Sur les variétés de Darboux *

Tewfik Sari
Université de Haute Alsace, Mulhouse, France

Abstract

We study the contact manifolds for which the Darboux atlas gives a locally affine structure. The nilmanifolds obtained as quotients of the Heisenberg group by its discrete uniform subgroups are examples of such manifolds. We classify these manifolds in dimension 3.

1 Introduction

Une variété localement affine est une variété munie d'un atlas affine, c'est à dire un atlas dont les changements de cartes sont des transformations affines. Une variété de Darboux est une variété de contact dont l'atlas de Darboux est un atlas affine.

Rappelons qu'une forme de contact sur une variété M de dimension $2n+1$ est une forme de Pfaff η telle que $\eta \wedge d\eta^n$ soit une forme volume sur M. D'après le théorème de Darboux, une variété de contact possède un atlas dans lequel la forme de contact s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x^i dx^{n+i} + dx^{2n+1}, \tag{1}$$

où $(x^1, \cdots, x^{2n+1})$ sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Cet atlas est appelé l'atlas de Darboux. Ainsi une variété de contact est une variété dont les changements de cartes sont dans le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{2n+1}$ qui laissent invariante la forme de Darboux (1). Une variété de Darboux est une variété dont les changements de cartes sont dans le groupe des invariants affines de la forme de Darboux.

On se propose de déterminer les variétés de Darboux de dimension 3 et de les classifier. Deux variétés localement affines sont dites affinement isomorphes s'il existe un isomorphisme affine (c'est à dire qui s'exprime de manière affine dans les atlas affines) qui envoie l'une dans l'autre. Deux variétés de Darboux sont dites équivalentes si elle sont affinement isomorphes et si l'isomorphisme affine échange leurs formes de contact.

*Ce travail a été présenté au Centennial Gheorghe Vranceanu, Bucharest, June 30-July 2, 2000.

2 Variétés localement affines

Une géodésique d'une variété localement affine M est une application affine de $\mathbb{R}$ dans M. La variété M est dite complète si tout segment de géodésique peut être prolongé en une géodésique ou bien de façon équivalente si le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est affinement isomorphe à $\mathbb{R}^m$ où m est la dimension de la variété M. On sait alors que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M agit sur $\mathbb{R}^m$ comme un groupe Γ de transformations affines, que cette action est proprement discontinue et sans points fixes et que la variété M est le quotient $M = \mathbb{R}^m/\Gamma$. Deux variétés localement affines $\mathbb{R}^m/\Gamma_1$ et $\mathbb{R}^m/\Gamma_2$ sont affinement isomorphes si et seulement si leurs groupes fondamentaux Γ_1 et Γ_2 sont conjugués par une transformation affine. Pour les détails concernant ces questions se reporter aux Leçons de géométrie différentielle de G. Vranceanu [8] Chap. 6.

La classification des surfaces localement affines complètes est bien connue (voir [8] Chap. 6, Section 10). En dimension supérieure il n'y a que des classifications partielles (voir [9] Chap. 1 et [1, 3]). Pour les variétés non complètes la situation est plus délicate et on ne dispose pas de classification même en petite dimension. Un autre point de vue équivalent est de définir une structure localement affine sur une variété par la donnée d'une connexion affine sur M sans courbure et sans torsion : les géodésiques définies ci-dessus sont bien entendu les géodésiques au sens de la connexion.

Une variété localement euclidienne est une variété munie d'un atlas dont les changements de cartes sont des transformations orthogonales. D'après le théorème de Hopf-Rinow, les variétés riemanniennes compactes sont complètes. Par conséquent les variétés localement euclidiennes compactes sont les quotients de $\mathbb{R}^m$ par des sous-groupes discrets du groupe des déplacements agissant de façon proprement discontinue et sans points fixes sur $\mathbb{R}^m$. D'après les théorèmes de Bieberbach, ces variétés sont revêtues avec un nombre fini de feuillets par le tore plat $\mathbb{T}^m$; elles sont affinement isomorphes dès qu'elles ont le même groupe fondamental et il n'y en a qu'un nombre fini en chaque dimension (voir [9] Chap. 1, Section 5).

Les résultats obtenus dans le cas euclidien ne sont plus vrais dans le cas affine. En effet il y a une infinité de variétés localement affines complètes de dimension 3 deux à deux non isomorphes (voir [9] Chap.1, Section 8). Par ailleurs, pour les variétés localement de Lorentz de dimension trois, il y a des modules de structures affines et des variétés difféomorphes ne sont pas nécessairement affinement isomorphes (voir [1] et [9] Chap.1, Section 9).

La propriété "compact$\Rightarrow$complet" n'est pas vraie dans le cas des variétés localement affines. L'exemple le plus simple est celui du cercle non complet obtenu come quotient de la demi droite $]0, +\infty[$ par le groupe engendré par l'homothétie $x' = \lambda x$ avec $\lambda > 1$. Markus [4] a conjecturé que pour les variétés localement affines unimodulaires (c'est à dire que les changements de cartes laissent une forme volume invariante) la compacité implique la complétude (voir [2] pour les développements récents sur ce sujet). Les variétés de Darboux sont unimodulaires puisque le volume $\omega \wedge d\omega^n$ est invariant par les transformations affines qui laissent la forme ω invariante, mais on ne sait pas si la conjecture de Markus est vraie dans ce cas.

3 Invariants affines de la forme de darboux

Pour étudier les variétés de Darboux il convient de déterminer le groupe des invariants affines de la forme de Darboux puis d'en chercher les sous-groupes discrets, c'est à dire les groupes qui agissent de manière proprement discontinue et sans points fixes sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Notons $x = {}^t(x^1, \cdots, x^n)$, $y = {}^t(x^{n+1}, \cdots, x^{2n})$ et $z = x^{2n+1}$. La forme de Darboux (1) s'écrit $\omega = {}^t x dy + dz$. Considérons une transformation affine définie par

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + b_1 \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + b_2 \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + b_3 \end{aligned} \tag{2}$$

où α_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$, sont des matrices carrées d'ordre n, α_{13}, α_{23}, b_1 et b_2 sont des vecteurs colonnes de dimension n, α_{31} et α_{32} des vecteurs lignes de dimension n, α_{33} et b_3 des scalaires. La forme de Pfaff ω est invariante par (2) si et seulement si

$$\omega = {}^t(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z+b_1)(\alpha_{21}dx+\alpha_{22}dy+\alpha_{23}dz)+\alpha_{31}dx+\alpha_{32}dy+\alpha_{33}dz$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + b_1)\alpha_{21} + \alpha_{31} &= 0 \\ {}^t(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + b_1)\alpha_{22} + \alpha_{32} &= {}^t x \\ {}^t(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + b_1)\alpha_{23} + \alpha_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Par conséquent les matrices α_{11} et α_{22} sont inversibles et $\alpha_{22} = {}^t\alpha_{11}^{-1}$, $\alpha_{33} = 1$, $\alpha_{32} = -{}^t(\alpha_{11}^{-1}b_1)$, b_1, b_2, b_3 sont arbitraires et α_{12}, α_{13}, α_{21}, α_{23}, α_{31} sont nuls. Ainsi on a démontré la

Proposition 1. *Le groupe des invariants affines de la forme de Darboux est le groupe $\mathbb{G}$ des transformations affines*

$$x' = \alpha x + a, \quad y' = {}^t\alpha^{-1}y + b, \quad z' = -{}^t(\alpha^{-1}a)y + z + c, \tag{3}$$

où α est une matrice inversible d'ordre n et $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ sont quelconques. C'est un groupe de Lie de dimension $(n+1)^2$.

Notons pour simplifier par (α, a, b, c) l'élément (3) du groupe $\mathbb{G}$. La loi du groupe $\mathbb{G}$ s'écrit

$$(\alpha, a, b, c)(\alpha', a', b', c') = (\alpha\alpha', \alpha a' + a, {}^t\alpha^{-1}b' + b, c' + c - {}^t(\alpha^{-1}a)b').$$

L'inverse de l'élément (α, a, b, c) est donné par

$$(\alpha, a, b, c)^{-1} = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}a, -{}^t\alpha b, -{}^t ab - c).$$

Soit $A = (\alpha, a, b, c)$ un élément du groupe $\mathbb{G}$. Supposons que 1 ne soit pas une valeur propre de la matrice α, alors A est sans point fixe si et seulement si $s \neq 0$ avec

$$s = {}^t\left[(I-\alpha)^{-1}a\right] b + c,$$

où I est la matrice identité d'ordre n. Considérons la transformation $S = (I, (\alpha - I)^{-1}a, ({}^t\alpha^{-1} - I)^{-1}b, 0)$ de $\mathbb{G}$. On a $S^{-1}AS = (\alpha, 0, 0, s)$. Ainsi on a démontré la

Proposition 2. *Soit $A = (\alpha, a, b, c)$ un élément de $\mathbb{G}$ tel que 1 ne soit pas valeur propre de α. Il existe un système de coordonnées de $\mathbb{R}^{2n+1}$ respectant la forme de Darboux et dans lequel A s'écrit $A = (\alpha, 0, 0, s)$ avec $s = {}^t\left[(I-\alpha)^{-1}a\right] b + c$. De plus A n'a pas de points fixes si et seulement si $s \neq 0$.*

L'élément $(\alpha, 0, 0, s)$ avec $s \neq 0$ engendre un sous-groupe discret

$$\Delta = \{(\alpha^n, 0, 0, ns) : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4}$$

Le quotient $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{2n+1}/\Delta$ est une variété de Darboux complète difféomorphe au cylindre $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}^1$.

4 Les nilvariétés de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg est le groupe de Lie $\mathcal{H}$ des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & I & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

où u (resp. v) est un vecteur ligne (resp. colonne) de dimension n, w un scalaire et I la matrice identité d'ordre n. Notons par (u, v, w) l'élément (5) du groupe $\mathcal{H}$. La loi de $\mathcal{H}$ s'écrit

$$(u, v, w)(u', v', w') = (u + u', v + v', w + w' + uv').$$

L'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{H}$ est l'espace vectoriel h des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & U & W \\ 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Notons par X_i (resp. Y_i) l'élément de h correspondant au vecteur ligne $U = (\delta_i^1, \cdots, \delta_i^n)$ et à $V = 0$, $W = 0$ (resp. au vecteur colonne $V = {}^t(\delta_i^1, \cdots, \delta_i^n)$ et à

$U = 0$, $W = 0$) et par Z l'élément de h correspondant à $U = 0$, $V = 0$, $W = 1$. On a

$$[X_i, Y_i] = Z \qquad i = 1, \cdots, n$$

tous les autres crochets étant nuls. Soit ξ_i, ϑ_i, ζ la base duale de la base X_i, Y_i, Z. On a

$$d\zeta + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \wedge \vartheta_i = 0$$

Par conséquent la forme invariante à gauche ζ sur le groupe $\mathcal{H}$ est une forme de contact. Les nilvariétés de Heisenberg, c'est à dire les quotients du groupe de Heisenberg par des sous-groupes discrets (de tels sous-groupes existent car les constantes de structure sont rationnelles, voir [9] Chap. 2) sont des variétés de contact.

Soit $\mathbb{H}$ le sous-groupe de Lie de dimension $2n+1$ de $\mathbb{G}$ formé des éléments (I, a, b, c) où I est la matrice identité d'ordre n. Notons (a, b, c) ces éléments. La loi du groupe $\mathbb{H}$ est donnée par

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a' + a, b' + b, c' + c - {}^t ab').$$

Ainsi la transformation de $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{H}$ définie par $(a, b, c) \to (-{}^t a, b, c)$ est un isomorphisme du groupe $\mathbb{H}$ dans le groupe de Heisenberg. L'action de $\mathbb{H}$ sur lui même par translations s'identifie à l'action de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ par transformations affines

$$(a, b, c)(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c - {}^t ay).$$

Par conséquent se donner un sous-groupe discret du groupe de Heisenberg revient à se donner un sous-groupe discret du groupe $\mathbb{H}$. Ainsi on a établi la

Proposition 3. *Les nilvariétés de Heisenberg munies de leur forme de contact naturelle induite par la forme de contact invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg sont des variétés de Darboux complètes.*

5 Les variétés de Darboux complètes de dimension 3

On se propose de démontrer qu'en dimension 3 les variétés de Darboux compactes sont virtuellement des nilvariétés de Heisenberg, c'est à dire qu'elles sont revêtues avec un nombre fini de feuillets (égal à 1 ou à 2) par une nilvariété de Heisenberg. Cette propriété n'est pas vraie en dimension > 3 comme le montre l'exemple suivant. Plaçons nous en dimension 5 et considérons le sous-groupe Γ de $\mathbb{G}$ formé par les éléments (α, a, b, c) tels que

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \; \text{ et } \; (i, j, k, l, c) \in \mathbb{Z}^5$$

Ce groupe agit sur $\mathbb{R}^5$ de manière proprement discontinue et sans points fixes. Le quotient $M_5 = \mathbb{R}^5/\Gamma$ est une variété de Darboux compacte complète. Le sous- groupe $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathbb{H}$ est constitué par tous les éléments de Γ tels que $i = 0$; c'est donc un groupe engendré par 4 translations. Ainsi $\mathbb{H}/\Gamma_0$n'est pas une variété compacte (c'est $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^4$). Par conséquent M_5 n'est pas (à revêtement fini près) une nilvariété de Heisenberg. Notons cependant que M_5 est une nilvariété. En effet si dans le groupe Γ on donne à i, j, k, l et c toutes les valeurs réelles on obtient un groupe nilpotent $\mathcal{N}_5$ et Γ est un sous-groupe uniforme discret de $\mathcal{N}_5$ avec $M_5 = \mathcal{N}_5/\Gamma$. Cette variété est un fibré en cercles au dessus du tore $\mathbb{T}^4$.

Revenons à la dimension 3.

Proposition 4. $[5, 7]$ *Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{G}$ agissant de façon proprement discontinue et sans points fixes sur $\mathbb{R}^3$. Si Γ contient un élément (α, a, b, c) tel que $\alpha \neq \pm 1$ alors Γ est conjugué par un élément de $\mathbb{G}$ au sous-groupe (4) de $\mathbb{G}$.*

Preuve. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathbb{G}$. Supposons que Γ contient un élément $A = (\alpha, a, b, c)$ tel que $\alpha \neq \pm 1$. D'après la Proposition 2 il existe un système de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ respectant la forme de Darboux et dans lequel A s'écrit $A = (\alpha, 0, 0, c)$ avec $c \neq 0$. Soit $B = (\beta, u, v, w)$ un élément quelconque de Γ écrit dans ce système de coordonnées.
1er cas. Supposons $uv \neq 0$. Posons $C = A^{-1}BAB^{-1}$ et $D = ABA^{-1}B^{-1}$ alors:

$$E = CDC^{-1}D^{-1} = (1, 0, 0, r) \text{ avec } r = uv(\alpha + 1)(\alpha - 1)^3\alpha^{-2}$$

Considérons alors la suite $U_n = A^nE^m = (\alpha^n, 0, 0, nc + mr)$ de Γ où m désigne la partie entière de $-nc/r$. Les éléments de la suite U_n sont tous distincts et pour tout entier n on a $|nc + mr| \leq |r|$. Ainsi l'orbite de l'origine par la suite U_n possède un point d'accumulation et par conséquent Γ n'est pas discontinu sur $\mathbb{R}^3$.
2ème cas. Supposons que $u \neq 0$ et $v = 0$ (le raisonnement est analogue si $u = 0$ et $v \neq 0$). Considérons les suites C_n et D_n d'éléments distincts de Γ définies par:

$$C_n = A^{-n}BA^nB^{-1} = (1, u(\alpha^{-n} - 1), 0, 0)$$
$$D_n = A^nBA^{-n}B^{-1} = (1, u(\alpha^n - 1), 0, 0)$$

Si $|\alpha| > 1$, l'orbite de l'origine par C_n possède un point d'accumulation. Si $|\alpha| < 1$, l'orbite de l'origine par D_n possède un point d'accumulation. Par conséquent Γ n'est pas discontinu sur $\mathbb{R}^3$.

Ainsi l'élément B de Γ vérifie $u = v = 0$, c'est à dire que tous les éléments de Γ sont de la forme $(\beta, 0, 0, w)$. Soit alors $\mathcal{U}$ le sous ensemble de Γ constitué par les éléments $(\beta, 0, 0, w)$ tels que $|\beta| > 1$. L'ensemble $\mathcal{U}$ est non vide car il contient l'élément A si $|\alpha| > 1$ ou son inverse A^{-1} si $|\alpha| < 1$. Comme Γ opère de manière proprement discontinue sur $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathcal{U}$ possède un élément $U = (\varepsilon, 0, 0, s)$ tel que pour tout élément $(\beta, 0, 0, w)$ de $\mathcal{U}$ on ait $|\varepsilon| \leq |\beta|$. Montrons que l'élément U engendre Γ. Comme U agit sans points fixes on a

$s \neq 0$. Soit $B = (\beta, 0, 0, w)$ un élément quelconque de Γ. Considérons la suite U_n d'éléments de Γ définie par $U_n = B^n U^{m(n)} = (\beta^n \varepsilon^{m(n)}, 0, 0, nw + m(n)s)$ où $m(n)$ désigne la partie entière de $-nw/s$. Pour tout entier n on a $|nw+m(n)s| \leq |s|$. Si tous les éléments U_n sont distincts l'orbite de l'origine par la suite U_n possède un point d'accumulation et on en déduit que Γ n'est pas discontinu sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent il existe des entiers n et p tels que $U_n = U_p$, c'est à dire $B^{n-p} = U^{m(p)-m(n)}$. Comme Γ est abelien, sans éléments d'ordre fini, il existe un élément C de Γ tel que $U = C^a$ et $B = C^b$. On a nécessairement $a = \pm 1$. Par conséquent $B = U^{ab}$, c'est à dire que U engendre Γ. □

Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{G}$ agissant de façon proprement discontinue et sans points fixes sur $\mathbb{R}^3$. Alors $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathbb{H}$ est un sous-groupe normal de Γ et d'après la Proposition 4, ou bien Γ est conjugué au groupe Δ, où bien Γ ne contient que des éléments (α, a, b, c) tels que $\alpha = \pm 1$ et dans ce cas Γ_0 est d'indice 1 ou 2. On en déduit que le quotient $\mathbb{R}^3/\Gamma_0$ est un revêtement à 1 ou 2 feuillets de $\mathbb{R}^3/\Gamma$. Ainsi on a le

Théorème 1. [7] *Toute variété de Darboux complète, compacte ou non, de dimension trois est ou bien équivalente au cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3/\Delta$ ou bien virtuellement une nilvariété de Heisenberg, c'est à dire est revêtue avec un nombre fini de feuillets (égal à 1 ou 2) par une nilvariété de Heisenberg.*

6 Structures affines sur les variétés de Darboux complètes de dimension 3

Les structures affines sur les variétés de Darboux complètes de dimension 3 dépendent de 3 paramètres réels. Ainsi sur les nilvariétés de Heisenberg il y a des modules de structures affines pour lesquelles la forme de contact invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg induit une forme de contact affine. Le groupe $SL^{\pm}(2,\mathbb{Z})$ agit sur ces modules. Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Auslander et Markus [1] qui ont obtenu des modules de structures de Lorentz plates avec une action du groupe $SL^{\pm}(2,\mathbb{Z})$.

Théorème 2. [5, 6] *Toute variété de Darboux compacte complète de dimension trois est équivalente à l'une des variétés suivantes (k étant un entier positif non nul et u, v, w, des nombres réels, $w \neq 0$):*
i) Les quotients $M_k^1(u,v,w) = \mathbb{R}^3/\Gamma_k^1(u,v,w)$ où $\Gamma_k^1(u,v,w)$ est le sous-groupe de $\mathbb{G}$ engendré par les éléments

$$U = (1,1,u,0),\ V = (1,v,kw+uv,0) \text{ et } W = (1,0,0,w).$$

ii) Les quotients $M_k^2(u,v,w) = \mathbb{R}^3/\Gamma_k^2(u,v,w)$ où $\Gamma_k^2(u,v,w)$ est le sous-groupe de $\mathbb{G}$ engendré par les éléments

$$U = (1,1,u,0),\ V = (1,v,2kw+uv) \text{ et } W = (-1,u',v',w')$$

avec $u' = v(u-t)/(2kw)$, $v' = ut(1-v)/(2kw)$, *et* $w' = (w - u'v')/2$.

Preuve. Soit Γ le groupe fondamental d'une variété de Darboux compacte et complète. Comme Γ est proprement discontinu et à quotient compact l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments $(1, a, b, c)$ de Γ_0 tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ est non vide et contient des plus petits éléments (c'est à dire que $a^2 + b^2$ prend la plus petite valeur). Notons par $U = (1, a, b, c)$ l'un d' eux. Par ailleurs l'ensemble $\mathcal{V}$ des éléments $(1, a', b', c')$ tels que $ab' - ba' \neq 0$ est non vide à cause de la compacité et contient des plus petits éléments à cause de la discontinuité. Notons par $V = (1, a', b', c')$ l'un d'eux. Comme $ab' - ba' \neq 0$, a et a' ne s'annulent pas simultanément. Supposons donc que $a \neq 0$ et considérons la transformation $S = (a, (ac' - ca')/(ba' - ab'), (bc' - cb')/(ba' - ab'), 0)$ de $\mathbb{G}$. On a :

$$S^{-1}US = (1, 1, ab, 0) \text{ et } S^{-1}VS = (1, a'/a, ab', 0)$$

Par conséquent le groupe Γ est conjugué par S à un groupe pour lequel les éléments U et V considérés ici s'écrivent $U = (1, 1, u, 0)$ et $V = (1, v, t, 0)$ avec $t - uv \neq 0$. L'ensemble $\mathcal{W}$ des élements $(1, 0, 0, c)$ de Γ tels que $c \neq 0$ est non vide car $UVU^{-1}V^{-1} = (1, 0, 0, uv - t)$. A cause de la discontinuité il contient un plus petit élément noté $W = (1, 0, 0, w)$, c'est à dire que $|w| \leq |c|$ pour tout élément $(1, 0, 0, c)$ de $\mathcal{W}$. Il suffit de montrer que U, V et W engendrent $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathbb{H}$. On montre d'abord que W engendre le centre Λ de Γ_0. En effet soit $T = (1, 0, 0, t)$ un élément de Λ. Considérons la suite

$$U_n = T^n W^{m(n)} = (1, 0, 0, nt + m(n)w)$$

où $m(n)$ désigne la partie entière de $-nt/w$. Si tous les éléments U_n sont distincts, l'orbite de l'origine par U_n possède un point d'accumulation, et l'action de Γ n'est pas discontinue. Par conséquent, il existe des entiers n et p tels que $T^n W^{m(n)} = T^p W^{m(p)}$, d'où $T^{n-p} = W^{m(p)-m(n)}$. Comme Λ est abelien, sans éléments d'ordre fini, il existe un élément C de Λ tel que $T = C^a$ et $W = C^b$. On doit avoir $b = \pm 1$, donc $T = W^{ab}$. Par conséquent Λ est engendré par W. Ainsi $UVU^{-1}V^{-1} = (1, 0, 0, uv - t)$ est une puissance de W. On choisit W (quitte à le remplacer par W^{-1}) de telle sorte que $UVU^{-1}V^{-1} = W^{-k}$, où k est un entier positif. On en déduit que $t = kw + uv$. Les éléments U, V et W engendrent le groupe $\Gamma_k(u, v, w)$. Ainsi on a l'inclusion $\Gamma_k(u, v, w) \subset \Gamma_0$. Le choix des générateurs U, V implique que $\Gamma_k(u, v, w) = \Gamma_0$. Lorsque Γ n'est pas égal à Γ_0 on considère un élément $A = (-1, a, b, c)$ dans $\Gamma \setminus \Gamma_0$ et on constate que $A^{-1}UAU = (1, 0, 0, u + au - b)$, $A^{-1}VAV = (1, 0, 0, vt + at - bu)$ et $A^2 = (1, 0, 0, at + 2c)$ sont dans le centre de Γ_0 donc ils sont engendrés par W. Par conséquent il existe des entiers n_1, n_2 et n_3 tels que

$$a = \frac{v(u-t)}{kw} + \frac{n_2 - n_1 v}{k},\ b = \frac{ut(1-v)}{kw} + \frac{n_2 u - n_1 t}{k},\ c = \frac{n_3 w - ab}{2}.$$

Remarquons que n_3 est impair ; en effet si $n_3 = 2l$, alors l'élément $A' = AW^{-l} = (-1, a, b, c - lw)$ aurait un point fixe car $ab + 2(c - lw) = 0$ (voir Proposition 2).

Ainsi $n_3 = 2l + 1$. Notons dans la suite par A l'élément AW^{-l}. Remarquons aussi que k, n_1 et n_2 sont pairs. En effet l'élément

$$V^n U^m A^{2p+1} = (-1, a + m + nv, b + mu + nt, r)$$

où $r = pw - mnuv - m(m-1)u/2 - n(n-1)vt/2 + c - b(m + nv)$ n'a pas de points fixes, c'est à dire (voir Proposition 2)

$$(a + m + nv)(b + mu + nt) + 2r = (2p + 1 + mn_1 + nn_2 + mnk)w \neq 0$$

pour tous entiers m, n et p. Par conséquent n_1, n_2 et k sont paires. Notons dans la suite ces entiers par $2n_1$, $2n_2$ et $2k$. Considérons alors la transformation $S = (1, (n_2 - n_1 v)/(2k), (n_2 u - n_1 t)/(2k), 0)$. On a :

$$S^{-1}USW^{-n_1} = (1, 1, u, 0),\ S^{-1}VSW^{-n_2} = (1, v, t, 0),\ S^{-1}AS = (-1, u', v', w')$$

où $u' = v(u - t)/(2kw)$, $v' = ut(1 - v)/(2kw)$, et $w' = (w - u'v')/2$. Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Théorème 3. [5, 6] *Les variétés $M_k^i(u, v, w)$ et $M_k^i(u', v', w')$ $i = 1$ ou 2, sont :*
(i) affinement isomorphes si et seulement si il existe des entiers a, b, c, d tels que $ad - bc = \pm 1$, $cv + d \neq 0$ et :

$$\frac{u'}{v'} = \frac{(cv + d)^2}{ad - bc}\frac{u}{v} + ikc\frac{cv + d}{ad - bc} \text{ et } v' = \frac{av + b}{cv + d}$$

(ii) équivalentes si de plus $w' = (ad - bc)w$; dans ce cas on a alors :

$$u' = (cv + d)^2 u + ikcw(cv + d).$$

Preuve. Dire que les variétés $M_k^i(u, v, w)$ et $M_k^i(u', v', w')$ sont affinement isomorphes équivaut à dire que les groupes fondamentaux $\Gamma_k^i(u, v, w)$ et $\Gamma_k^i(u', v', w')$ sont conjugués par une transformation affine de $\mathbb{R}^3$. Elles sont équivalentes si de plus la conjugaison est dans le groupe $\mathbb{G}$. Démontrons le théorème pour $i = 1$ (le calcul est analogue lorsque $i = 2$). Supposons que $\Gamma = \Gamma_k^1(u, v, w)$ et $\Gamma' = \Gamma_k^1(u', v', w')$ sont conjugués par la transformation affine T donnée par (2), où tous les coeffícents sont des scalaires. Par conséquent pour tout élément

$$g = U^m V^n W^p = (1, m + nv, mu + nt, pw - g(m, n))$$

de Γ, où $t = kw + uv$ et $g(m, n) = mnuv + m(m-1)u/2 + n(n-1)vt/2$, il existe un élément

$$g' = U'^{m'} V'^{n'} W'^{p'} = (1, m' + n'v', m'u' + n't', p'w' - g'(m', n'))$$

de Γ', où $t' = kw' + u'v'$ et $g'(m', n') = m'n'u'v' + m'(m'-1)u'/2 + n'(n'-1)v't'/2$ tel que $Tg = g'T$ et réciproquement, pour tout $g' \in \Gamma'$ il existe $g \in \Gamma$ tel que $g'T = Tg$. Ces conditions conduisent au système d'équations :

$$\alpha_{13}(m + nv) = \alpha_{23}(m + nv) = \alpha_{21}(m' + n'v') = \alpha_{23}(m' + n'v') = 0 \qquad (7)$$

$$\alpha_{33}(m+nv) = \alpha_{22}(m'+n'v') \tag{8}$$

$$\alpha_{11}(m+nv) + \alpha_{12}(mu+nt) + \alpha_{13}(pw-g(m,n)) = m'+n'v' \tag{9}$$

$$\alpha_{21}(m+nv) + \alpha_{22}(mu+nt) + \alpha_{23}(pw-g(m,n)) = m'u'+n't' \tag{10}$$

$$\alpha_{31}(m+nv)+\alpha_{32}(mu+nt)+\alpha_{33}(pw-g(m,n)) = p'w'-g'(m',n')-b_2(m'+n'v') \tag{11}$$

Les équations (7) impliquent que $\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{21} = 0$. Par conséquent $\alpha_{22} \neq 0$. De (8) et (9) on déduit que

$$\alpha_{11}\alpha_{22}(m+nv) + \alpha_{12}\alpha_{22}(mu+nt) = \alpha_{33}(m+nv).$$

Comme cette relation est satisfaite pour tous les entiers m et n on a

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{22}u = 0 \text{ et } (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{33})v + \alpha_{12}\alpha_{22}t = 0.$$

Or $t - uv = kw \neq 0$ donc $\alpha_{12} = 0$ et $\alpha_{33} = \alpha_{11}\alpha_{22}$. Les équations (9) et (10) s'écrivent alors

$$\alpha_{11}(m+nv) = m'+n'v' \text{ et } \alpha_{22}(mu+nt) = m'u'+n't'. \tag{12}$$

On en déduit que $m' = -am+bn$ et $n' = cm-nd$ avec

$$a = \frac{\alpha_{22}uv' - \alpha_{11}t'}{kw'}, \quad b = \frac{\alpha_{11}vt' - \alpha_{22}v't}{kw'}, \quad d = \frac{\alpha_{11}vu' - \alpha_{22}t'}{kw'},$$

$$c = \frac{\alpha_{22}u - \alpha_{11}u'}{kw'}. \tag{13}$$

Les coefficients a, b, c et d doivent être entiers. On a alors

$$\alpha_{11} = cv' - a \quad \text{et} \quad \alpha_{22} = -\frac{w'}{w}(cv+d) \tag{14}$$

Par conséquent $cv+d \neq 0$ et on a

$$v' = \frac{av+b}{cv+d} \quad \text{et} \quad \alpha_{11} = -\frac{ad-bc}{cv+d}. \tag{15}$$

Par suite $ad-bc \neq 0$ et si on remplace α_{11} et α_{22} dans (13) par les expressions (14) et (15) on obtient

$$\frac{u'}{v'} = \frac{(cv+d)^2}{ad-bc}\frac{u}{v} + kc\frac{cv+d}{ad-bc}.$$

Par ailleurs en résolvant de la même manière le système (12) en les inconnues m et n on montre que $ad-bc$ est l'inverse d'un entier, donc $ad-bc = \pm 1$. Pour terminer la démonstration il suffit d'observer que l'équation (11) est satisfaite par un choix convenable des coefficients α_{31}, α_{32} et b_2 de la transformation T. Prenons $\alpha_{31}=0$, $\alpha_{32}=(A-Bv)/(kw)$ et $\alpha_{11}b_2=(Bt-Au)/(kw)$, avec

$$A=\frac{w'}{2w}(ad-bc)\left[(bc^2-a^2d-1)vt+2bd(c-a)uv+bd(d-b)u\right],$$

$$B=\frac{w'}{2w}(ad-bc)\left[ac(a-c)vt+2ac(d-b)uv+(b^2c-ad^2-1)u\right].$$

Alors (11) est satisfaite pour $p'=(ad-bc)[p+k(cbm'n'+cdm'(m'-1)/2+abn'(n'-1)/2]$, où rappelons-le $m'=-am+bn$ et $n'=cm-dn$. Par conséquent Γ et Γ' sont bien conjugués par T. De plus, pour l'équivalence la conjugaison T doit appartenir au groupe $\mathbb{G}$. On prend alors $b_1=-\alpha_{32}/\alpha_{22}$ et $\alpha_{33}=1$. Comme $\alpha_{33}=(ad-bc)w'/w$, on en déduit que $w'=(ad-bc)w$. $\square$

7 Variétés de contact localement affines

On appelle variété de contact localement affine une variété localement affine munie d'une forme de contact qui s'exprime avec des coefficients affines dans les cartes de l'atlas affine. Comme la forme de Darboux (1) est à coefficients affines, les variétés de Darboux sont des variétés de contact localement affines. Pour étudier les variétés de contact localement affines, il convient tout d'abord de classifier les formes de contact affines de $\mathbb{R}^{2n+1}$ par le groupe affine, puis de déterminer le groupe des invariants affines de chaque classe. Les variétés de contact localement affines s'obtiennent alors comme quotients de $\mathbb{R}^{2n+1}$ par les sous-groupe discrets de ces groupes d'invariants affines. On montre [6, 7] que toute forme de contact affine dans $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$\omega=(p_{ij}x^j+q_i)dx^i \quad (i,j=1,\cdots,2n+1)$$

est équivalente par le groupe affine à une forme du type

$$\eta=\sum_{i=1}^{n}(x^i dx^{n+i}-x^{n+i}dx^i)+d(x^{2n+1}+q) \tag{16}$$

où q est une forme quadratique en $x^1,\cdots,x^{2n}$. Deux formes de Pfaff de ce type sont équivalentes si et seulement si les formes quadratiques correspondantes s'échangent par une transformation symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$. Le groupe des invariants affines de la forme (16) est le groupe des transformations affines

$$X\mapsto\begin{pmatrix} A & 0\\ C & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} B\\ b\end{pmatrix}, \quad \text{où } X={}^t(x^1,\cdots,x^{2n+1})$$

telles que $B\in\mathbb{R}^{2n}$, $b\in\mathbb{R}$, $C={}^tB(J-M)A$ et $A\in Sp(2n,\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAMA=M$, où M est la matrice symétrique d'ordre $2n$ correspondant à la forme quadratique q et $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. La dimension de ce groupe est comprise entre $3n+1$ et $(n+1)(2n+1)$ (atteinte pour $q=0$). On observe aussi que le sous-groupe formés par les éléments pour lesquels A est la matrice identité est isomorphe au groupe de Heisenberg, de sorte que sur les nilvariétés de Heisenberg il y a d'autres structures de variétés de contact localement affines que celles qui proviennent de la forme de Darboux. Comme les groupes d'invariants affines peuvent être très gros, on connait plusieurs exemples (voir [5]) de variétés de contact localement affines qui ne sont pas des variétés de Darboux mais on ne dispose pas de la classification des variétés de contact localement affines, même en dimension 3.

References

[1] L. Auslander and M. Markus, Flat-Lorentz 3 manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* 30, 1959.

[2] Y. Carrière, Autour de la conjecture de Markus sur les variétés affines, *Invent. Math.* 95, 1989, pp. 615-628.

[3] D. Fried and W. Goldman, Three-dimensional affine crystallographic groups, *Adv. Math.* 47, 1983, pp. 1-49.

[4] L. Markus, *Cosmological models in differential geometry*, mimeographed notes, University of Minnesota, 1962.

[5] T. Sari, *Variétés de contact localement affines*, Thèse de 3ème cycle, Publication IRMA 71/T3-17, Strasbourg, 1979.

[6] T. Sari, Sur les variétés de contact localement affines, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I* 292, 1981, pp. 809-812.

[7] T. Sari, Sur les variétés de contact affines plates, *Séminaire de Géométrie et de Topologie Différentielle de Montpellier 91-92*, Publication mathématique de l' Univ. de Montpellier, 1993, pp. 125-158.

[8] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle* Vol. 3, Bucarest Editions de l'Académie et Paris Gauthier-Villard, 1964.

[9] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle* Vol. 4, Bucarest Editions de l'Académie, 1975.