groupe alterné.

5.5.2 Cohomologie admissible

Considérons les crochets suivants

$$[f,g]^{\odot_6} = f \odot_6 g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \odot_6 f.$$

Ils vérifient :

1. $[g,f]^{\odot_6} = (-1)^{(n-1)(m-1)+1}[f,g]^{\odot_6}$
2. $(-1)^{(n-1)(p-1)}[[f,g]^{\odot_6},h]^{\odot_6} + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g,h]^{\odot_6},f]^{\odot_6} +$
$(-1)^{(p-1)(m-1)}[[h,f]^{\odot_6},g]^{\odot_6} = 0$

où h est une application p-linéaire sur V. En effet on a

$$g \odot_6 f = \sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{(\varepsilon(\sigma))} g \odot_1 f \circ \sigma = \sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{(\varepsilon(\sigma))} g\overline{o}f \circ \sigma.$$

Soit P l'opérateur antisymétrique. Il est défini par

$$P(f)(X_1,...,X_n) = \sum_{\sigma\in\sum_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(n)}).$$

Il est clair que $f \odot_6 g = P(f \odot_1 g)$

Lemme 5.5.1 *On a les identités suivantes :*

$$P(P(f) \odot_1 g) = (n+m-1)!P(f \odot_1 g) = P(f \odot_1 P(g)).$$

Preuve. En effet

$P(P(f) \odot_1 g)(X_1,...,X_{n+m-1}) =$
$\sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (P(f) \odot g)(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(n+m-1)}) =$
$\sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} P(f)(X_{\sigma(1)},...,g(X_{\sigma(i)},...,X_{\sigma(i+m-1)}),...,X_{\sigma(n+m-1)}) =$
$n!\sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_{\sigma(1)},...,g(X_{\sigma(i)},...,X_{\sigma(i+m-1)}),...,X_{\sigma(n+m-1)}).$
$P(f \odot_1 g)(X_1,...,X_{n+m-1}) =$
$\sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f \odot_1 g(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(n+m-1)}) =$
$\sum_{\sigma\in\sum_{n+m-1}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_{\sigma(1)},...,g(X_{\sigma(i)},...,X_{\sigma(i+m-1)}),...,X_{\sigma(n+m-1)}).$

La deuxième identité est prouvée d'une manière analogue. ■

Conséquence.

$$[[f,g]^{\odot_6},h]^{\odot_6} = P([[f,g]^{\odot_1},h]^{\odot_1}).$$

Comme on a

$$(-1)^{(n-1)(p-1)}[[f,g]^{\odot_1},h]^{\odot_1} + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g,h]^{\odot_1},f]^{\odot_1} +$$
$$(-1)^{(m-1)(p-1)}[[h,f]^{\odot_1},g]^{\odot_1} = 0$$

on en déduit que $[,]^{\odot_6}$ est le crochet d'une algèbre de Lie graduée (sur l'espace des applications multilinéaires).

Définition 5.5.2 *Soit ϕ une application n-linéaire sur l'algèbre Lie admissible $\mathcal{A}$ dont la loi est μ. On définit*

$$\delta_\mu \phi = -[\mu, \phi]^{\odot_6}$$

Soit $\mathcal{C}^n = \{\phi : \mathcal{A}^{\otimes^n} \to \mathcal{A}\}$. Alors

$$\delta_\mu : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n+1}$$

et elle satisfait

$$\delta_\mu(\delta_\mu \phi) = 0.$$

En effet

$$\delta_\mu(\delta_\mu \phi) = [\mu, [\mu, \phi]^{\odot_6}]^{\odot_6} = (-1)^{n-1}[[\mu, \phi]^{\odot_6}, \mu]^{\odot_6}$$

Mais les identités de Jacobi donnent

$$-[[\mu, \phi]^{\odot_6}, \mu]^{\odot_6} + (-1)^{n-1}[[\phi, \mu]^{\odot_6}, \mu]^{\odot_6} = 0$$

Ainsi

$$-2[[\mu, \phi]^{\odot_6}, \mu]^{\odot_6} = 0.$$

Nous noterons par $H^*(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\mu)$ la cohomologie correspondante.

Définition 5.5.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Notons par $\mathcal{A}_\mu$ cette algèbre de Lie considérée comme algèbre Lie admissible. Alors $H^*(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\mu)$ est appelée la cohomologie admissible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Cas particuliers

i) $n = 2$

Soit φ dans $\mathcal{C}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\delta_\mu \varphi(X_1, X_2, X_3) &= -[\mu, \varphi]^{\odot_6}(X_1, X_2, X_3) \\
&= \mu \odot_6 \varphi(X_1, X_2, X_3) + \varphi \odot_6 \mu(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\mu \varphi(X_1, X_2, X_3) = \;& \mu(\varphi(X_1, X_2), X_3) - \mu(X_1, \varphi(X_2, X_3)) + \mu(\varphi(X_2, X_3), X_1) \\
& - \mu(X_2, \varphi(X_3, X_1)) - \mu(X_3, \varphi(X_1, X_2)) + \mu(\varphi(X_3, X_1), X_2) \\
& - \mu(\varphi(X_2, X_1), X_3) + \mu(X_2, \varphi(X_1, X_3)) - \mu(\varphi(X_3, X_2), X_1) \\
& + \mu(X_3, \varphi(X_2, X_1)) + \mu(X_1, \varphi(X_3, X_2)) - \mu(\varphi(X_1, X_3), X_2) \\
& + \varphi(\mu(X_1, X_2), X_3) - \varphi(X_1, \mu(X_2, X_3)) + \varphi(\mu(X_2, X_3), X_1) \\
& - \varphi(X_2, \mu(X_3, X_1)) - \varphi(X_3, \mu(X_1, X_2)) + \varphi(\mu(X_3, X_1), X_2) \\
& - \varphi(\mu(X_2, X_1), X_3) + \varphi(X_2, \mu(X_1, X_3)) - \varphi(\mu(X_3, X_2), X_1) \\
& + \varphi(X_3, \mu(X_2, X_1)) + \varphi(X_1, \mu(X_3, X_2)) - \varphi(\mu(X_1, X_3), X_2)
\end{aligned}$$

ii) $n = 1$

Soit f dans $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\delta_\mu f(X_1, X_2) = \mu \odot_6 f(X_1, X_2) + f \odot_6 \mu(X_1, X_2)$$

$$\begin{aligned}\delta_\mu f(X_1,X_2) &= \mu(f(X_1),X_2)+\mu(X_1,f(X_2))-f(\mu(X_1,X_2)) \\ &\quad -\mu(f(X_2),X_1)-\mu(X_2,f(X_1))+f(\mu(X_2,X_1))\end{aligned}$$

iii) $n=0$

Soit X appartenant à $\mathcal{A}$. Considérons l'application

$$h_X : Y \mapsto \mu(X,Y)-\mu(Y,X)$$

$$\begin{aligned}-\delta_\mu h_X(X_1,X_2) &= \mu(h_X(X_1),X_2)+\mu(X_1,h_X(X_2))-h_X(\mu(X_1,X_2)) \\ &\quad -\mu(h_X(X_2),X_1)-\mu(X_2,h_X(X_1))+h_X(\mu(X_2,X_1)) \\ &= \mu(\mu(X,X_1),X_2)-\mu(\mu(X_1,X),X_2)+\mu(X_1,\mu(X,X_2)) \\ &\quad -\mu(X_1,\mu(X_2,X))-h_X(\mu(X_1,X_2))+h_X(\mu(X_2,X_1)) \\ &\quad -\mu(\mu(X,X_2),X_1)+\mu(\mu(X_2,X),X_1)-\mu(X_2,\mu(X,X_1)) \\ &\quad +\mu(X_2,\mu(X_1,X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\delta_\mu h_X(X_2,X_1) &= \mu(\mu(X,X_2),X_1)-\mu(\mu(X_2,X),X_1)+\mu(X_2,\mu(X,X_1)) \\ &\quad -\mu(X_2,\mu(X_1,X))-h_X(\mu(X_2,X_1))+h_X(\mu(X_1,X_2)) \\ &\quad -\mu(\mu(X,X_1),X_2)+\mu(\mu(X_1,X),X_2)-\mu(X_1,\mu(X,X_2)) \\ &\quad +\mu(X_1,\mu(X_2,X))\end{aligned}$$

Alors

$$\delta_\mu h_X(X_2,X_1)-\delta_\mu h_X(X_1,X_2)=\mu\odot_6\mu(X,X_1,X_2)=0$$

$$\delta_\mu h_X(X_1,X_2)=\delta_\mu h_X(X_2,X_1)$$

Considérons

$$\mathcal{C}^0=\{X\in\mathcal{A}\quad/\quad P(\delta_\mu h_X)=\delta_\mu h_X\}$$

Pour $X\in\mathcal{C}^0$, $\qquad \delta_\mu h_X=0$ alors on peut définir $B^1(\mathcal{A},\mathcal{A})$, en posant.

$$\delta(X)=h_X$$

et $Z^1(\mathcal{A},\mathcal{A})=\left\{f\in\mathcal{C}^1/\delta f=0\right\}$
Alors $H^0(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est bien défini.

Remarque

1. Supposons que $\mathcal{A}$ soit associative. Si on note δ^H l'opérateur cobord associé à la cohomologie d'Hochschild de $\mathcal{A}$ on a pour toute 2-cochaine f :

$$\begin{aligned}&\delta^H\varphi(X_1,X_2,X_3)=X_1.\varphi(X_1,X_2)-\varphi(X_1,X_2).X_3+\varphi(X_1,X_2.X_3) \\ &-\varphi(X_1.X_2,X_3)\end{aligned}$$

En comparant avec la définition de $\delta\varphi$ on obtient

$$\delta\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) = -\sum\nolimits_{\sigma\in\sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\, \delta^H\varphi\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}\right)$$

Ainsi $Z_2^H(\mathcal{A},\mathcal{A}) \subset Z_2(\mathcal{A},\mathcal{A})$.
2. Supposons que $\mathcal{A}$ soit une algèbre de Lie. Une cochaine correspondant à la cohomologie de Chevalley est alternée et l'on a

$$\begin{aligned}\delta^c\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) &= \varphi\left(X_1, X_2\right).X_3 + \varphi\left(X_2, X_3\right).X_1 + \varphi\left(X_3, X_1\right).X_2 \\ &\quad +\varphi\left(X_1.X_2, X_3\right) + \varphi\left(X_2.X_3, X_1\right) + \varphi\left(X_3.X_1, X_2\right)\end{aligned}$$

mais si $\varphi(X,Y) = -\varphi(Y,X)$ alors

$$\begin{aligned}\delta\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) &= 2(\varphi\left(X_1, X_2\right).X_3 - X_3.\varphi\left(X_1, X_2\right) + \varphi\left(X_2, X_3\right).X_1 \\ &\quad -X_1.\varphi\left(X_2, X_3\right) + \varphi\left(X_3, X_1\right).X_2 - X_2.\varphi\left(X_3, X_1\right) \\ &\quad +\varphi\left(X_1.X_2, X_3\right) - \varphi\left(X_3, X_1.X_2\right) + \varphi\left(X_2.X_3, X_1\right) \\ &\quad -\varphi\left(X_1, X_2.X_3\right) + \varphi\left(X_3.X_1, X_2\right) - \varphi\left(X_2, X_3.X_1\right))\end{aligned}$$

$$\delta\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) = 4\delta^c\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{A}lt\left(\mathcal{A}\times\mathcal{A},\mathcal{A}\right)$$

Ainsi pour les 2 cochaines de Chevalley on a $\delta\varphi = 4\delta^c\varphi$.

Proposition 5.5.4 *Si $\mathcal{A}$ est commutative, alors pour toute 2 cochaine φ on a*

$$\delta\varphi = 0$$

Preuve. Ceci se déduit directement de la définition de $\delta\varphi$.
Si $\mathcal{A}$ est associative et commutative on en déduit

$$\sum\nolimits_{\sigma\in\sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\, \delta^H\varphi\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}\right) = 0$$

Supposons que φ soit symétrique, alors quelle que soit $\mathcal{A}$

$$\delta\varphi = 0.$$

Ainsi

$$Sym\left(\mathcal{A}\times\mathcal{A},\mathcal{A}\right) \subset Z^2\left(\mathcal{A},\mathcal{A}\right)$$

En tant qu'algèbre de Jacobi, toute cochaine pour la cohomologie de Harrison est fermée.
3. Supposons que $\mathcal{A}$ soit symétrique gauche. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\delta^S\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) &= X_1.\varphi\left(X_2, X_3\right) - X_2.\varphi\left(X_1, X_3\right) + \varphi\left(X_2, X_1\right).X_3 \\ &\quad -\varphi\left(X_1, X_2\right).X_3 - \varphi\left(X_1.X_2, X_3\right) - \varphi\left(X_2, X_1.X_3\right) \\ &\quad +\varphi\left(X_1, X_2.X_3\right) + \varphi\left(X_2.X_1, X_3\right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\delta\varphi\left(X_1, X_2, X_3\right) = -\sum\nolimits_{cycles} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\, \delta^S\varphi\left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}\right). \quad \blacksquare$$

5.6 Déformations

Soit $(\mathfrak{g}, \mu)$ une algèbre de Lie et notons $\mathcal{A}_\mu$ cette algèbre de Lie considérée comme une algèbre admissible.

Soit $\varphi : \mathcal{A}_\mu \times \mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu$ une application symétrique.

Lemme 5.6.1 $\delta_\mu \varphi = 0$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \delta_\mu \varphi (X_1, X_2, X_3) &= \sum\nolimits_{\sigma \in \sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\mu \left(\varphi \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\right), X_{\sigma(3)}\right) \\ & -\mu \left(X_{\sigma(1)}, \varphi \left(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}\right)\right)) \\ & + \sum\nolimits_{\sigma \in \sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (\varphi \left(\mu \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\right), X_{\sigma(3)}\right) \\ & -\varphi \left(X_{\sigma(1)}, \mu \left(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}\right)\right)) \end{aligned}$$

Comme φ est symétrique, la première partie est nulle. De plus comme μ est antisymétrique, alors

$$\begin{aligned} \varphi \left(\mu \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\right), X_{\sigma(3)}\right) &= -\varphi \left(\mu \left(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(1)}\right), X_{\sigma(3)}\right) \\ &= -\varphi \left(X_{\sigma(3)}, \mu \left(X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(1)}\right)\right) \\ &= \varphi \left(X_{\sigma(3)}, \mu \left(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}\right)\right) \end{aligned}$$

et la deuxième partie est aussi nulle. ■

Lemme 5.6.2 *Si μ est une loi d'algèbre de Lie et φ est une application bilinéaire symétrique, alors $\frac{1}{2}(\mu + \varphi)$ est une loi admissible telle que $(\mathcal{A}, [,]_{\frac{1}{2}(\mu+\varphi)}) = (\mathcal{A}, [,]_\mu)$.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la définition des lois admissibles. ■

Conséquence. Pour une loi d'algèbre de Lie donnée μ , et pour toute application bilinéaire symétrique φ, $\frac{1}{2}(\mu + \varphi)$ peut être considérée comme une déformation linéaire de μ dans la variété $\mathcal{A}dm_n$ des lois admissibles de dimension n. Cette variété est fibrée au dessus de la variété $\mathcal{L}_n$ des algèbres de Lie de dimension n, la fibre $\pi^{-1}(\mu)$ étant l'ensemble des lois admissibles correspondant à la même algèbre de Lie. Alors la déformation $\frac{1}{2}(\mu + \varphi)$ de μ est une déformation "fibrée", c'est à dire que $\pi\left(\frac{1}{2}(\mu + \varphi)\right) = \mu$. On peut regarder si cette déformation coupe la sous-variété $Vinb_n$ des lois de Vinberg de dimension n.

Proposition 5.6.3 *La déformation $\frac{1}{2}(\mu + \varphi)$ est dans $Vinb_n$ si et seulement si l'application symétrique vérifie*

$$\begin{aligned} & 2\varphi \left(\mu \left(X_2, X_1\right), X_3\right) + \mu \left(X_1, \varphi \left(X_2, X_3\right)\right) + \varphi \left(X_1, \mu \left(X_2, X_3\right)\right) \\ & + \varphi \left(X_1, \varphi \left(X_2, X_3\right)\right) - \mu \left(X_2, \varphi \left(X_1, X_3\right)\right) - \varphi \left(X_2, \mu \left(X_1, X_3\right)\right) \\ & - \varphi \left(X_2, \varphi \left(X_1, X_3\right)\right) + \mu \left(\mu \left(X_2, X_1\right), X_3\right) = 0. \end{aligned}$$

Chapitre 6

Annexe : Structures complexes sur les algèbres filiformes

6.1 Structures complexes invariantes

6.1.1 Définition

Définition 6.1.1 *Une structure complexe sur un groupe de Lie G est un endomorphisme J de $\mathfrak{g}$, son algèbre de Lie associée, tel que*

$$\begin{array}{ll} (1) & J^2 = -Id \\ (2) & [JX, JY] = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g} \end{array}$$

La seconde condition est appelée la condition d'intégrabilité de Nijenhuis.

Pour simplifier, nous dirons que J est une structure complexe invariante sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit V l'espace vectoriel sous-jacent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel complexe en posant

$$(a+ib).v = a.v + bJ(v)$$

$\forall v \in V, a, b \in \mathbb{R}$. Soit V_J cet espace vectoriel complexe. On a

$$\dim_{\mathbb{C}} V_J = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} V = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

Définition 6.1.2 *La structure complexe J est dite bi-invariante si J vérifie*
(3) $[J, adX] = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Remarquons que (3) implique (2).

Si J est bi-invariant, alors V_J est une algèbre de Lie complexe, notée $\mathfrak{g}_J$, puisque dans ce cas nous avons

$$[(a+ib)X, (c+id)Y] = (a+ib)(c+id)[X,Y]$$

6.1.2 Décomposition associée a une structure complexe

Soit J une structure complexe invariante sur l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$. On peut prolonger l'endomorphisme J de manière naturelle sur la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ of $\mathfrak{g}$. Cela induit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ une somme directe vectorielle

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{i} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-i}$$

où

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\varepsilon i} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \quad / \quad J(X) = \varepsilon i X\} \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

La condition d'intégrabilité de Nijenhuis (2) implique que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\varepsilon i}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si σ représente la conjugaison sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ définie par

$$\sigma(X + iY) = X - iY$$

, alors

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-i} = \sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{i}).$$

Proposition 6.1.3 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$. Elle est munie d'une structure complexe invariante si et seulement si la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ admet une décomposition de la forme*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \sigma(\mathfrak{h})$$

où $\mathfrak{h}$ est une sous algèbre complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de dimension n.

Remarque. Si J est bi-invariante, la condition (3) implique que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\varepsilon i}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. En effet, si $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\varepsilon i}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\varepsilon i}$ on a

$$J[X,Y] = [JX,Y] = \varepsilon i [X,Y] = [X,JY] = -\varepsilon i [X,Y]$$

Donc

$$[X,Y] = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 6.1.4 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$. Alors $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure complexe bi-invariante si et seulement si la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est une somme directe des idéaux I et $\sigma(I)$:*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = I \oplus \sigma(I)$$

Exemple. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle de dimension 4 définie par

$$[X_1, X_2] = X_3$$

les crochets non définis étant nuls ou obtenus par antisymétrie. L'endomorphisme J défini par

$$J(X_1) = -X_2 \quad , \quad J(X_2) = X_1 \quad , \quad J(X_3) = -X_4 \quad , \quad J(X_4) = X_3$$

vérifie (1) et (2) et définit une structure complexe invariante sur G. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est engendrée par

$$\{U_1 = X_1 + iX_2, U_2 = X_3 + iX_4\}$$

et $\sigma(\mathfrak{h})$ est engendrée par

$$\{\sigma(U_1) = X_1 - iX_2, \sigma(U_2) = X_3 - iX_4\}$$

On peut noter que $\mathfrak{h}$ et $\sigma(\mathfrak{h})$ sont des sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Cette sructure n'est pas bi-invariante puisque $\mathfrak{h}$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

6.2 Structures complexes bi-invariantes

6.2.1 Cas nilpotent

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension $2n$ munie d'une structure complexe bi-invariante. Alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = I \oplus \sigma(I)$ avec I un idéal complexe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de dimension n. Ceci décrit entièrement la sructure des complexifiées $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ des algèbres de Lie réelles $\mathfrak{g}$ munies d'une structure complexe bi-invariante.

Soit $c(\mathfrak{n})$ la suite caractéristique de l'algèbre de Lie nilpotente complexe $\mathfrak{n}$ ([A.G.]). Elle est définie par

$$c(\mathfrak{n}) = \quad Max\{c(X) \quad | \quad X \in \mathfrak{n} - [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]\}$$

où $c(X) = (c_1(X), ..., c_k(X), 1)$ est la suite des invariants de similitude de l'opérateur nilpotent adX. On en déduit que

$$c\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\right) = (c_1, c_1, c_2, c_2, ..., 1, 1)$$

Comme la forme de Jordan des opérateurs nilpotents adX ne dépend pas du corps de base, on a

Proposition 6.2.1 *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension $2n$ admettant une structure complexe bi-invariante, alors sa suite caractéristique est du type*

$$(c_1, c_1, c_2, c_2, ..., c_j, c_j, ..., 1, 1)\,.$$

Une algèbre de Lie nilpotente est dite de classe maximale (ou filiforme) si la suite décroissante des idéaux dérivés $\mathcal{C}^i\mathfrak{g}$ vérifie :

$$\begin{array}{l} \dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g} - 2 \\ \dim \mathcal{C}^i\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g} - i - 1 \quad \forall i \geq 2 \end{array}$$

Corollaire 6.2.2 *Il n'existe aucune structure complexe bi-invariante sur une algèbre de Lie filiforme.*

En effet, la suite caractéristique d'une algèbre de Lie filiforme est $(2n-1, 1)$. Donc, d'après la proposition 6.2.1, une algèbre de Lie filiforme ne peut pas avoir de structure complexe bi-invariante.

Soit $\{U_j\}$ et $\{V_j\}$ les bases des idéaux complexes I et $\sigma(I)$. Dans $\mathfrak{g}$, on peut écrire $U_l = X_l - iY_l$, $V_l = X_l + iY_l$, où $\{X_1, ..., X_n, Y, ..., Y_n\}$ est une base réelle de $\mathfrak{g}$. Comme $[U_l, V_l] = 0$, on a

$$[X_l - iY_l, X_k + iY_k] = [X_l, X_k] + [Y_l, Y_k] + i\left([X_l, Y_k] - [Y_l, X_k]\right) = 0$$

Donc

$$\begin{array}{l} [X_l, X_k] = -[Y_l, Y_k] \\ [X_l, Y_k] = [Y_l, X_k] \qquad k = 1, ..., n \quad ; \quad l = 1, ..., n. \end{array}$$

De même $[U_l, U_k] \in I$ et $[V_l, V_k] \in \sigma(I)$ implique

$$\begin{array}{l} [X_l, X_k] - [Y_l, Y_k] \in \mathbb{C}\{X_1, ..., X_k\} \\ [X_l, Y_k] + [Y_l, Y_k] \in \mathbb{C}\{Y_1, ..., Y_k\} \end{array}$$

Supposons que I admette une base réelle. Dans ce cas, on a

$$\begin{array}{lll} [X_l, X_k] = \sum_{j=1}^{n} C_{lk}^j X_j & , & [Y_l, Y_k] = -\sum_{j=1}^{n} C_{lk}^j Y_j \\ [X_l, Y_k] = \sum_{j=1}^{n} D_{lk}^j Y_j & , & [Y_l, X_k] = \sum_{j=1}^{n} D_{lk}^j Y_j \end{array}$$

avec C_{lk}^j et D_{lk}^j dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}\{X_1, ..., X_n\}$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}\{Y_1, ..., Y_n\}$. Alors les relations précédentes montrent que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, et

$$\begin{cases} [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0 \\ [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0 \\ [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1 \end{cases}$$

ce qui donne une structure d'algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$-gradué sur $\mathfrak{g}$.

6.2.2 Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes munies de structures complexes bi-invariantes

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension $2n$ munie d'une structure complexe bi-invariante, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = I \oplus \sigma(I)$. Alors la classification des complexifiées associées $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ correspond à la classification des algèbres de Lie complexes nilpotentes I. Pour le moment, cette classification est connue seulement jusqu'en dimension 7, et pour des cas particuliers jusqu'en dimension 8. Obtenir une liste générale de ces algèbres serait illusoire. De [S] on peut extraire la liste pour la dimension 6. A partir de [A.G] il est possible de présenter la classification des complexifications $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ des algèbres de Lie réelles nilpotentes munies de structures complexes biinvariantes jusqu'en dimension 14. Nous allons présenter rapidement la classification pour le cas réel jusqu'en dimension 8.

Dimension 2 : $\mathfrak{g}_2^1$ est abélienne.

Dimension 4 : $\mathfrak{g}_4^1$ est abélienne.

En effet $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = I \oplus \sigma(I)$ et I est un idéal abélien.

Dimension 6 : - $\mathfrak{g}_6^1$ est abélienne.

- $\mathfrak{g}_6^2 : \begin{cases} [X_2, X_3] = -[Y_2, Y_3] = X_1 \\ [X_2, Y_3] = [Y_2, X_3] = Y_1 \end{cases}$

Remarques

1. La complexifiée de $\mathfrak{g}_6^2$ est isomorphe à $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$ où $\mathfrak{h}_3$ est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3.

2. Remarquons que l'algèbre de Lie nilpotente réelle $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$ n'a pas de structure complexe bi-invariante. En effet si $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ est une base de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$ avec les crochets suivants

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_4, X_5] = X_6,$$

alors chaque isomorphisme J qui commute avec adX pour tout X vérifie $J(X_3) = \alpha X_3$ et $J(X_6) = \beta X_6$. Comme $J^2 = -Id$, nous aurions $\alpha^2 = \beta^2 = -1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_6^2$ est 2-nilpotente et c'est une algèbre de Lie de type H (voir [K]).

Dimension 8 : - $\mathfrak{g}_8^1$ est abélienne.

- $\mathfrak{g}_8^2 = \mathfrak{g}_6^2 \oplus \mathfrak{g}_2^1$

- $\mathfrak{g}_8^3 : \begin{cases} [X_2, X_4] = X_1 & ; & [Y_2, Y_4] = -X_1 \\ [X_2, Y_4] = +Y_1 & ; & [Y_2, X_4] = +Y_1 \\ [X_3, X_4] = X_2 & ; & [Y_3, Y_4] = -X_2 \\ [X_3, Y_4] = Y_2 & ; & [Y_3, X_4] = Y_2 \end{cases}$

- $\mathfrak{g}_8^4$: $\begin{cases} [X_2,X_3]=X_1 & ; \quad [Y_2,Y_3]=-X_1 \\ [X_2,Y_3]=Y_1 & ; \quad [Y_2,X_3]=Y_1 \\ [X_2,X_4]=Y_1 & ; \quad [Y_2,Y_4]=-Y_1 \\ [X_2,Y_4]=-X_1 & ; \quad [Y_2,X_4]=-X_1 \end{cases}$

6.2.3 Sur la classification des algèbres de Lie résolubles munies de structures complexes bi-invariantes

Il est connu qu'il y a, à isomorphisme près, une seule algèbre de Lie résoluble non nilpotente de dimension 2, notée par $\mathfrak{r}_2^2$ et définie par $[X_1,X_2]=X_1$ sur la base $\{X_1,X_2\}$. Cette algèbre de Lie n'admet pas de structure complexe bi-invariante. Donc, une algèbre de Lie résoluble non abélienne admettant une telle structure est au moins de dimension 4.

Si nous voulons classifier toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension 4 admettant des structures complexes bi-invariantes, on peut utiliser la classification de Dozias, que nous pouvons trouver dans [B.C.D.L.R.V].

A partir de cette classification, on peut affirmer :

Théorème 6.2.3 *: Toute algèbre de Lie résoluble réelle de dimension* 4 *munie d'une structure complexe bi-invariante est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
- $\mathfrak{r}_4^1=\mathfrak{g}_4^1$ *l'algèbre de Lie abélienne.*
- $\mathfrak{r}_4^2=\begin{cases} [X_1,X_3]=X_3 \\ [X_1,X_4]=X_4 \\ [X_2,X_3]=-X_4 \\ [X_2,X_4]=X_3 \end{cases}$

Remarque. Dans le dernier cas, toute structure complexe bi-invariante vérifie

$$\begin{aligned} J(X_1) &= aX_1+bX_2, \\ J(X_2) &= -bX_1+aX_2 \\ J(X_3) &= aX_3+bX_4, \\ J(X_4) &= -bX_3+aX_4. \end{aligned}$$

Sa complexifiée $\mathfrak{r}_{4\mathbb{C}}^2$ est isomorphe à $\mathfrak{r}_2^2\times\mathfrak{r}_2^2$. Notons que l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{r}_2^2\times\mathfrak{r}_2^2$ qui a la même complexifiée que $\mathfrak{r}_4^2$ n'est pas pourvue d'une structure complexe bi-invariante.

6.3 Non existence de structure complexe invariante sur les algèbres de Lie filiformes

6.3.1 Rappels

Nous avons rappelé dans les chapitres précédents la définition des algèbres de Lie filiformes. L'exemple le plus simple est donné par l'algèbre de Lie de dimension n suivante, notée L_n :

$$[X_1,X_i]=X_{i+1}, \quad i=2,...,n-1$$

et les crochets non définis sont nuls ou obtenus par antisymétrie.

Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension n. Il existe une base $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ qui est adaptée au drapeau

$$\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^2\mathfrak{g} \supset ... \supset \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g} = \{0\}$$

avec $\dim \mathcal{C}^1\mathfrak{g} = n-2$, $\dim \frac{\mathcal{C}^i\mathfrak{g}}{\mathcal{C}^{i-1}\mathfrak{g}}$ $=1$, $i \geq 1$, et qui vérifie :

$$\begin{cases} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & i = 2, ..., n-1 \\ [X_i, X_j] = \sum_{k \geq i+j} C_{ij}^k X_k \end{cases}$$

Le changement de base $Y_1 = X_1$, $Y_i = tX_i$, $i \geq 2$, $t \neq 0$, montre que cette algèbre de Lie est isomorphe à celle qui suit :

$$\begin{cases} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & i = 2, ..., n-1 \\ [X_i, X_j] = t\sum C_{ij}^k X_k \end{cases}$$

Notons par μ_0 la loi d'algèbre de Lie de L_n et μ_t la loi de l'algèbre de Lie précédente. On a

$$\mu_t = \mu_0 + t\varphi$$

avec $\varphi(X_1, X_i) = 0$ et $\varphi(X_i, X_j) = \sum C_{ij}^k X_k$, $i, j \geq 2$.

On peut interpréter cette identité de la manière suivante :

Proposition 6.3.1 *Toute loi d'algèbre de Lie filiforme est une déformation linéaire de l'algèbre de la loi de L_n.*

Le fait que μ_t soit une loi d'algèbre de Lie se traduit par :

$$\begin{cases} \varphi \in Z^2(\mu_0, \mu_0) \\ \varphi \in \mathcal{L}^n \end{cases}$$

où $Z^2(\mu_0, \mu_0)$ est l'espace des 2-cocycles pour la cohomologie de Chevalley de μ_0 et $\mathcal{L}^n$ l'ensemble de toutes les lois d'algèbres de Lie de dimension n (voir [G.K.]).

6.3.2 Structures complexes invariantes et algèbres de Lie filiformes

Proposition 6.3.2 *L'algèbre de Lie filiforme réelle L_{2n} n'admet pas de structure complexe invariante.*

Preuve. Soit T un isomorphisme vectoriel de l'espace vectoriel réel sous jacent à L_{2n} vérifiant la condition de Nijenhuis :

$$[T(X), T(Y)] = [X, Y] + T[X, T(Y)] + T[T(X), Y]$$

où $[,]$ est le crochet de L_{2n}. Considérons la base $\{X_1, ..., X_{2n}\}$ de L_{2n} donnée précédemment :

$$\begin{cases} [X_1, X_i] = X_{i+1} & i = 2, ..., 2n \\ [X_i, X_j] = 0 & i, j \neq 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} [T(X_{2n-1}), T(X_{2n})] &= [X_{2n-1}, X_{2n}] + T[X_{2n-1}, T(X_{2n})] + T[T(X_{2n-1}), X_{2n}] \\ &= T[X_{2n-1}, T(X_{2n})] \end{aligned}$$

Comme

$$[X_{2n-1}, X_1] = -X_{2n}$$

on obtient

$$[T(X_{2n-1}), T(X_{2n})] = T\,[X_{2n-1}, T(X_{2n})] = -aT(X_{2n})$$

avec

$$T(X_{2n}) = aX_1 + \sum_{i\geq 2} a_i X_i.$$

La nilpotence de L_{2n} implique que la constante a qui apparaît comme une valeur propre de $ad(T(X_{2n-1}))$ est nulle. Donc

$$[T(X_{2n-1}), T(X_{2n})] = 0.$$

Ceci implique que

$$[T(X_i), T(X_{2n})] = T\,[X_i, T(X_{2n})] = 0$$

pour $i = 2, ..., 2n$. Si $T(X_{2n}) \notin Z(L_{2n}) = \mathbb{R}\{X_{2n}\}$, alors $T(X_i) = \sum_{j\geq 2} a_{ij} X_j$ pour $j = 2, ..., 2n$. Comme T est non singulière, nécessairement on a

$$T(X_1) = a_{11}X_1 + \sum_{i\geq 2} a_{i1} X_i$$

avec $a_{11} \neq 0$. La condition $T^2 = -Id$ implique $a_{11}^2 = -1$. Comme $a_{11} \in \mathbb{R}$, on a une contradiction. Ainsi $T(X_{2n}) \in Z(L_{2n}) = \mathbb{R}\{X_{2n}\}$, et cela implique que $T(X_{2n}) = \alpha X_{2n}$. Comme ci-dessus, on peut conclure que $\alpha^2 = -1$. Ce cas est aussi exclu et la proposition est prouvée. ∎

Théorème 6.3.3 *Il n'existe pas de structure complexe invariante sur l'algèbre de Lie filiforme réelle.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme réelle de dimension $2n$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée. S'il existe une structure complexe J sur $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ admet la décomposition suivante

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \sigma(\mathfrak{g}_1)$$

où $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de dimension n et σ l'automorphisme conjugué. Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est filiforme, il existe une base adaptée $\{X_1, .., X_{2n}\}$ vérifiant

$$(*) \begin{cases} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & 2 \leq i \leq 2n-1 \\ [X_i, X_j] = \sum_{k\geq i+j} C_{ij}^k X_k & 2 \leq i < j \leq 2n-2 \end{cases}$$

En particulier on a

$$\dim \frac{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}{\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} = 2, \quad \dim \frac{\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})}{\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} = 1 \quad , \quad i \geq 1$$

La suite ordonnée des dimensions des blocs de Jordan de l'opérateur nilpotent adX_1 est $(n-1, 1)$. Un tel vecteur est appelé vecteur caractéristique.

Lemme 6.3.4 *Tout vecteur caractéristique peut s'écrire $Y = \alpha X_1 + U$ où U est l'epace vectoriel complexe engendré par $\{X_2, ..., X_{2n}\}$*

Il suit que l'ensemble des vecteurs caractéristiques de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est l'ouvert $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} - \mathbb{C}\{X_2, .., X_{2n}\}$.

Lemme 6.3.5 *Soit $\mathfrak{g}_1$, soit $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ contient un vecteur caractéristique de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.*

Remarquons que s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\mathfrak{g}_1 \subset \mathbb{C}\{X_2, .., X_{2n}\}$ et $\sigma(\mathfrak{g}_1) \subset \mathbb{C}\{X_2, .., X_{2n}\}$, ce qui contredit la décomposition précédente.

Donc $\mathfrak{g}_1$ ou $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ est une algèbre de Lie complexe filiforme de dimension n. Comme $\mathfrak{g}_1$ et $\sigma(\mathfrak{g}_1)$ sont des algèbres de Lie isomorphes, l'algèbre de Lie filiforme de dimension $2n$ apparaît comme une somme vectorielle directe de deux algèbres de Lie filiformes de dimension n. Nous allons montrer que c'est impossible. Plus précisemment on a

Proposition 6.3.6 *Soit $n \geq 3$. Il n'y a pas d'algèbre de Lie complexe filiforme de dimension $2n$ qui soit somme vectorielle directe de deux sous-algèbres filiformes de dimension n.*

Preuve. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension $2n$ telle que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. D'après le lemme précédent, une des deux sous-algèbres $\mathfrak{g}_i$, par exemple $\mathfrak{g}_1$, contient un vecteur caractéristique. Cela implique que $\mathfrak{g}_1 \cap \mathbb{C}\{X_2, .., X_{2n}\} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathbb{C}\{X_{n+1}, .., X_{2n}\}$. Comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, alors $\mathfrak{g}_2 \subset \mathbb{C}\{X_2, .., X_{2n}\}$. Mais d'après les crochets dans $(*)$ ceci est impossible dès que $n > 2$.

Le cas de la dimension 4 peut être traité directement. A isomorphisme près, il existe seulement une algèbre de Lie filiforme de dimension 4, L_4, pour laquelle nous avons montré la non existence de structure complexe invariante. Notons que, avec la base prise dans $(*)$, cette algèbre admet la décomposition $L_4 = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$,où $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont les sous-algèbres abéliennes engendrées respectivement par $\{X_1, X_4\}$ et $\{X_2, X_3\}$. ■

6.3.3 Conséquence.

Soit J une structure complexe invariante sur un algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit μ la loi (les crochets) de $\mathfrak{g}$ et considérons la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}$. L'opérateur cobord est noté δ_μ.

Proposition 6.3.7 *On a*

$$\delta_\mu J = \mu_J$$

où μ_J est la loi d'algèbre de Lie, isomorphique à μ, définie par

$$\mu_J(X, Y) = J^{-1}(\mu(J(X), J(Y)).$$

Preuve. En effet la condition de Nijenhuis se traduit par :

$$\mu(JX, JY) = \mu(X, Y) + J\mu(JX, Y) + J\mu(X, J(Y))$$

Alors

$$J^{-1}\mu(JX, JY) = J^{-1}\mu(X, Y) + \mu(JX, Y) + \mu(X, J(Y))$$

c'est à dire, puisque $J^2 = -Id$

$$\begin{aligned} J^{-1}\mu(JX, JY) &= -J\mu(X, Y) + \mu(JX, Y) + \mu(X, J(Y)) \\ &= \delta_\mu J(X, Y). \quad ■ \end{aligned}$$

Corollaire 6.3.8 *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie filiforme, alors il n'existe aucun 2-cobord pour la cohomologie de Chevalley tel que*

$$\delta_\mu(J) = \mu_J$$

où $J^2 = -Id$

6.4 Sur la classification des structures complexes sur des algèbres de Lie résolubles réelles

Dans [O], le problème de cette classification est abordé. On peut trouver la classification complète des algèbres de Lie résolubles réelles munies d'une structure complexe invariante quand le commutateur est de dimension 3. En utilisant la classification de Dozias (voir [B.C.D.L.R.V]), on peut compléter cette liste pour toutes les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension 4.

Proposition 6.4.1 *Toute algèbre de Lie résoluble réelle de dimension 4 munie d'une structure complexe et dont la sous-algèbre dérivée est de dimension inférieure à 3 est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*
- $(\mathfrak{g}_1)^4$, $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}, (\mathfrak{g}_1)^2 \times \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_{4,1}, \mathfrak{g}_{4,2}, (\mathfrak{g}_2)^2, \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,2}(\alpha = 1)$.

Les notations proviennent de la proposition 1.1.2 p 182 de [B.C.D.L.R.V]. Remarquons que les cas étudiés dans [O] correspondent aux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{4,5}(\alpha, \beta)$ avec $-1 < \alpha \leq \beta < 0$ ou $(-1 \leq \alpha < 0$ et $0 < \beta \leq 1)$ ou $(0 < \alpha \leq \beta \leq 1), \mathfrak{g}_{4,6}(\alpha)$ avec $\alpha \neq 0, \mathfrak{g}_{4,7}, \mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, \beta)$ avec $\alpha > 0, \mathfrak{g}_{4,9}(\alpha)$ avec $0 \leq \alpha \leq 2, \alpha \neq 1, \mathfrak{g}_{4,10}, \mathfrak{g}_{4,11}(\alpha)$ avec $\alpha \geq 0$.

Preuve de la proposition. Les cas $(\mathfrak{g}_1)^4$ et $\mathfrak{g}_{4,2}$ ont été étudié dans la section 3.3. Ils correspondent aux algèbres de Lie munies d'une structure complexe bi-invariante. Pour toute algèbre de Lie décrite dans la classification de [B.C.D.L.R.V] nous allons donner explicitement une structure complexe invariante quand il en existe une.

- $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$. Les crochets sont donnés par $[X_1, X_2] = X_3$ (les autres crochets étant nuls ou obtenus par antisymétrie) et l'isomorphisme $J(X_1) = X_2, J(X_2) = -X_1, J(X_3) = X_4, J(X_4) = -X_3$ est une structure complexe.

- $(\mathfrak{g}_1)^2 \times \mathfrak{g}_2 : [X_1, X_2] = X_3$. $J(X_1) = X_2, J(X_2) = -X_1, J(X_3) = X_4, J(X_4) = -X_3$ est une structure complexe invariante.

- $\mathfrak{g}_{4,1}$: $[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = X_4, [X_2, X_3] = X_4$. L'isomorphisme défini par $J(X_1) = X_1 + 2X_3, J(X_2) = X_2 + 2X_4, J(X_3) = -X_1 - X_3, J(X_4) = -X_2 - X_4$ est une structure complexe invariante.

- $\mathfrak{g}_{4,3}$: c'est une algèbre de Lie filiforme. Il n'existe pas de structure complexe invariante.

- $\mathfrak{g}_{4,4} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_4$. Supposons que la matrice de J dans la base $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$:

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

D'après la condition de Nijenhuis on a

$$\begin{aligned} [J(X_3), J(X_4)] &= J([J(X_3), X_4]) \\ [J(X_2), J(X_3)] &= J([X_2, J(X_3)]) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(c_1 d_2 - c_2 d_1) X_3 + (c_1 d_4 - c_4 d_1) X_4 = c_1 J(X_4)$$

Si $c_1 \neq 0$, alors $J(X_4)$ est dans l'espace engendré par X_3 et X_4, donc $d_1 = d_2 = 0$. L'équation précédente donne $J(X_4) = d_4 X_4$. Comme $J^2 = -Id$, c'est impossible. Donc $c_1 = 0$. Dans ce cas, on a $c_2d_1 = c_4d_1 = 0$. Si $d_1 \neq 0, c_2 = c_4 = 0$ et $J(X_3) = c_3X_3$ c'est impossible. Donc $d_1 = 0$. La deuxième condition implique $c_2b_1 = c_4b_1 = 0$. Si $b_1 = 0$ alors a_1 est une valeur propre réelle. Donc $b_1 \neq 0$ et dans ce cas c_3 est une valeur propre réelle. Ceci prouve que $\mathfrak{g}_{4,4}$ n'a pas de structure complexe invariante.

- $(\mathfrak{g}_2)^2$: $[X_1, X_2] = X_2, [X_3, X_4] = X_4 . J(X_1) = X_2, J(X_2) = -X_1, J(X_3) = X_4, J(X_4) = -X_3$ est une structure complexe invariante.

-$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ avec $\mid \alpha \mid \geq 1$: $[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \alpha X_3$. Nous allons montrer que ces algèbres admettent une structure complexe invariante si et seulement si $\alpha = 1$. Nous conservons les notations ci-dessus pour la matrice de J. La condition de Nijenhuis implique :

$$\begin{aligned} [J(X_3), J(X_4)] &= J([X_3, J(X_4)]) \\ [J(X_2), J(X_4)] &= J([X_2, J(X_4)]) \end{aligned}$$

Alors

$$(c_1d_2 - c_2d_1)X_2 + \alpha(c_1d_3 - c_3d_1)X_3 = -\alpha d_1 J(X_3).$$

Ceci implique que $d_1 = 0$ et $c_1d_2 = c_1d_3 = 0$ ou $d_1 \neq 0$ et $c_1 = c_4 = 0, -\alpha d_1 c_2 = -c_2 d_1, -\alpha d_1 c_3 = -\alpha d_1 c_3$. Dans le second cas, si $\alpha \neq 1$, on a $c_2 = 0$ et $J(X_3) = c_3X_3$ ce qui est impossible. Alors $d_1 = 0$ et $c_1d_2 = c_1d_3 = 0$. La condition $c_1 \neq 0$ donne la même contradiction. Ainsi $d_1 = c_1 = 0$. La deuxième égalité provenant de la condition de Nijenhuis s'écrit :

$$(b_1d_2 - b_2d_1)X_2 + \alpha(b_1d_3 - b_3d_1)X_3 = -d_1J(X_2)$$

c'est à dire

$$b_1d_2X_2 + \alpha b_1d_3X_3 = 0.$$

Alors $b_1 = 0$ et a_1 est une valeur propre réelle de J ce qui est impossible, ou $d_2 = d_3 = 0$ et d_4 est une valeur propre réelle de J. Ainsi si $\alpha \neq 1$ il n'existe pas de structure complexe invariante. Supposons que $\alpha = 1$. L'isomorphisme $J(X_1) = X_4, J(X_4) = -X_1, J(X_2) = X_3, J(X_3) = -X_2$ est une structure complexe invariante invariante.

-$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,3}$: $[X_1, X_2] = X_2 + X_3, [X_1, X_3] = X_3$. La condition de Nijenhuis implique que

$$[J(X_3), J(X_4)] = J([X_3, J(X_4)]) = -d_1J(X_3).$$

Si $d_1 \neq 0$, alors $J(X_3) \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,3})$ et $c_1 = c_4 = 0$. On a alors

$$(-c_2d_1)(X_2 + X_3) - c_3d_1X_3 = -d_1(c_2X_2 + c_3X_3)$$

Ainsi $c_2 = 0$ et $J(X_3) = c_3X_3$. Ceci est impossible. On conclut que $d_1 = 0$. La condition précédente implique que

$$[J(X_3), J(X_4)] = 0$$

c'est à dire

$$(c_1d_2)(X_2 + X_3) + (c_1d_3)X_3 = 0$$

Si $c_1 \neq 0$, alors $d_2 = d_3 = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $c_1 = 0$. Dans ce cas la condition

$$[J(X_2), J(X_4)] = J([X_2, J(X_4)]) = 0.$$

implique que $b_1c_2(X_2+X_3)+b_1d_3X_3=0$, et, comme $d_1=c_1=0$, $b_1\neq 0$, $c_2=d_3=0$. Dans ce cas, la condition

$$[J(X_1),J(X_4)]=J([X_1,J(X_4)])$$

s'écrit

$$a_1d_2(X_2+X_3)=d_2J(X_2+X_3).$$

Comme d_2 ne peut pas être nul, a_1 est une valeur propre ce qui est impossible. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_{3,3}$ n'est pas munie d'une structure complexe invariante.

-$\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ avec $\alpha\geq 0$: $[X_1,X_2]=\alpha X_2-X_3,[X_1,X_3]=X_2+\alpha X_3$. Nous allons montrer qu'il n'existe aucune structure complexe invariante. La preuve est similaire à la précédente. Nous allons la résumer. La condition

$$[J(X_2),J(X_3)]=J([J(X_2),X_3])+J([X_2,J(X_3)])$$

donne, en regardant la composante sur X_1 : $b_1=c_1=0$. Ainsi $d_1\neq 0$.Les conditions

$$\begin{array}{rcl}[J(X_3),J(X_4)]&=&J([X_3,J(X_4)])\\ [J(X_2),J(X_4)]&=&J([X_2,J(X_4)])\end{array}$$

donnent, en regardant la composante sur X_4 : $b_4+\alpha c_4=\alpha b_4+c_4=0$. Comme $\alpha\geq 0, b_4=c_4=0$. Ceci implique que $b_2=c_3, b_3=-c_2$. Finalement la condition

$$[J(X_1),J(X_3)]=J([J(X_1),X_3])+J([X_1,J(X_3)])$$

donne

$$\begin{array}{rcl}1+c_2(\alpha b_2-c_2)+c_3(b_2+\alpha c_2)&=&0\\ \alpha+c_2(\alpha b_3-c_3)+c_3(b_3+\alpha c_3)&=&0\end{array}$$

Donc

$$(1+\alpha^2)b_2b_3=0$$

Ceci est impossible. Cette algèbre de Lie ne peut pas avoir de structure complexe invariante. ■

Note. La vérification que les isomorphismes J sont des structures complexes est aisée. En effet soit J un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ vérifiant $J^2=-Id$ et considérons $\{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\}$ une base de l'algèbre de Lie telle que $J(Y_1)=Y_2$ et $J(Y_3)=Y_4$. La condition de Nijenhuis se réduit à une seule équation

$$J[Y_2,Y_3]+J[Y_1,Y_4]=[Y_2,Y_4]-[Y_1,Y_3]$$

BIBLIOGRAPHIE

[A] Albert A.A., *On the power-associative rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **64**, (1948). 552-593.
[Au] Aubert A., *Thèse Montpellier* (1998).
[A.G] Goze M, Ancochea Bermudez J.M., *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7.* Note aux C.R.A.Sc. Paris, **302**, (1986).

[Ba] Balavoine D., *Deformations of algebras over a quadratic operad.* Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math., **202** , Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997),207-234.
[Be] Benoist Y., *Une nilvariété non affine.* J.Diff.Geom., **41**, (1995), 21-52.
[B.M] Bordemann M., Medina A., *Le groupe de transformations affines d'un groupe de Lie aštructure affine biinvariante.* Séminaire Gaston Darboux. Montpellier 1995-1996, 183-210.
[Bu1] Burde D., *Left invariant affine structure on reductive Lie groups.* J. Algebra, **181**, (1996), 884-902.
[Bu2] Burde D., *Affine structures on nilmanifolds.* Int. J. of Math, **7** (1996), 599-616.
[Bu3] Burde D., *Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra.* Manuscripta math., **95** (1998), 397-411.
[Bu4] Burde D., Habilitationsschrift. Düsseldorf, (1998).
[B.C.D.L.R.V] Bernat P., Conze, Duflo, Levy-Nahas, Raïs, Renouard, Vergne, *Representation des groupes de Lie résolubles.* Monographie de la société mathématique de France 4, Dunod (1972).
[Ca] Campoamor, *Thèse.* Madrid (2000)
[C-L] Chapoton F., Livernet M., *Pre-Lie algebra and the rooted trees operad.* Internat. Math. Res. Notices **8**, (2001), 395-408.
[C.F.G.U] Cordero L.A., Fernandez M., Gray A., Ugarte L., *Nilpotent complex structures on compact nilmanifolds.* Rend. Circolo Math. Palermo. **49** Supp 83-100 (1997).
[D.O] Dekimpe K., Ongenae V., *On the number of abelian left symmetric algebras.* P.A.M.S., **128** **(11),** (2000), 3191-3200.
[Dz] Dzhumadil'daev A., *Cohomologies and deformations of right symmetric algebras.* J. Math. Sci. **93**, (1999), 836-876.
[Fe] Fedosov B., *A simple geometrical construction of deformation quantization.* J. Differential Geom., **40**, no. 2,(1994), 213-238.
[F.D] Fried D., Goldman W., *Three dimensional affine crystallographic groups.* Adv. Math., **47**, (1983), 1-49.
[G] Gabriel P., *Finite representation type is open.* L.N.M. 488, Springer, 1975).
[Gi.K] Ginzburg V., Kapranov M., *Koszul duality for operads.* Duke Math Journal, **76,1** (1994), 203-272.
[G.E] Gonzalez Santos, Elduque A., *Flexible Lie-admissible algebras with A and A^- having the same lattice of subalgebras.* Algebras Groups Geom., **1** (1984), 137-143.
[Go] Goze M., *Sur la classe des formes et systèmes de Pfaff sur une algèbre de Lie.* Thèse 3ème cycle, Strasbourg (1976).
[G.K] Goze M., Khakimdjanov Y., *Nilpotent Lie algebras.* Kluwer editor, (1995).
[G.K2] Goze M., Khakimdjanov Y., *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admattant un tore de dérivations.* Manuscripta Math., **84** (1994), 215-224.
[G.R] Goze M., Remm E., *Sur les nilvariétés affines.* Actes Colloque de Brasov, Brasov (1999).
[H] Helmstetter J., *Radical d'une algèbre symétrique à gauche.* Ann. Inst. Fourier, **29** (1979), 17-35.
[K] Kim H., *Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups.* J. Diff. Geom., **24,** (1986), 373-394.
[Ku] Kuiper N., *Sur les surfaces localement affines.* Colloque Géométrie différentielle Strasbourg, (1953), 79-87.
[L] Loday J.L., *La renaissance des opérades.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque **237**, (1996), 47-74.

[M] May J.P., *Operadic tensor products and smash products.* Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 287-303, Contemp. Math., **202**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997).

[M] Mazzola G., *The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five.* Manuscripta math., **27,**,(1979), 81-101.

[Ma] Makhlouf N., *The irreducible components of nilpotent associative algebras.* Revista Matematica Univ. Complutense, **6 (1)**, (1993), 27-40.

[Mal] Malcev, A. *On solvable Lie algebras.* (Russian) Bull. Acad. Sci. URSS. Sr. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 9, (1945). 329–356.

[Mi] Milnor J., *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds.* Advances in Math. 25 (1977), no. 2, 178–187.

[Mo] Morimoto A., *Structures complexes sur les Groupes de Lie semi-simples.* C.R.A.Sc. Paris, **242**,(1956), 1101-1103.

[N.Y] Nagano T., Yagi K., *The affine structures on the real two torus.* Osaka J. Math. **11**,(1974), 181-210.

[N] Nijenhuis A., *Sur une classe de propriétés communes á quelques types différents d'algèbres.* Enseignement Math. (2) **14**, (1970), 225-277.

[O] Ovando G., Invariant complex structures on solvable real Lie groups. Manuscripta Math. **103**, (2000), 19-30.

[S] Salamon S.M., Complex structure on nilpotent Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra.* **157**, (2001).