Opérades Lie-admissibles

Elisabeth REMM

Laboratoire de Mathématiques et Applications, 4, rue des Frères Lumières, 68093 Mulhouse cedex, France
E-mail : E.Remm@uha.fr

Abstract. The aim of this paper is to present remarkable classes of Lie admissible algebras containing in particular the associative algebras, the Vinberg and pre-Lie algebras. We determine the associated operads and their dual operads. We introduce a notion of admissible cohomology for a Lie algebra and we deduce some conditions for deform a Lie algebra in a Vinberg algebra into the variety of Lie admissible laws.

Résumé. Le but de cette note est de présenter des classes remarquables d'algèbres Lie-admissibles qui contiennent entre autres les algèbres associatives, de Vinberg et pré-Lie et de déterminer leurs opérades associées et les opérades duales. On introduit une notion de cohomologie admissible d'une algèbre de Lie et on en déduit une condition pour qu'une algèbre de Lie se déforme, dans la variété des Lie-admissibles, dans une algèbre de Vinberg.

1. **Algèbres Lie-Admissibles.** Soient (A,μ) une $\mathbb{K}$-algèbre sur un corps commutatif de caractéristique 0. Notons $a_\mu : A^{\otimes 3} \rightarrow A$ l'associateur de la loi μ :

$$a_\mu\left(X_1,X_2,X_3\right)=\mu\left(\mu\left(X_1,X_2\right),X_3\right)-\mu\left(X_1,\mu\left(X_2,X_3\right)\right).$$

Soit $\sum_n$ le groupe symétrique d'ordre n. Pour tout $\sigma\in\sum_3$, on pose

$$a_\mu\circ\sigma\left(X_1,X_2,X_3\right)=a_\mu\left(X_{\sigma^{-1}(1)},X_{\sigma^{-1}(2)},X_{\sigma^{-1}(3)}\right).$$

DEFINITION 1: L'algèbre $\mathcal{A}=(A,\mu)$ est dite Lie-admissible (cf [A]) si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma\in\sum_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\,a_\mu\circ\sigma=0.$$

Soit μ une loi d'algèbre Lie-admissible; alors

$$[X,Y]_\mu:=\mu\left(X,Y\right)-\mu\left(Y,X\right)$$

est une loi d'algèbre de Lie. Si $\mathcal{A}=(A,\mu)$ est Lie-admissible, on notera $\mathcal{A}_L=(A,[,]_\mu)$ l'algèbre de Lie ainsi définie.

Remarque: Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une algèbre Lie-admissible $\mathcal{A}=(A,\mu)$ telle que $\mathfrak{g}=\mathcal{A}_L=\left(A,[,]_\mu\right)$. En effet $X.Y=\frac{1}{2}[X,Y]$ est une loi Lie-admissible vérifiant la condition demandée. Notons également que dans le cas de la dimension finie, la dérivée covariante d'une connection de Levi Civita associée à une forme quadratique définie positive détermine également une loi Lie-admissible.

2. **Classes d'algèbres Lie-admissibles.**

2.1. Algèbres G_i-associatives.

Notons $G_1=\{Id\}$, $G_2=\{Id,\tau_{12}\}$, $G_3=\{Id,\tau_{23}\}$, $G_4=\{Id,\tau_{13}\}$, $G_5=\{Id,3-cycles\}=\mathcal{A}_3$, et $G_6=\sum_3$ les différents sous-groupes de $\sum_3$.

DEFINITION 2 : Une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}=(A,\mu)$ est dite G_i-associative si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma\in G_i}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\,a_\mu\circ\sigma=0. \qquad (*)$$

Notons qu'une algèbre(A,μ) vérifiant $(*)$ est nécessairement Lie-admissible.

2.2. Description.
a) $G_1=\{Id\}$. Les algèbres correspondantes sont les algèbres associatives.
b) $G_2=\{Id,\tau_{12}\}$. La relation $(*)$ s'écrit

$$\mu\left(\mu\left(X_1,X_2\right),X_3\right)-\mu\left(X_1,\mu\left(X_2,X_3\right)\right)-\mu\left(\mu\left(X_2,X_1\right),X_3\right)+\mu\left(X_2,\mu\left(X_1,X_3\right)\right)=0$$

Les algèbre G_2-associatives sont les algèbres de Vinberg (appelées aussi algèbres symétriques gauche) . Si $\mathcal{A}$ est de dimension finie, l'algèbre de Lie associée $\mathcal{A}_L$ est munie d'une structure affine.
c) $G_3=\{Id,\tau_{23}\}$ Les algèbres correspondantes sont les algèbres Pré-Lie (voir [C]). Ces algèbres sont aussi appelées symétriques-droite. Notons que si la loi $x.y$ est de Pré-Lie, alors la loi $x\odot y=y.x$ est de Vinberg.
Les algèbres G_4 et G_5-associatives ne semblent pas avoir fait l'objet d'études particulières. Notons que si μ est G_5-associative, elle vérifie :

$$\begin{aligned}&\mu\left(\mu\left(X_1,X_2\right),X_3\right)-\mu\left(X_1,\mu\left(X_2,X_3\right)\right)+\mu\left(\mu\left(X_2,X_3\right),X_1\right)\\&-\mu\left(X_2,\mu\left(X_3,X_1\right)\right)+\mu\left(\mu\left(X_3,X_1\right),X_2\right)-\mu\left(X_3,\mu\left(X_1,X_2\right)\right)=0.\end{aligned}$$

Si l'on suppose de plus que μ est anticommutative$\left([,]_\mu=2\mu\right)$ la relation ci-dessus est la condition de Jacobi de la loi d'algèbre de Lie μ. Dans l'optique d'une description d'une version "non-commutative" des algèbres de Lie donnée par exemple par les algèbres de Leibniz [L2], les algèbres G_5-associatives peuvent être également considérées comme des candidats naturels.

3. **Opérades associées aux algèbres G_i-associatives**

Soit $E=\mathbb{K}[\sum_2]$-module et $\mathcal{F}(E)$ l'opérade libre engendrée par E. Une base du module libre $\mathcal{F}(E)(n)$, est donné par les "produits parenthésés" de n variables indexées par $\{1,2,...,n\}$.

3.1. L'opérade $\mathcal{A}dm$

Considérons R_6 le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par le vecteur

$$\begin{aligned}u_6\ =\ &x_1.\left(x_2.x_3\right)+x_2.\left(x_3.x_1\right)+x_3.\left(x_1.x_2\right)-x_2.\left(x_1.x_3\right)-x_3.\left(x_2.x_1\right)-x_1.\left(x_3.x_2\right)\\&-\left(x_1.x_2\right).x_3-\left(x_2.x_3\right).x_1-\left(x_3.x_1\right).x_2+\left(x_2.x_1\right).x_3+\left(x_3.x_2\right).x_1+\left(x_1.x_3\right).x_2\end{aligned}$$

et soit $\mathcal{R}_6$ l'idéal de $\mathcal{F}(E)$ engendré par R_6.

DEFINITION 3 : L'opérade Lie-admissible, notée $\mathcal{A}dm$ est l'opérade binaire quadratique

$$\mathcal{A}dm=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6.$$

3.2. On peut également définir les opérades quadratiques associées à chacune des algèbres G_i-associatives, $(i=1,...,5)$:
$i=1$: $\mathcal{A}ss=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_1$ où R_1 est le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module engendré par les vecteurs

$$x_1.\left(x_2.x_3\right)-\left(x_1.x_2\right).x_3,$$

$i=2$: $\mathcal{V}inb=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_2$ avec R_2 engendré par

$$x_1.\left(x_2.x_3\right)-x_2.\left(x_1.x_3\right)-\left(x_1.x_2\right).x_3+\left(x_2.x_1\right).x_3,$$

$i=3$: $\mathcal{P}r\acute{e}\mathcal{L}ie=\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_3$ avec R_3 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)-x_2.(x_1.x_3)-x_3.(x_2.x_1)+(x_3.x_2).x_1,$$

$i=4$: $G_4-\mathcal{A}ss$=$\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_4$ avec R_4 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)-x_3.(x_2.x_1)-x_1.(x_2.x_3)+(x_3.x_2).x_1,$$

$i=5$: $G_5-\mathcal{A}ss$=$\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_5$ avec R_5 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3)+x_2.(x_3.x_1)+x_3.(x_1.x_2)-(x_1.x_2).x_3-(x_2.x_3).x_1-(x_3.x_1).x_2.$$

4. Opérades duales associées aux algèbres G_i-associatives

Considérons le produit scalaire sur $\mathcal{F}(E)(3)$ pour lequel les vecteurs de base sont orthogonaux et tel que

$$< \ x_i.(x_j.x_k), x_i.(x_j.x_k) >= sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

$$< \ (x_i.x_j).x_k, (x_i.x_j).x_k >= -sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

où $sgn(\sigma)=(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ est la signature de σ Soit R_6 le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module déterminant l'opérade $\mathcal{A}dm$. L'orthogonal par rapport au produit scalaire défini ci-dessus, $R_6^{\perp}$, est de dimension 11. Soit $R_6{}'$ le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les relations

$$(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}), (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)})x_{\sigma(2)},$$
$$(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}-(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)})x_{\sigma(3)}.$$

Alors $\dim R_6'=11$ et $<u,v>=0$ pour tout $v\in R_6'$, u étant le vecteur générateur de R_6. Ceci implique que $R_6'\simeq R_6^{\perp}$ et par définition l'opérade duale de $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6=\mathcal{A}dm$ notée $\mathcal{A}dm^!$ correspond à l'opérade quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^{\perp}$.

PROPOSITION 1. *Une algèbre A sur l'opérade $\mathcal{A}dm^!$ est une algèbre associative qui est abélienne d'ordre 3 c'est à dire vérifiant*

$$abc=acb=bac$$

pour tout $a,b,c\in A$.

Les opérades duales $\mathcal{A}ss^!$ et $\mathcal{P}reLie^!$ ont été déterminées dans [G-K] et [C-L]. La première étant autoduale vérifie $\mathcal{A}ss^!=\mathcal{A}ss$ et la deuxième correspond à l'opérade $\mathcal{P}erm$.

PROPOSITION 2. *Les opérades duales de $\mathcal{V}inb$, $G_4-\mathcal{A}ss$, $G_5-\mathcal{A}ss$ sont les opérades quadratiques dont les algèbres correspondantes sont associatives et vérifient respectivement :*

- *pour $\mathcal{V}inb^!$: $abc=bac$.*
- *pour $G_4-\mathcal{A}ss^!$: $abc=-cba$.*
- *pour $G_5-\mathcal{A}ss^!$: $abc=bca=cab$.*

Esquisse de preuve. $R_2^{\perp}$ est le $\mathbb{K}[\sum_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les vecteurs

$$(x_1.(x_2.x_3)-(x_1.x_2).x_3), \ (x_1.(x_2.x_3)-x_2.(x_1.x_3)),$$
$$(x_1.(x_2.x_3)-(x_2.x_1).x_3)$$

pour tout $x_1,x_2,x_3\in E$.

De même

$$R_4^{\perp} = \langle (x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3), (x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_2.x_1)),$$
$$x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_2).x_1) \rangle$$
$$R_5^{\perp} = \langle (x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3), (x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_3.x_1)),$$
$$x_1.(x_2.x_3) - (x_2.x_3).x_1), (x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_1.x_2)), (x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_1).x_2) \rangle$$

et $\dim R_4^{\perp} = 9$, $\dim R_5^{\perp} = 10$. Il suffit ensuite de remarquer que $(\mathcal{F}(E)/\mathcal{R})^!$ correspond à l'opérade quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^{\perp}$ d'où le résultat. ■

5. **Dualité de Koszul des opérades provenant des algèbres G_i-associatives.**

Rappelons qu'une opérade quadratique $\mathcal{P}$ est dite de Koszul si pour tout $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_{\mathcal{P}}(V)$ on a $H_i^{\mathcal{P}}(F_{\mathcal{P}}(V)) = 0, \quad i > 0.$

PROPOSITION 3: *Les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{V}inb$, $\mathcal{P}ré - \mathcal{L}ie$ sont de Koszul. Les opérades $G_4 - \mathcal{A}ss$ et $G_5 - \mathcal{A}ss$ ne sont pas de Koszul.*

Preuve: En effet d'après [G.K] et [C.L] les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{P}ré\mathcal{L}ie$ sont de Koszul. Compte tenu des relations liant $\mathcal{P}ré-\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{V}inb$, cette dernière est aussi de Koszul. Pour les deux autres, considérons leur série de Poincaré. Elle est définie, pour une opérade $\mathcal{P}$ par

$$g_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n dim \mathcal{P}^+(n) \frac{x^n}{n!},$$

oú $\mathcal{P}^+(n) = \mathcal{P}^(n)$ pour $n \neq 1$ et $\mathcal{P}^+(1) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{P}^(1)$. Les séries de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ et de sa duale $\mathcal{P}^!$ sont reliées par

$$g_{\mathcal{P}}(g_{\mathcal{P}^!}(x)) = x.$$

On a

$$g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss}(x) = 1 - 2x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{59}{3!}x^3 + ... \quad , \quad g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss^!}(x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 + ...$$

$$g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss}(x) = 1 - 2x + 5x^2 - \frac{13}{2}x^3 + ... \quad , \quad g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss^!}(x) = 1 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + ...$$

et ces deux séries ne sont pas respectivement inverses l'une de l'autre. Ces opérades ne sont pas de Koszul.

6. **Cohomologie admissible d'une algèbre Lie-admissible.**

Soit $\mathcal{A} = (A, \mu)$ une algèbre Lie-admissible. Soit

$$\mathcal{C}^n(A) = Hom(\mathcal{A}^{\otimes n}, \mathcal{A}).$$

et

$$\delta_\mu : \mathcal{C}^n(A) \to \mathcal{C}^{n+1}(A)$$

donné par

$$\delta_\mu \phi = -[\mu, \phi]^{\odot_6}$$

avec

$$[f, g]^{\odot_6} = f \odot_6 g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \odot_6 f,$$

$f \in \mathcal{C}^n(A), g \in \mathcal{C}^m(A)$ et

$$f \odot_6 g(X_1, ..., X_{n+m-1}) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{\sigma \in \sum_{n+m-1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_{\sigma(1)}, .., X_{\sigma(i-1)}, g(X_{\sigma(i)}, .., X_{\sigma(i+m-1)}), X_{\sigma(i+m)}, .., X_{\sigma(n+m-1)}).$$

PROPOSITION 4. *Cet opérateur vérifie*

$$\delta_\mu \circ \delta_\mu = 0.$$

On notera $H^*_{Adm}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ la cohomologie associée au complexe $(\mathcal{C}^n(A),\delta_\mu)$.
Ceci étant, rappelons que toute algèbre de Lie peut être considérée comme une algèbre Lie-admissible.

DEFINITION 4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Notons par $\mathcal{A}_\mu$ cette algèbre de Lie considérée comme algèbre Lie-admissible. Alors $H^*_{Adm}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ est appelée la cohomologie admissible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 5. *Soit $\varphi : \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ une application symétrique, alors $\delta_\mu\varphi = 0$ et $\frac{1}{2}(\mu+\varphi)$ est une loi d'algèbre Lie-admissible (en général non isomorphe à μ) dont la loi d'algèbre de Lie associée est μ.*

La loi $\frac{1}{2}(\mu+\varphi)$ est une loi d'algèbre de Vinberg (l'algèbre $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure affine) si et seulement si φ vérifie

$$\begin{aligned}&2\varphi\left(\mu\left(X_2,X_1\right),X_3\right)+\mu\left(X_1,\varphi\left(X_2,X_3\right)\right)+\varphi\left(X_1,\mu\left(X_2,X_3\right)\right)\\&+\varphi\left(X_1,\varphi\left(X_2,X_3\right)\right)-\mu\left(X_2,\varphi\left(X_1,X_3\right)\right)-\varphi\left(X_2,\mu\left(X_1,X_3\right)\right)\\&-\varphi\left(X_2,\varphi\left(X_1,X_3\right)\right)+\mu\left(\mu\left(X_2,X_1\right),X_3\right)=0.\end{aligned}$$

pour tout $X_1,X_2,X_3\in\mathfrak{g}$.

BIBLIOGRAPHIE :

[A] Albert A.A., *On the power-associative rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **64**, (1948). 552–593.
[C] Chapoton F., *Algèbres pré-Lie et algèbres de Hopf liées à la renormalisation.* Note aux C.R.A.Sc. Paris, t.332, Série 1 (2001), 681-684.
[C-L] Chapoton F., Livernet M., *Pre-Lie algebra and the rooted trees operad.* Internat. Math. Res. Notices **8**, (2001), 395-408.
[G-K] Ginzburg V., Kapranov M., *Koszul duality for operads.* Duke Math Journal . **76,1** (1994), 203-272.
[L1] Loday J.L., *La renaissance des opérades.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque **237**, (1996), 47-74.
[L2] Loday J.L., "Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz". Ens. Math. **39**, (1993), 269-293.
[R] Remm E. Thèse, Mulhouse (2001).