Opérades Lie-admissibles

Elisabeth REMM

Laboratoire de Mathématiques et Applications, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse cedex, France
E-mail : E.Remm@uha.fr

Abstract. The aim of this paper is to present remarkable classes of Lie-admissible algebras containing in particular the associative algebras, the Vinberg and pre-Lie algebras. We determine the associated operads and their dual operads.

Résumé. Le but de cette note est de présenter des classes remarquables d'algèbres Lie-admissibles qui contiennent entre autres les algèbres associatives, de Vinberg et pré-Lie et de déterminer leurs opérades associées et les opérades duales.

1. Algèbres Lie-Admissibles.

Soient (A,μ) une $\mathbb{K}$-algèbre sur un corps commutatif de caractéristique 0. Notons $a_\mu : A^{\otimes 3} \to A$ l'associateur de la loi μ :

$$a_\mu (X_1, X_2, X_3) = \mu (\mu (X_1, X_2), X_3) - \mu (X_1, \mu (X_2, X_3)).$$

Soit $\sum_n$ le groupe symétrique d'ordre n. Pour tout $\sigma \in \sum_3$, on pose

$$\sigma (X_1, X_2, X_3) = \left(X_{\sigma^{-1}(1)}, X_{\sigma^{-1}(2)}, X_{\sigma^{-1}(3)}\right).$$

DEFINITION 1 : L'algèbre $\mathcal{A} = (A,\mu)$ est dite Lie-admissible (cf [1]) si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma \in \sum_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma = 0.$$

Soit μ une loi d'algèbre Lie-admissible; alors

$$[X,Y]_\mu := \mu (X,Y) - \mu (Y,X)$$

est une loi d'algèbre de Lie. Si $\mathcal{A} = (A,\mu)$ est Lie-admissible, on notera $\mathcal{A}_L = (A, [,]_\mu)$ l'algèbre de Lie ainsi définie.

Remarque. Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une algèbre Lie-admissible $\mathcal{A} = (A,\mu)$ telle que $\mathfrak{g} = \mathcal{A}_L$. En effet $\mu(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]$ est une loi Lie-admissible vérifiant la condition demandée. Notons également que dans le cas de la dimension finie, la dérivée covariante ([6]) d'une connection de Levi Civita associée à une forme quadratique définie positive détermine également une loi Lie-admissible.

2. Classes d'algèbres Lie-admissibles.

2.1. Algèbres G_i-associatives.

Notons $G_1 = \{Id\}$, $G_2 = \{Id, \tau_{12}\}$, $G_3 = \{Id, \tau_{23}\}$, $G_4 = \{Id, \tau_{13}\}$, $G_5 = \{Id, 3 - cycles\} = \mathcal{A}_3$, et $G_6 = \sum_3$ les différents sous-groupes de $\sum_3$.

DEFINITION 2 : Une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A} = (A,\mu)$ est dite G_i-associative si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma \in G_i} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma = 0. \qquad (*)$$

Notons qu'une algèbre (A,μ) vérifiant $(*)$ est nécessairement Lie-admissible.

2.2. Description.

a) $G_1 = \{Id\}$. Les algèbres correspondantes sont les algèbres associatives.
b) $G_2 = \{Id, \tau_{12}\}$. La relation $(*)$ s'écrit

$$\mu(\mu(X_1,X_2),X_3) - \mu(X_1,\mu(X_2,X_3)) - \mu(\mu(X_2,X_1),X_3) + \mu(X_2,\mu(X_1,X_3)) = 0$$

Les algèbres G_2-associatives sont les algèbres de Vinberg (appelées aussi algèbres symétriques-gauche) [10] . Si $\mathcal{A}$ est de dimension finie, l'algèbre de Lie associée $\mathcal{A}_L$ est munie d'une structure affine.
c) $G_3 = \{Id, \tau_{23}\}$ Les algèbres correspondantes sont les algèbres pré-Lie (voir [5]). Ces algèbres sont aussi appelées symétriques-droite. Notons que si la loi $x.y$ est pré-Lie, alors la loi $x \odot y = y.x$ est de Vinberg.
Les algèbres G_4 et G_5-associatives ne semblent pas avoir fait l'objet d'études particulières. Notons que si μ est G_5-associative, elle vérifie :

$$\begin{array}{l} \mu(\mu(X_1,X_2),X_3) - \mu(X_1,\mu(X_2,X_3)) + \mu(\mu(X_2,X_3),X_1) \\ -\mu(X_2,\mu(X_3,X_1)) + \mu(\mu(X_3,X_1),X_2) - \mu(X_3,\mu(X_1,X_2)) = 0. \end{array}$$

Si l'on suppose de plus que μ est anticommutative$\left([,]_\mu = 2\mu\right)$ la relation ci-dessus est la condition de Jacobi de la loi d'algèbre de Lie μ. Dans l'optique d'une description d'une version "non-commutative" des algèbres de Lie donnée par exemple par les algèbres de Leibniz [8], les algèbres G_5-associatives peuvent être également considérées comme des candidats naturels.

3. Opérades associées aux algèbres G_i-associatives

Soit $\mathbb{K}[\sum_n]$ la $\mathbb{K}$-algèbre du groupe symétrique $\sum_n$. Une opérade $\mathcal{P}$ est définie par une suite d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}(n)$, $n \geq 1$ telle que $\mathcal{P}(n)$ soit un module sur $\mathbb{K}[\sum_n]$ et par des applications de composition

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1) \qquad i = 1, ..., n$$

satisfaisant des propriétés "associatives", les axiomes de May [9].

Tout $\mathbb{K}[\sum_n]$-module E engendre une opérade libre notée $\mathcal{F}(E)$ ([5]) vérifiant $\mathcal{F}(E)(1) = \mathbb{K}$, $\mathcal{F}(E)(2) = E$. En particulier si $E = \mathbb{K}[\sum_2]$, le module libre $\mathcal{F}(E)(n)$ admet comme base les "produits parenthésés" de n variables indexées par $\{1, 2, ..., n\}$.

Soit E un $\mathbb{K}[\sum_2]$-module et R un $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$. On note $\mathcal{R}$ l'idéal engendré par R, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}(E)$ tels que $\mathcal{I}(1) = \{0\}$, $\mathcal{I}(2) = \{0\}$ et $\mathcal{I}(3) = R$.

On appelle opérade binaire quadratique engendrée par E et par les relations R l'opérade $\mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$, notée également $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}$, définie par :

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)(n) = \mathcal{F}(E)(n)/\mathcal{R}(n).$$

Son opérade quadratique duale est définie par

$$\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E^\vee, R^\perp)$$

où $E^\vee$ est le dual de E muni de l'action de $\sum_n$ duale tensorisée par la représentation signature.

3.1. L'opérade $\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm$

Considérons R_6 le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par le vecteur

$$\begin{aligned} u_6 &= x_1.(x_2.x_3)+x_2.(x_3.x_1)+x_3.(x_1.x_2)-x_2.(x_1.x_3)-x_3.(x_2.x_1)-x_1.(x_3.x_2) \\ &\quad -(x_1.x_2).x_3-(x_2.x_3).x_1-(x_3.x_1).x_2+(x_2.x_1).x_3+(x_3.x_2).x_1+(x_1.x_3).x_2 \end{aligned}$$

et soit $\mathcal{R}_6$ l'idéal de $\mathcal{F}(E)$ engendré par R_6.

DEFINITION 3 : L'opérade Lie-admissible, notée $\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm$ est l'opérade binaire quadratique

$$\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6.$$

3.2. On peut également définir les opérades binaires quadratiques associées à chacune des algèbres G_i-associatives, $(i=1,...,5)$:
$i=1$: $\mathcal{A}ss=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_1$ où R_1 est le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module engendré par les vecteurs

$$x_1.(x_2.x_3)-(x_1.x_2).x_3,$$

$\mathcal{A}ss$ est l'opérade des algèbres associatives.

$i=2$: $\mathcal{V}inb=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_2$ avec R_2 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)-x_2.(x_1.x_3)-(x_1.x_2).x_3+(x_2.x_1).x_3,$$

$i=3$: $\mathcal{P}re\mathcal{L}ie=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_3$ avec R_3 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)-x_1.(x_3.x_2)-(x_1.x_2).x_3+(x_1.x_3).x_2,$$

$i=4$: $G_4-\mathcal{A}ss{=}\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_4$ avec R_4 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)-x_3.(x_2.x_1)-(x_1.x_2).x_3+(x_3.x_2).x_1,$$

$i=5$: $G_5-\mathcal{A}ss{=}\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_5$ avec R_5 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)+x_2.(x_3.x_1)+x_3.(x_1.x_2)-(x_1.x_2).x_3-(x_2.x_3).x_1-(x_3.x_1).x_2.$$

4. Opérades duales associées aux algèbres G_i-associatives

Considérons le produit scalaire sur $\mathcal{F}(E)(3)$ pour lequel les vecteurs de base sont orthogonaux et tel que

$$< \ x_i.(x_j.x_k),x_i.(x_j.x_k)>=sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$$

$$< \ (x_i.x_j).x_k,(x_i.x_j).x_k>=-sgn\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$$

où $sgn(\sigma)=(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ est la signature de σ.

Soit R_6 le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module déterminant l'opérade $\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm$. L'orthogonal par rapport au produit scalaire défini ci-dessus, $R_6^{\perp}$, est de dimension 11. Soit $R_6{}'$ le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les relations

$$\begin{array}{l}(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}),\\ (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)})x_{\sigma(2)},\\ (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)})x_{\sigma(3)}.\end{array}$$

Alors $\dim R_6'=11$ et $<u,v>=0$ pour tout $v\in R_6'$, u étant le vecteur générateur de R_6. Ceci implique que $R_6'\simeq R_6^{\perp}$ et par définition l'opérade duale de $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6=\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm$ notée $\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm^!$ est par définition l'opérade binaire quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^{\perp}$.

PROPOSITION 1. *Une algèbre A sur l'opérade $\mathcal{L}ie\mathcal{A}dm^!$ est une algèbre associative qui est abélienne d'ordre 3, c'est-à-dire vérifiant*

$$abc = acb = bac$$

pour tout $a, b, c \in A$.

Les opérades duales $\mathcal{A}ss^!$ et $\mathcal{P}reLie^!$ ont été déterminées dans [4] et [3]. La première étant autoduale vérifie $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$ et la deuxième correspond à l'opérade $\mathcal{P}erm$.

PROPOSITION 2. *Les opérades duales de $\mathcal{V}inb$, $G_4 - \mathcal{A}ss$, $G_5 - \mathcal{A}ss$ sont les opérades quadratiques dont les algèbres correspondantes sont associatives et vérifient respectivement :*
- *pour $\mathcal{V}inb^!$: $abc = bac$.*
- *pour $G_4 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = cba$.*
- *pour $G_5 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = bca = cab$.*

Esquisse de preuve. $R_2^{\perp}$ est le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned}&(x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3), (x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_1.x_3)),\\&(x_1.(x_2.x_3) - (x_2.x_1).x_3)\end{aligned}$$

pour tout $x_1, x_2, x_3 \in E$.

De même

$$\begin{aligned}&R_4^{\perp} = \langle (x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3), (x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_2.x_1)),\\&x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_2).x_1) \rangle\\&R_5^{\perp} = \langle (x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3), (x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_3.x_1)),\\&x_1.(x_2.x_3) - (x_2.x_3).x_1), (x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_1.x_2)), (x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_1).x_2) \rangle\end{aligned}$$

et $\dim R_4^{\perp} = 9$, $\dim R_5^{\perp} = 10$. Il suffit ensuite de remarquer que $(\mathcal{F}(E)/\mathcal{R})^!$ est par définition l'opérade binaire quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^{\perp}$ d'où le résultat. ■

5. Dualité de Koszul des opérades provenant des algèbres G_i-associatives.

Rappelons qu'une opérade quadratique $\mathcal{P}$ est dite de Koszul si pour toute $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ on a $H_i^{\mathcal{P}}(F_{\mathcal{P}}(V)) = 0, \quad i > 0$.

PROPOSITION 3. *Les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{V}inb$, $\mathcal{P}reLie$ sont de Koszul. Les opérades $G_4 - \mathcal{A}ss$ et $G_5 - \mathcal{A}ss$ ne sont pas de Koszul.*

Preuve. En effet d'après [4] et [3] les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{P}reLie$ sont de Koszul. Compte tenu des relations liant $\mathcal{P}reLie$ et $\mathcal{V}inb$, cette dernière est aussi de Koszul. Pour les deux autres, nous allons montrer qu'elles ne sont pas de Koszul en utilisant leur série de Poincaré et le critère dû à Ginzburg-Kapranov [4]. La série est définie, pour une opérade $\mathcal{P}$, par

$$g_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n dim \mathcal{P}^+(n) \frac{x^n}{n!},$$

où $\mathcal{P}^+(n) = \mathcal{P}(n)$ pour $n \neq 1$ et $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{P}(1)$. Les séries de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ et de sa duale $\mathcal{P}^!$ sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$g_{\mathcal{P}}(g_{\mathcal{P}^!}(x)) = x.$$

On a

$$g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss}(x) = -x+x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{59}{4!}x^4+\ldots \quad , \quad g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss^!}(x) = -x+x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$$

$$g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss}(x) = -x+x^2-\frac{10}{3!}x^3+\frac{39}{4!}x^4+\ldots \quad , \quad g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss^!}(x) = x+x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\ldots$$

et ces deux séries ne sont pas respectivement inverses l'une de l'autre. Ces opérades ne sont pas de Koszul d'après [4].

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Albert A.A., On the power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948) 552–593.

[2] Chapoton F., Algèbres pré-Lie et algèbres de Hopf liées à la renormalisation, Note aux C.R.A.Sc. Paris t.332 Série 1 (2001) 681-684.

[3] Chapoton F., Livernet M., Pre-Lie algebra and the rooted trees operad, Internat. Math. Res. Notices 8 (2001) 395-408.

[4] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads, Duke Math Journal 76,1 (1994) 203-272.

[5] Gerstenhaber M., The cohomology structure of an associative ring, Ann of math.(2) 78 (1963) 267-288.

[6] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, Vol.I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[7] Loday J.L., La renaissance des opérades, Séminaire Bourbaki 1994/95. Astérisque 237 (1996) 47-74.

[8] Loday J.L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, Ens. Math. 39 (1993) 269-293.

[9] May J.P., Geometry of iterated loop spaces, Lect. Notes in Math. 271, Springer-Verlag, 1972.

[10] Nijenhuis A., Sur une classe de propriétés communes a quelques types différents d'algèbres, Enseignement math.(2) 14 (1968) 225-277.

[11] Remm E., Structures affines sur les algèbres de Lie et opérades Lie-admissibles, Thèse, Mulhouse 2001.