Eléments de cohomologie des foncteurs

Jean-Louis Loday - Elisabeth Remm

26 août 2002

Résumé. La cohomologie des foncteurs est essentiellement l'étude des relations entre les foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même. Cet article contient certains éléments de base de la théorie: les endofoncteurs d'espaces vectoriels, les complexes de Koszul, de de Rham, quelques outils pour le calcul des foncteurs dérivés (lemme de Pirashvili).

Abstract. Cohomology of functors is essentially studying the relationship between the functors from the category of vector spaces to itself. This paper contains the basic elements of the theory: endo-functors of vector spaces, Koszul complex, de Rham complex and some tools to compute derived functors (Pirashvili's lemma).

Introduction

Les divers foncteurs classiques de la catégorie des espaces vectoriels vers elle-même, tels que les foncteurs symétrique, extérieur, tensoriel, etc, sont reliés par des suites exactes. Ils sont aussi reliés par des suites pas si exactes que cela, qui donnent naissance à des groupes de cohomologie. C'est ce qu'on appelle la *cohomologie des foncteurs*.

Leur importance vient de leur apparition dans de nombreux calculs en topologie algébrique et en théorie des représentations.

Le présent article est la présentation des objets et outils de base de la cohomologie des foncteurs: foncteurs tensoriel, symétrique, extérieur, à puissances divisées, puis le twist de Frobenius. Ensuite on introduit le complexe de Koszul et le complexe de de Rham et on détaille l'isomorphisme de Cartier (en caractéristique positive). Enfin dans la dernière partie on donne quelques outils fondamentaux tels que le changement de catégorie de base dans le calcul des foncteurs dérivés et le lemme de Pirashvili, si utile dans ces mêmes calculs.

Ce texte est essentiellement la rédaction, par Elisabeth Remm, des conférences données par Jean-Louis Loday lors de la réunion “Journées Etat de la Recherche” dont le thème était “Foncteurs polynômiaux, modules instables et cohomologie des schémas en groupes finis” tenue à Nantes du 12 au 15 Décembre 2001.

1 La catégorie des endofoncteurs d'espaces vectoriels

1.1 La catégorie des espaces vectoriels $Vect_{\mathbb{K}}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $Vect_{\mathbb{K}}$ la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Lorsque ce corps de base sera fini, à $q = p^s$ éléments, on le notera $\mathbb{F}_q$.

Si V et W sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le produit tensoriel est défini et unique à isomorphisme près. Il est noté $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ ou encore $V \otimes W$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur le corps de base.

Notons que dans $Vect_{\mathbb{K}}$ les foncteurs $- \otimes_{\mathbb{K}} W$ et $V \otimes_{\mathbb{K}} -$ sont exacts.

On note V^* le dual linéaire de V, c'est-à-dire $V^* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$.

La convention de signe de Koszul.
Concernant le produit tensoriel de deux applications linéaires dans la catégorie des espaces vectoriels gradués (les objets et les morphismes sont gradués), nous adopterons la convention de signes de Koszul, c'est-à-dire:

$$(f \otimes g)(v \otimes w) := (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w).$$

pour tout $f : V \to V'$, $g : W \to W'$, $(v, w) \in V \times W$ et $|g|$ (resp $|v|$) est le degré de g (resp de v).

Espace dual d'un espace vectoriel gradué.
Lorsque

$$V = \underset{n \geq 0}{\oplus} V_n$$

est un espace vectoriel gradué on notera, par abus de notation,

$$V^* = \underset{n \geq 0}{\oplus} (V_n)^*$$

Ainsi, si chacun des V_n est de dimension finie, on a un isomorphisme naturel $(V^*)^* \cong V$.

1.2 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ des endofoncteurs d'espaces vectoriels

On note par $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de *dimension finie.* Cette catégorie est souvent remplacée par son "squelette" c'est à dire la petite catégorie ayant pour tout nombre entier naturel n un seul objet, à savoir $\mathbb{K}^n$, et pour morphismes les applications $\mathbb{K}$-linéaires.

On note par $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ la *catégorie des foncteurs* dont les objets sont les foncteurs

$$F : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$$

et les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs

$$\varphi : F \to G$$

(pour tout objet V de $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, φ définit un morphisme $\varphi_V : F(V) \to G(V)$ de $Vect_{\mathbb{K}}$ tel que si $f : V \to W$ est un morphisme de $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ alors $\varphi_W \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_V$).

Notation. Dans la suite on notera parfois f_* au lieu de $F(f)$ l'image de f par un foncteur covariant et f^* l'image par un foncteur contravariant.

Tout foncteur $F : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$ de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ admet une unique extension, toujours notée F,

$$F : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$$

En effet tout espace vectoriel est limite filtrante de ses sous-espaces vectoriels de dimension finie. On prend donc la limite inductive de leur image par F.

Exemples de foncteurs de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$
- L'inclusion naturelle $I : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$.
- Soit V dans $Vect_{\mathbb{K}}$. L'application évaluation

$$e : V \to V^{**}$$

définie par $e(x) f = f(x)$ est linéaire. Lorsque cette application est un monomorphisme on dit que le $\mathbb{K}$-espace est réflexif. Par exemple tout module libre de rang fini est réflexif.

Soit $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$. Le *dual* de F est le foncteur

$$DF : \mathcal{V}_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$$

défini par $DF(V) = (F(V^*))^*$. Si F est à valeurs dans $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ alors $DF(V)$ est réflexif pour tout V et $DDF = F$.

2 L'algèbre tensorielle, l'algèbre symétrique

2.1 L'algèbre tensorielle $T(V)$

2.1.1 Définition

On associe à tout espace V sur $\mathbb{K}$ (ou plus généralement à tout A-module où A est un anneau unitaire) une $\mathbb{K}$-algèbre associative solution du problème universel suivant :

L'algèbre tensorielle sur V est donnée par une paire $(T(V), \gamma)$ où $T(V)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire et $\gamma : V \to T(V)$ est $\mathbb{K}$-linéaire telle que si (B, f) est une paire formée d'une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire et $f : V \to B$ est $\mathbb{K}$-linéaire alors il existe un unique morphisme d'algèbres associatives unitaires $\overline{f} : T(V) \to B$ tel que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Cette solution de problème universel est appelée l'algèbre *libre* dans la catégorie des algèbres associatives unitaires.

Cette algèbre associative unitaire est ainsi construite : soit $T^n(V) = V \otimes ... \otimes V$ (n copies). On pose

$$T(V) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} T^n(V)$$

avec $T^0(V) = \mathbb{K}$ (somme directe vectorielle).

L'associativité du produit tensoriel permet de définir une multiplication (appelée *concaténation*)

$$T^n(V) \otimes_{\mathbb{K}} T^m(V) \to T^{n+m}(V).$$

qui est l'identification de $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$ avec $V^{\otimes n+m}$.
Ainsi $T(V)$ est munie d'une structure d'algèbre associative unitaire, $\mathbb{N}$-graduée.

Soit i_V l'injection canonique de $V = T^1(V)$ dans $T(V)$. Alors on a $x_1 \otimes ... \otimes x_n = i_V(x_1)... i_V(x_n)$, ce qui nous permet de simplifier l'écriture

$$x_1 \otimes ... \otimes x_n = x_1 ... x_n$$

pour tous $x_1, ..., x_n$ éléments de V.

Exemples.
1) Soit X un ensemble et $\mathbb{K}(X)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel libre sur X. Alors $T(\mathbb{K}(X)) = \mathbb{K} < X >$ est l'algèbre libre sur X.
2) Si $X = \{t\}$ alors $T(\mathbb{K}(X)) = \mathbb{K}[t]$. Notons que si $|X| > 1$ alors $\mathbb{K} < X >$ est non commutative, donc $T(V)$ est en général non commutative.

2.1.2 Structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre tensorielle

Définition 1 *Une algèbre de Hopf est une algèbre associative (unitaire) munie*
1. d'une structure de cogèbre qui est donnée par deux morphismes d'algèbres : une comultiplication

$$\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

et une counité $\epsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ vérifiant la coassociativité:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H} \\ \Delta \big\downarrow & & \big\downarrow id \bigotimes \Delta \\ \mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\Delta \bigotimes id} & \mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H} \end{array}$$

et la co-unitalité:

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta(x)) = 1 \otimes x, \quad (id \otimes \epsilon)(\Delta(x)) = x \otimes 1.$$

2. d'une antipode, c'est-à-dire d'un morphisme linéaire

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

vérifiant
$$\mu(S\otimes id)(\Delta(x)) = \mu(id\otimes S)(\Delta(x)) = \epsilon(x).1$$
où μ est la loi d'algèbre de $\mathcal{H}$.

Proposition 2.1 *L'algèbre associative unitaire $T(V)$ est une algèbre de Hopf cocommutative pour la comultiplication Δ vérifiant $\Delta(1) = 1\otimes 1$ et, pour tout $v\in V$, la relation $\Delta(v) = v\otimes 1 + 1\otimes v$.*

Preuve. Notons le produit dans $T(V)$ par "." . On définit $\Delta,\ \epsilon,\ S$ de la manière suivante :
$$\Delta(1) = 1\otimes 1$$
$$\Delta(v) = v\otimes 1 + 1\otimes v$$
Puisque Δ doit être un homomorphisme d'algèbres, on a
$$\Delta(v_1...v_n) = \Delta(v_1)...\Delta(v_n),$$
ce qui définit Δ sur $T(V)$. Cette comultiplication est co-commutative.
La counité est donnée par
$$\begin{cases} \epsilon(1) = 1,\ \epsilon(v) = 0, \\ \epsilon(v_1\otimes ...\otimes v_n) = 0 \end{cases}$$
pour tout $v, v_i \in V$.
L'antipode vérifie: $S(1) = 1$ et $S(v_1\otimes ...\otimes v_n) = (-1)^n v_n\otimes ...\otimes v_2\otimes v_1$. On vérifie aisément qu'on obtient ainsi une algèbre de Hopf. $\square$

Rappel: définition des shuffles (appelés parfois "battages" en français). Notons Σ_n le groupe symétrique d'ordre n, c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble à n éléments.
La définition de Δ implique la formule suivante:
$$\begin{aligned}\Delta(v_1...v_n) = \quad & 1\otimes v_1...v_n + \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{p,q}\\ p+q=n}} v_{\sigma(1)}...v_{\sigma(p)}\otimes v_{\sigma(p+1)}...v_{\sigma(n)} \\ & + v_1...v_n\otimes 1\end{aligned}$$
avec $v_i \in T^1(V) = V$ et $\Sigma_{p,q}$ le sous-ensemble de $\Sigma_{p+q} = \Sigma_n$ constitué par les permutations qui respectent l'ordre relatif de chacun des blocs constitués respectivement par les p premiers entiers puis les q derniers, c'est à dire l'ensemble des permutations du groupe Σ_n telles que $\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < ... < \sigma(n)$. Une telle permutation est appelée un $(p, n-p)$-*shuffle*. Cet ensemble constitue un système de représentants des classes à gauche de Σ_{p+q} modulo $\Sigma_p\times\Sigma_q$.

2.1.3 Structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre $T(V)^*$

Pour tout n posons

$$(T^n(V))^* = (T(V))^*_n$$

On définit ainsi un espace $\mathbb{N}$-gradué

$$T(V)^* := \underset{n\geq 0}{\oplus} (T(V))^*_n.$$

Si V est de dimension finie alors $T(V^*) = T(V)^*$.

Proposition 2.2 *Sur l'espace vectoriel gradué $T(V)^*$ il existe une structure d'algèbre de Hopf commutative donnée par la déconcatenation*

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \sum_{p=0}^{n} (v_1 \dots v_p) \otimes (v_{p+1} \dots v_n)$$

et la multiplication

$$\mu((v_1 \dots v_p) \otimes (v_{p+1} \dots v_{p+q})) = \sum_{\substack{p+q=n \\ \sigma\in(p,q)\text{-shuffle}}} (v_{\sigma^{-1}(1)} \dots v_{\sigma^{-1}(n)})$$

Si la dimension de V est finie les algèbres $T(V)$ et $T(V)^*$ sont duales l'une de l'autre.

2.2 L'algèbre symétrique $S(V)$

Rappelons que si G est un groupe opérant sur un espace vectoriel E, l'espace des invariants est l'espace vectoriel

$$E^G := \{v \in E \ / \ gv = v \text{ pour tout } g \in G\}$$

et l'espace des coinvariants est l'espace vectoriel quotient

$$E_G := E/ \ \{gv - v \quad | \ g \in G, \ v \in V\}.$$

Le groupe symétrique d'ordre n, Σ_n, opère à gauche sur $T^n(V) = V^{\otimes n}$ par

$$\sigma\left(v_1 \otimes \dots \otimes v_n\right) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}$$

pour $\sigma \in \Sigma_n$.

Posons $S^n(V) = (V^{\otimes n})_{\Sigma_n}$.

Définition 2 *L'espace vectoriel*

$$S(V) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} S^n(V)$$

muni de la structure d'algèbre associative commutative unitaire induite par la concaténation est appelée l'algèbre symétrique de V.

Remarque. Soit J l'idéal de $T(V)$ engendré par les tenseurs

$$u \otimes v - v \otimes u, \qquad u, v \in T(V).$$

Alors $S(V)$ s'identifie à l'algèbre associative quotient $T(V)/J$.
Comme $J \cap T^1(V) = \{0\}$, alors $S^1(V) = T^1(V)/\left(T(V) \cap J\right) = T^1(V) = V$.

Si $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n \in T^n(V)$, on notera $v_1 v_2 ... v_n$ son image dans $S^n(V)$ et $S^n(V)$ est engendrée par les éléments de la forme $v_1 v_2 ... v_n$ avec $v_i \in V$. Bien entendu, on a $v_i v_j = v_j v_i$.

Proposition 2.3 *L'algèbre symétrique $S(V)$ est libre sur V dans la catégorie des algèbres associatives commutatives unitaires.*

En d'autres termes, l'algèbre symétrique $S(V)$ possède la propriété universelle suivante :

Soit A une algèbre associative commutative unitaire et $f : E \to A$ une application linéaire. Il existe un unique homomorphisme d'algèbre unitaire $L : S(E) \to A$ tel que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ S(E) \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd}$$

où i est le plongement de E dans $S^1(E)$.

Exemple. Supposons V de dimension finie N. Alors

$$\dim\ S^n(V) = \begin{pmatrix} n+N-1 \\ N-1 \end{pmatrix}.$$

D'après la caractérisation universelle de $S(V)$, si $\{x_1, ..., x_n\}$ est une base de V alors $S(V)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre associative commutative unitaire, à l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$.

Ceci étant, nous pouvons, comme pour l'algèbre tensorielle, munir $S(V)$ d'une structure de Hopf. Plus précisément :

Proposition 2.4 *L'algèbre symétrique est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative.*

Preuve. La multiplication sur l'algèbre symétrique est induite par la multiplication sur l'algèbre tensorielle. $\square$.

2.3 L'algèbre à puissances divisées $\Gamma(V)$

Nous avons vu, pour l'algèbre tensorielle, que si V est de dimension finie alors $T(V)^* = T(V^*)$. Examinons ce qui se passe pour $S(V)^*$, l'algèbre duale de $S(V)$.

Par dualité l'espace vectoriel $S(V)^*$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative.

Notons que si V est de dimension finie, alors $S^n(V^*)$ est canoniquement isomorphe à $(S^n(V))^*$, l'isomorphisme étant donné par

$$(f_1 \ldots f_n)(v_1 \ldots v_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{j=1}^{n} f_j\left(v_{\sigma(j)}\right)$$

Cet isomorphisme est en fait une conséquence de l'isomorphisme

$$(W_G)^* \simeq (W^*)^G$$

où W est de dimension finie.

Posons

$$\Gamma^n(V) := \left(V^{\otimes n}\right)^{\Sigma_n} \quad \text{et } \Gamma(V) = \underset{n \geq 0}{\oplus} \Gamma^n(V).$$

Lemme 2.5 $(S^n(V))^* = \Gamma^n(V^*)$; $(S^n(V^*))^* = \Gamma^n(V)$.

Comparaison de Γ^n et S^n. L'application *norme* :

$$N_n : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n} N_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$$

induit une application linéaire

$$N_n : S^n(V) \to \Gamma^n(V).$$

En caractéristique zéro c'est un isomorphisme dont l'inverse esr $\frac{1}{n!}\mu_n$ où μ_n est le composé

$$\Gamma^n(V) \rightarrowtail V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n(V).$$

En caractéristique positive p on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow S^p(V) \xrightarrow{N_p} \Gamma^p(V) \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

2.3.1 Structure d'algèbre associative et commutative sur $\Gamma(V)$

On explicite la structure d'algèbre de $\Gamma(V)$ mais nous allons montrer que $\Gamma(V)$ a une structure plus riche en caractéristique p.

Considérons dans l'espace gradué $T(V)$ le produit défini par

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) \bullet (x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+q}) = \sum_{\substack{p+q=n \\ \sigma \in (p,q)\text{-shuffle}}} \sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x_{p+1} \otimes \ldots \otimes x_{p+q}).$$

Ce produit munit l'espace $T(V)$ d'une structure d'algèbre associative commutative unitaire notée $T^{sh}(V)$ (cela se voit directement). Remarquons que cette structure d'algèbre est différente de la structure d'algèbre de $T(V)$.
L'espace $\Gamma^p(V)$ est le sous-module des tenseurs symétriques de $T^p(V)$. On vérifie que le produit $\bullet$ de deux tenseurs symétriques est encore un tenseur symétrique. Ainsi $\Gamma(V)$ est une algèbre associative commutative unitaire.

2.3.2 Algèbres à puissances divisées

a) Définition

Définition 3 (Ca) . *Une algèbre à puissances divisées A est une algèbre associative et commutative unitaire graduée avec des opérations γ_k pour tout $k \geq 0$ qui á chaque $x \in A$ associe $\gamma_k(x) = x^{[k]}$ telles que*

1. $x^{[0]} = 1 \quad , \quad x^{[1]} = x \quad , \quad \deg x^{[k]} = k \deg x$
2. $x^{[k]}x^{[h]} = \begin{pmatrix} k+h \\ k \end{pmatrix} x^{[k+h]}$
3. $(x+y)^{[k]} = \sum_{i+j=k} x^{[i]}y^{[j]}$
4. $(xy)^{[k]} = k!x^{[k]}y^{[k]} = x^k y^{[k]} = x^{[k]}y^k$
5. $(x^{[k]})^{[h]} = C_{h,k}x^{[kh]}$ *où* $C_{h,k} = \frac{(kh)!}{h!(k!)^h}$.

On déduit de ces axiomes que $(\lambda x)^{[h]} = \lambda^h x^{[h]}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple.
Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, l'algèbre A ne peut posséder qu'un seul système de puissances divisées défini par

$$x^{[k]} = \frac{x^k}{k!}.$$

Si A et B sont deux $\mathbb{K}$-algèbres à puissances divisées, une application linéaire φ de A dans B est un homomorphisme d'algèbres à puissances divisées si φ est un homomorphisme d'algèbres graduées unitaires compatible avec les puissances divisées, c'est-à-dire que

$$\varphi(x^{[k]}) = (\varphi(x))^{[k]}.$$

Remarque. La notion d'algèbre à puissances divisées est apparue dans le séminaire de Cartan à propos des algèbres d'Eilenberg McLane et pour des modules libres. On y présente cette notion, non pas pour des algèbres associatives commutatives unitaires graduées mais pour des algèbres associatives unitaires graduées anticommutatives au sens strict c'est-à-dire vérifiant

$$x^2 = 0.$$

pour tout x de A de degré impair. Une telle algèbre est dite à puissances divisées si pour tout x appartenant à A de degré pair ≥ 2 il existe une suite d'éléments $\gamma_k(x) \in A$ $(k \geq 0)$ satisfaisant les conditions 1., 2., 3. et la condition suivante: $\gamma_k(xy) = 0$ pour $k \geq 2$ et $deg(x)$ et $deg(y)$ impairs, $\gamma_k(xy) = x^k\gamma_k(y)$ si $deg(y)$ est pair et différent de 0 et $deg(x)$ pair.

2.3.3 L'algèbre $\Gamma(V)$ est une algèbre à puissances divisées

Proposition 2.6 *L'algèbre $\Gamma(V)$ est une algèbre à puissances divisées appelée l'algèbre à puissances divisés sur V.*

Démonstration. En effet, il suffit de montrer que pour tout tenseur symétrique $t \in \Gamma^p(V)$, le tenseur $t^{[k]}$ qui est dans l'algèbre $T^{\mathrm{sh}}(V)$ appartient toujours à $\Gamma^{kp}(V)$. Ceci est dû au fait que

$$t^{[k]} = \sum_{\sigma \in K_{p,k}} \sigma(t^{\otimes k})$$

avec $K_{p,k} = \{\sigma \in \Sigma_{pq} \mid \sigma(p) < \sigma(2p) < \ldots < \sigma(kp)\}$.

Théorème 1 *L'algèbre à puissances divisées $\Gamma(V)$ est libre, c'est-à-dire pour toute application linéaire $\varphi : V \to A$, où A est une algèbre à puissances divisées, il existe une unique extension $\tilde{\varphi} : \Gamma(V) \to A$ qui est un morphisme d'algèbre à puissances divisées.*

Preuve. Le résultat a été démontré par N. Roby ([R]). On construit pour tout A-module M (où A est un anneau commutatif unitaire) une algèbre à puissances divisées notée $\tilde{\Gamma}_A(M)$ qui a la propriété suivante:

Soient S une A-algèbre à puissances divisées, M un A-module et φ une application linéaire de M dans S^+ où $S^+ = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^*} S^m$. Il existe alors un unique morphisme d'algèbre $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\Gamma}_A(M)$ dans S prolongeant φ et tel que

$$\tilde{\varphi}(x^{[k]}) = (\varphi(x))^{[k]}.$$

On en déduit que l'injection canonique ϕ de V dans $\Gamma(V)$, en vertu de la propriété universelle précédente, se prolonge en un unique homomorphisme d'algèbres à puissances divisées $\tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma}_{\mathbb{K}}(V) \to \Gamma(V)$ vérifiant $\tilde{\varphi}(x^{[k]}) = x^{\otimes k}$. Comme V est un module libre (c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel), cette application est un isomorphisme.

3 L'algèbre extérieure $\Lambda(V)$

3.1 Définition et problème universel

Définition 4 *On appelle algèbre extérieure de V, et on note $\Lambda(V)$ l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $T(V)$ par l'idéal J bilatère engendré par les éléments $x \otimes x, \quad x \in V$.*

L'idéal J étant un idéal gradué :

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} J_n$$

avec $J_n = J \cap T^n(V)$, l'algèbre $\Lambda(V)$ est graduée

$$\Lambda(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(V) = \sum_{n=0}^{\infty} T(V) \ / \ J_n$$

avec $\Lambda^0(V) = V, \quad \Lambda^1(V) = T^1(V)$. On note $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ l'image de $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ dans $\Lambda^n(V)$.

L'algèbre extérieure $\Lambda(V)$ est solution du problème universel suivant :

Théorème 2 *Soit A une algèbre associative unitaire et $l : V \to A$ une application linéaire vérifiant $(l(x))^2 = 0$ pour tout $x \in V$. Il existe un homomorphisme et un seul*

$$L : \Lambda(V) \to A$$

tel que

$$\begin{cases} L(1) = 1 \\ l(x) = L(x), \quad \forall x \in V \end{cases}$$

3.2 Propriétés de l'algèbre extérieure

L'algèbre extérieure $\Lambda(V)$ est alternée. Plus précisément on a

$$x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(n)} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} x_1 \wedge ... \wedge x_n$$

pour toute permutation σ de Σ_n. On en déduit, si V est de dimension finie

1) $\Lambda^n(V) = 0$ dès que $n > N = \dim V$.

2) $\dim \Lambda^n(V) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$

3) $\Lambda^n(V^*) \simeq (\Lambda^n(V))^*$, ce dernier isomorphisme étant donné par

$$(f_1 \wedge ... \wedge f_n)(w_1, ... w_n) = \det(f_i(w_j))$$

4) A toute application linéaire

$$g : \Lambda^n(V) \to W$$

où W est un $\mathbb{K}$-module, on associe l'application n-linéaire altérnée

$$(x_1, ... x_n) \to g(x_1 \wedge ... \wedge x_n)$$

de V^n dans W.

Ainsi la puissance $n^{ième}$ extérieure $\Lambda^n(V)$ apparaît également comme solution d'un problème universel.

3.3 Tenseurs antisymétriques

Soit $t \in T^n(V)$ un terme d'ordre n. On dit qu'il est antisymétrique s'il vérifie

$$\sigma.t = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} t$$

pour tout $\sigma \in \Sigma_n$. En particulier l'antisymétrisé d'un tenseur t, noté $a(t)$ et défini par

$$a(t) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma.t$$

est antisymétrique. Notons $A'_n(V)$ le sous-espace de $T^n(V)$ des tenseurs antisymétriques et $A''_n(V)$ le sous-espace des antisymétrisés. En général $A''_n(V) \neq A'_n(V)$. En effet si t est antisymétrique alors $a(t) = \frac{1}{n!}t$. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique p, $p!$ n'est pas inversible. Si $n!$ est inversible, alors

$$T^n(V) = A_n^*(V) \oplus J_n$$

la restriction de la projection canonique $T^n(V) \to \Lambda^n(V)$ à $A_n(V)$ définit un isomorphisme

$$A_n^*(V) \to \Lambda^n(V).$$

3.4 Structure d'algèbre de Hopf sur $\Lambda(V)$.

Considérons l'application diagonale

$$\begin{array}{rccc} h: & V & \to & V \times V \\ & x & \mapsto & h(x) = (x, x) \end{array}$$

et soit $\Lambda(h) : \Lambda(V) \to \Lambda(V \times V)$ le morphisme correspondant (il vérifie $\Lambda(h)(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = (v_1, v_1) \wedge ... \wedge (v_n, v_n)$). Or $\Lambda(V \times V)$ est isomorphe à $\Lambda(V) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda(V)$. On définit ainsi un (unique) morphisme d'algèbres

$$\Delta : \Lambda(V) \to \Lambda(V) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda(V)$$

vérifiant $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ et donc

$$\begin{aligned} \Delta(x_1 \wedge ... \wedge x_n) &= (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \wedge ... \wedge (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n) \\ &= \sum (-1)^\nu \left(x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_p}\right) \wedge ... \wedge \left(x_{j_1} \wedge ... \wedge x_{j_{n-p}}\right) \end{aligned}$$

la sommation étant étendue aux couples de suites complémentaires d'éléments de $[1, ..., n]$ où $(i_1, ..., i_p)$, $(j_1, ..., j_{n-p})$

$$i_1 < i_2 < ... < i_p \quad , \quad j_1 < j_2 < ... < j_{n-p}$$

et ν est le nombre de couple (h, k) tels que $j_k < i_k$.

Proposition 3.1 *L'algèbre associative $\Lambda(V)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf autoduale c'est à dire vérifiant $\Lambda(V)^* \simeq \Lambda(V^*)$. (La construction de Δ montre que cette structure est unique).*

4 Foncteurs exponentiels

4.1 Définition

Soit une suite de foncteurs $A^* = (A^0, \ldots, A^n, \ldots)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n : \mathcal{V} \to Vect$, et soit A donné par

$$A(V) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A^n(V).$$

Définition 5 *On dit que A est un foncteur exponentiel si les propriétés suivantes sont vérifiées*

$$\begin{cases} A^0(V) = \mathbb{K}, \quad A^i(0) = 0, \quad \forall i > 0 \\ A^n(V) \simeq \oplus_{i+j=n, i\geq 0, j\geq 0} A^i(V) \otimes_{\mathbb{K}} A^j(V), \quad \forall n > 0 \\ A^*(V \oplus W) = A^*(V) \otimes A^*(W) \end{cases}$$

4.2 Exemple: le foncteur Λ

Considérons la suite des foncteurs $(\Lambda^0, \ldots, \Lambda^n, \ldots)$ de $\mathcal{V}$ dans $Vect$. Elle vérifie en particulier :

1. $\Lambda^0(V) = V$
2. $\Lambda^n(V) \simeq \oplus_{i+j=n} \Lambda^i(V) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^j(V)$ si $n > 0$ et $i \geq 0$, $j \geq 0$
3. $\Lambda^n(V \oplus W) = \Lambda^n(V) \otimes \Lambda^n(W)$.

Il faut toutefois préciser que si f est un morphisme de V dans W alors $\Lambda^n(f)$ est le morphisme de $\Lambda^n(V)$ dans $\Lambda^n(W)$ donné par

$$\Lambda^n(f)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n).$$

4.3 Propriétés

Théorème 3 *1. Les foncteurs S, Λ, Γ sont des foncteurs exponentiels.*

2. Le produit tensoriel de deux foncteurs exponentiels est exponentiel.

Remarquons que le foncteur T n'est pas un foncteur exponentiel.

5 Le twist de Frobenius

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p. Alors, si $\mathbb{K}$ est fini, il est d'ordre p^s et il est le seul corps, à isomorphisme près, contenant p^s éléments (et un tel corps existe toujours). Nous l'avons noté $\mathbb{F}_{p^s}$.

Définition 6 *On appelle opérateur de Frobenius en caractéristique p l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & \lambda & \mapsto & \lambda^p \end{array}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^s}$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons $V^{(1)}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel obtenu par extension des scalaires via l'homomorphisme de Frobenius. En d'autres mots $V^{(1)}$ est un espace vectoriel engendré par $v^{(1)}$, pour tout $v \in V$, modulo les relations suivantes:

$$(v+w)^{(1)} = v^{(1)} + w^{(1)}, \quad (\lambda v)^{(1)} = \lambda^p v^{(1)}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Par induction, on définit $V^{(r)} = (V^{(r-1)})^{(1)}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathbb{K}$ est un corps parfait, en particulier si le corps est fini, alors Φ est un isomorphisme et on sait que Φ est un générateur du groupe cyclique des automorphismes de $\mathbb{K}$. Notons que si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ (c'est à dire si F est un corps premier) alors Φ est l'identité. Dans ce cas, la multiplication externe de $V^{(1)}$ est définie par

$$\begin{array}{c} \mathbb{K} \times V^{(1)} \to V^{(1)} \\ (\lambda, v) \to \lambda \bullet_1 v. \end{array}$$

avec $\lambda \bullet_1 v = \Phi^{-1}(\lambda)v$ où Φ est l'automorphisme de Frobenius. On a en particulier $\lambda^p \bullet_1 v = \Phi^{-1}(\lambda^p)v = \lambda v$.
Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'application φ_p de $V^{(1)}$ dans $S^p(V)$ donnée par $v \to v^{\otimes p}$. On a $\varphi_p(v+w) = \varphi_p(v) + \varphi_p(w)$ car on est en caractéristique p, et

$$\varphi_p(\lambda \bullet_1 v) = \varphi_p(\Phi^{-1}(\lambda)v) = (\Phi^{-1}(\lambda)v)^{\otimes p} = \Phi^{-1}(\lambda^p)v^{\otimes p} = \lambda v^{\otimes p}.$$

Ainsi cette application est $\mathbb{K}$-linéaire.

Définition 7 *Soit un foncteur $F : Vect \to Vect$. Le twist de F est le foncteur noté $F^{(1)}$ défini par*

$$F^{(1)}(V) := F(V^{(1)}).$$

Posons $I^{(1)}(V) = V^{(1)}$, et donc $I^{(1)}$ est le twist du foncteur identité et pour tout foncteur F on a $F^{(1)} = F \circ I^{(1)}$. Par induction, on définit $F^{(r+1)} = (F^{(r)})^{(1)}$. Notons que pour un corps premier fini, les foncteurs $I^{(1)}$ et I sont isomorphes dans $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$.

Théorème 4 *Le twist de Frobenius d'un foncteur exponentiel est exponentiel.*

6 Complexes de Koszul

6.1 Convolution

La construction du complexe de Koszul associé à une algèbre quadratique est un cas particulier d'une construction plus générale que nous allons exposer ci-après.

Soit C une cogèbre et A une algèbre. Alors $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ est une algèbre pour le produit de convolution

$$f * g = \mu \circ (f \otimes g)\,\Delta$$

pour tout $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$, $c \in C$ et où μ est la loi d'algèbre de A. Ainsi on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & C \otimes C \arrow[r, "f \otimes g"] & A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \\ & & * & \\ C \arrow[rr, "f*g"'] & & & A \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

Pour un tel produit $Hom_{\mathbb{K}}(C,A)$ est une algèbre unitaire, l'unité est $u \circ \varepsilon$ où $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ est la counité de C et $u : \mathbb{K} \to A$ l'unité de A.

Ceci étant, soit $\alpha \in Hom_{\mathbb{K}}(C,A)$. Soit

$$d_\alpha : A \otimes C \to A \otimes C$$

définie par la composition

$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "1_A \otimes \Delta"] \arrow[d, "="'] & A \otimes C \otimes C \arrow[r, "1_A \otimes \alpha \otimes 1_C"] & A \otimes A \otimes C \arrow[r, "\mu \otimes id_C"] & A \otimes C \\
A \otimes C \arrow[rrr, "d_\alpha"'] & & & A \otimes C \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

Théorème 5 *Soient C une cogèbre sur $\mathbb{K}$ et A une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soient $\alpha, \beta \in Hom_{\mathbb{K}}(C,A)$. Alors on a*

$$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha * \beta}.$$

Preuve. C'est une vérification automatique. $\square$.

Corollaire 1 *Soit $\alpha \in Hom_{\mathbb{K}}(C,A)$ vérifiant $\alpha * \alpha = 0$. Alors l'opérateur d_α vérifie*

$$d_\alpha \circ d_\alpha = 0.$$

Exemple.
Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $A = S(V)$ et $C = S(V)$. Prenons α définie ainsi: Pour tout $v \in V$,

$$\alpha(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in V \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\underbrace{\alpha * \ldots * \alpha}_{p} = 0$ si l'on est en caractéristique p.

Corollaire 2 *Soit $S(V)$ l'algèbre symétrique considérée comme une algèbre de Hopf sur un corps de caractéristique p et $\alpha : S(V) \to S(V)$ comme ci-dessus. Alors l'homomorphisme $d_\alpha : S(V) \otimes S(V) \to S(V) \otimes S(V)$ vérifie*

$$(d_\alpha)^p = 0.$$

6.2 Algèbres de Koszul

Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $T(V)$ son algèbre tensorielle. Rappelons que le produit de concat'enation munit $T(V)$ d'une structure d'algèbre associative unitaire libre.

Soit (R) l'idéal bilatère engendré par un sous-module $R \subset T^2(V)$. L'algèbre quotient

$$A = T(V) \,/\, (R)$$

encore notée $A(V,R)$ est unitaire associative et appelée algèbre quadratique.

Exemple. L'algèbre symétrique $S(V)$ et l'algèbre extérieure $\Lambda(V)$ sont quadratiques.

Définition 8 *L'algèbre duale $A^!$ de l'algèbre quadratique A est l'algèbre quadratique*

$$A^! = T(V^*) / \left(R^\perp\right) = A\left(V^*, R^\perp\right)$$

où $R^\perp = \left\{\sum f\otimes g \in (V^*)^{\otimes 2} \ / \ (f\otimes g)(x) = 0 \qquad x\in R\right\}$

Considérons le dual linéaire $\left(A^!\right)^*$ de l'algèbre graduée $A^!$. On sait que $\left(A^!\right)^*$ est munie naturellement d'une structure de cogèbre. Notons Δ sa comultiplication.

Proposition 6.1 *L'application* $d : \left(A^!\right)^* \otimes A \to \left(A^!\right)^* \otimes A$ *définie par*

$$\left(A^!\right)^* \otimes A \overset{\Delta\otimes 1_A}{\longrightarrow} \left(A^!\right)^* \otimes \left(A^!\right)^* \otimes A \overset{1_{A^!}\otimes\alpha\otimes 1_A}{\longrightarrow} \left(A^!\right)^* \otimes A \otimes A \overset{1_{A^!}\otimes\mu}{\longrightarrow} \left(A^!\right)^* \otimes A$$

où μ est la loi de A et $\alpha : \left(A^!\right)^* \to A$ l'application graduée correspondant à l'isomorphisme de V^{**} avec V, vérifie $d^2 = 0$.

Pour tout n, on peut définir un complexe de chaînes noté $K^n(A)$

$$0 \to \left(A^!_n\right)^* \otimes \mathbb{K} \to \dots \left(A^!_p\right)^* \otimes A_q \to \dots \to \mathbb{K}\otimes A_n \to 0$$

avec $p+q=n$.

La somme de tous ces complexes $\left(K^0(A), K^1(A), \dots\right)$ est appelé le **complexe de Koszul de** A.

Définition 9 *L'algèbre A est de Koszul si*

$$H_p\left(K^n(A)\right) = 0$$

pour tous $p>0$ et $n\geq 0$.

6.3 Complexes de Koszul de rang n

On va s'intéresser au cas particulier de la construction des algèbres de Koszul lorsque $A = S(V)$. Dans ce cas $\left(A^!\right)^* = \Lambda(V)$.

Prenons pour algèbre, l'algèbre symétrique $S(V)$ d'un espace vectoriel et pour cogèbre l'algèbre $\Lambda(V)$.

Soit α l'application linéaire

$$\alpha : S(V) \longrightarrow \Lambda(V).$$

non trivial uniquement en degré 1. Alors $\alpha * \alpha = 0$. En effet

$$\begin{aligned}\alpha * \alpha(x) &= \mu \circ (\alpha \otimes \alpha)\,(\Delta(x)) \\ &= \mu \circ (\alpha \otimes \alpha)\,(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= \mu \circ (\alpha(x) \otimes \alpha(1) + \alpha(1) \otimes \alpha(x)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après le théorème 5, l'opérateur d_α

$$d_\alpha : S(V) \otimes \Lambda(V) \to S(V) \otimes \Lambda(V)$$

vérifie $d_\alpha \circ d_\alpha = 0$.

Décrivons explicitement d_α. Soit $x_1 ... x_p \in S^p(V)$ et $y_1 \wedge ... \wedge y_q \in \Lambda^q(V)$. Alors

$$d_\alpha\,(x_1 ... x_p \otimes y_1 \wedge ... \wedge y_q) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1}\,(x_1 ... x_p y_k) \otimes \left(y_1 \wedge ... \wedge \overset{\vee}{y_k} ... \wedge y_q\right)$$

et donc

$$d_\alpha : S^p(V) \otimes \Lambda^q(V) \to S^{p+1}(V) \otimes \Lambda^{q-1}(V).$$

Exemple.
Si $p = 1, q = 1$, le degré total va être conservé:

$$d_\alpha(x_1 \otimes y_1) = x_1.y_1.$$

Si $p = 1, q = 2$, alors

$$d_\alpha(x_1 \otimes (y_1 \wedge y_2)) = x_1.y_1 \otimes y_2 - x_1.y_2 \otimes y_1$$

et

$$d_\alpha \circ d_\alpha(x_1 \otimes (y_1 \wedge y_2)) = d_\alpha\,(x_1.y_1 \otimes y_2 - x_1.y_2 \otimes y_1) = x_1.y_1.y_2 - x_1.y_2.y_1 = 0.$$

Définition 10 *On appelle complexe de Koszul de rang n, et on le note K^n, le complexe*

$$0 \to \Lambda^n(V) \overset{d_\alpha}{\to} S(V) \otimes \Lambda^{n-1}(V) \overset{d_\alpha}{\to} ... \overset{d_\alpha}{\to} S^p(V) \otimes \Lambda^{n-p}(V) \overset{d_\alpha}{\to} ... \overset{d_\alpha}{\to} S^n(V) \to 0.$$

Rappelons qu'un complexe est dit acyclique si son homologie est nulle.

Théorème 6 *Pour tout $n > 0$, le complexe de Koszul $K^n(V)$ est acyclique.*

Preuve. Supposons d'abord que $dim\, V = 1$. Le complexe s'écrit :

$$0 \to 0 \to ... \to 0 \to S^{n-1}(V) \otimes V \to S^n(V) \to 0.$$

Comme $S^{n-1}(V) \otimes V \simeq S^n(V)$, cette suite est exacte.
Si $dim\, V = p > 1$, on écrit $V = V_1 \oplus ... \oplus V_d$ avec $V_i = \mathbb{K}$ et

$$K^n(V) \cong \bigotimes_{i=1}^{d} K^n(V_i). \quad \square$$

Il existe une version duale de ce théorème. Rappelons que $(S^n(V^*))^* = \Gamma^n(V)$ et qu'il existe des applications entre Γ^n et S^n données par

$$\Gamma^n(V) = (V^{\otimes^n})^{\Sigma_n} \hookrightarrow V^{\otimes^n} \twoheadrightarrow (V^{\otimes^n})_{\Sigma_n} = S^n(V)$$

et $N : S^n(V) \to \Gamma^n(V)$ donnée par

$$N(v_1 ... v_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma.(v_1 ... v_n)$$

Remarque. En caractéristique p, la suite exacte

$$0 \to V \to S^p(V) \to \Gamma^p(V) \to V \to 0$$

définit une suite exacte de foncteurs

$$0 \to I \to S^p \to \Gamma^p \to I \to 0.$$

Revenons à nos complexes:

Théorème 7 *Pour tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ (ou sur tout module libre de type fini) il existe un complexe de chaînes acyclique*

$$0 \to \Gamma^n(V) \to ... \to \Gamma^p(V) \otimes \Lambda^q(V) \to ... \to \Lambda^n(V) \to 0$$

7 Complexe de de Rham

Nous allons définir un autre complexe

$$\Omega_n^* : 0 \to S^n(V) \to ... \to \Lambda^p(V) \otimes S^{n-p}(V) \to ... \to \Lambda^n(V) \to 0$$

appelé *complexe de de Rham.*

7.1 Définition du complexe de de Rham

Soit A une algèbre associative unitaire commutative sur $\mathbb{K}$. On note $\Omega^1_{A/\mathbb{K}}$ le A-module des formes différentielles algébriques sur A. Il est engendré par les formes da avec $a \in A$, où d vérifie

$$\begin{cases} d(\lambda a + \mu b) = \lambda da + \mu db \\ d(ab) = adb + bda \end{cases}$$

Notons que $d1 = 0$. Posons

$$\Lambda_A^n(\Omega^1_{A/\mathbb{K}}) =: \Omega^n_{A/\mathbb{K}}.$$

Les éléments de $\Omega^n_{A/\mathbb{K}}$ sont du type $a_0 da_1 ... da_n$. On définit l'opérateur de de Rham.

$$d : \Omega^n_{A/\mathbb{K}} \to \Omega^{n+1}_{A/\mathbb{K}}$$

par

$$d(a_0 da_1 ... da_n) = da_0 da_1 ... da_n.$$

Comme $d1 = 1$, on a $d^2 = 0$.

Définition 11 *Le complexe de de Rham associé à la $\mathbb{K}$-algèbre A est donné par le complexe $(\Omega^*_{A/\mathbb{K}}, d)$. On notera $H^n_{DR}(A)$ la cohomologie de ce complexe. Elle est appelée la cohomologie de de Rham de A.*

7.2 Cas particulier: $A = S(V)$

Si $A = S(V)$ alors $\Omega^n_{S(V)/\mathbb{K}} = S(V) \otimes \Lambda^n(V)$. On montre directement que

$$\Omega^n_{S(V \oplus W)_\mathbb{K}} \cong \Omega^n_{S(V)_\mathbb{K}} \otimes \Omega^n_{S(W)_\mathbb{K}}$$

où V et W sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 12 *Pour tout espace vectoriel $V/\mathbb{K}$, le complexe de de Rham de degré n associé est le complexe*

$$\Omega^*_n : 0 \xrightarrow{d} S^n(V) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Lambda^p(V) \otimes S^{n-p}(V) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Lambda^n(V) \xrightarrow{d} 0.$$

Proposition 7.1 *Ce complexe est acyclique en caractéristique 0. Il n'est pas acyclique en caractéristique $p \neq 0$.*

Preuve. En caractéristique $p \neq 0$ on a:

$$d(x^p) = p x^{p-1} dx = 0.$$

Ainsi x^p est un cocycle mais $x^{p-1}dx$ n'est pas un bord. En caractéristique 0 l'acyclicité se montre comme pour les complexes de Koszul. $\square$.

7.3 Isomorphisme de Cartier: $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$

Notons $[x^p]$ la classe de cohomologie du cocycle x^p et $[x^{p-1}dx]$ celle du cocycle $x^{p-1}dx$. On va définir un homomorphisme d'anneaux

$$c : (\Omega^*_{A/\mathbb{K}})^{(1)} \to H^*_{DR}(A)$$

par

$$c(x) = [x^p]\,, \quad c(dx) = [x^{p-1}dx]$$

où $x \in A$ et $x^{p-1}dx \in \Omega^1_A$. Plus généralement on aura

$$c(a_0 da_1 ... da_n) = \left[a_0^p a_1^{p-1} ... \; a_n^{p-1} da_1 ... da_n\right].$$

Rappelons que $(-)^{(1)}$ est le twist de Frobenius (cf 4.1).

Théorème 8 *(Cartier 1957 [C]) Si $A = S(V)$, ou plus généralement si A est une algèbre associative commutative unitaire lisse sur $\mathbb{K}$, alors c est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules gradués. L'inverse c^{-1} est appelé isomorphisme de Cartier.*

Preuve. Elle repose sur le lemme suivant:

Lemme 7.2 *Soit $\rho : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $\rho(A) \subset Z(B)$ (centre de B). Soit $\delta : A \to B$ une ρ-dérivation, $\mathbb{K}$-linéaire c'est-à-dire un morphisme de groupes vérifiant:*

$$\begin{array}{l} \delta(aa') = \rho(a)\delta(a') + \rho(a')\delta(a) \\ \delta(a)\delta(a) = 0. \end{array}$$

Alors il existe une extension de ρ en $\Omega^*_{A/\mathbb{K}} \xrightarrow{c} B$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} c(a) = \rho(a), \\ c(da) = \delta(a), \\ c(a_0 da_1 ... da_n) = \rho(a_0)\delta(a_1) ... \delta(a_n). \end{array} \right.$$

Ainsi, si l'on considère $B = \Omega^*_{DR}(A)$, on a

$$\rho(a) = [a^p] \in \Omega^0_{DR}(A).$$

On définit alors δ de la façon suivante:

$$\delta(a) = \left[a^{p-1}da\right].$$

L'application δ est bien linéaire. En prenant

$$\Phi(X, Y) = \frac{(X+Y)^p - X^p - Y^p}{p},$$

on a alors

$$d\Phi(a, b) = (a+b)^{p-1} d(a+b) - a^{p-1}da - b^{p-1}db,$$

ce qui entraîne que

$$\left[(a+b)^{p-1} d(a+b)\right] = \left[a^{p-1}da\right] + \left[b^{p-1}db\right].$$

D'où

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b).$$

De plus c'est bien une ρ-dérivation puisque l'on a

$$(ab)^{p-1}\, d\,(ab) = a^p b^{p-1} db + a^{p-1} b^p da,$$

ce qui entraîne que

$$\delta\,(ab) = \rho\,(a)\,\delta\,(b) + \rho\,(b)\,\delta\,(a)\,.$$

Il existe alors, d'après le lemme, une extension de ρ

$$c : \Omega^*_{A/\mathbb{K}} \to \Omega^*_{DR}(A).$$

Comme on a

$$\Omega^*_{S(V\oplus W)/\mathbb{K}} = \Omega^*_{S(V)/\mathbb{K}} \otimes \Omega^*_{S(W)/\mathbb{K}}$$

on peut toujours se ramener au cas de la dimension 1. $\square$.

Compatibilité entre les isomorphismes:

On a

$$S^{i+1}(V)\otimes\Lambda^{j-1}(V) \underset{K}{\overset{d}{\rightleftarrows}} S^i(V)\otimes\Lambda^j(V) \underset{K}{\overset{d}{\rightleftarrows}} S^{i-1}(V)\otimes\Lambda^{j+1}(V)$$

Lemme 7.3 *$dK + Kd = n.id$ (formule d'Euler)*

On en déduit:

Proposition 7.4 *L'isomorphisme de Cartier est compatible à K.*

8 Foncteurs adjoints et lemme de Yoneda

8.1 Foncteurs adjoints

Définition 13 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $l : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $r : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Ils sont dits adjoints (l adjoint à gauche, r adjoint à droite) si pour tout objet C de $\mathcal{C}$ et tout objet D de $\mathcal{D}$ on a l'isomorphisme suivant:*

$$Hom_{\mathcal{D}}(lC, D) \cong Hom_{\mathcal{C}}(C, rD)$$

L'unité $u : C \to rlC$ correspond à id_{lC} et la counité $\eta : lrD \to D$ correspond à id_{rD}. Ils permettent de reconstruire l'isomorphisme. En effet, on associe à $f \in Hom_{\mathcal{D}}(lC, D)$ le morphisme $f' \in Hom_{\mathcal{C}}(C, rD)$ par $f' = rf \circ u$. De même, si $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C, rD)$, on peut lui associer le morphisme $\eta \circ lg$ de $Hom_{\mathcal{D}}(lC, D)$.

Exemple. Plaçons-nous dans la catégorie $Vect$. Soit W un objet fixé de $Vect$. Alors le foncteur r qui à tout objet V de $Vect$ fait correspondre $r(V) := Hom(W, V)$ et le foncteur l qui à V fait correspondre $l(V) := V \otimes W$ sont des foncteurs adjoints. En effet, on a

$$Hom(C, Hom(W, D)) \cong Hom(C \otimes W, D).$$

8.2 Lemme de Yoneda

Rappelons qu'une petite catégorie est une catégorie dont la collection des objets forme un ensemble.

Lemme 8.1 *(dit de Yoneda) Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, F et G deux foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles*

$$F, G : \mathcal{C} \to Ens.$$

Si F est un foncteur représentable, i.e

$$\exists Z \in \mathcal{C} \mid F = Hom_{\mathcal{C}}(Z, -)$$

alors on a un isomorphisme naturel

$$Hom(F, G) \simeq G(Z)$$

Démonstration.

a) Soit $\alpha \in Hom(F, G)$. On a alors un morphisme $\alpha(Z) : F(Z) \to G(Z)$. Comme $F(Z) = Hom(Z, Z)$ contient l'application id_Z, on a $\alpha(Z)(id_Z) \in G(Z)$. On a ainsi construit une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Hom(F,G) & \longrightarrow & G(Z) \\ & \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \alpha(Z)(id_Z) \end{array}$$

b) Soient $x \in G(Z)$, $f \in F(X) = Hom(Z, X)$. Le foncteur G définit alors une application $G(f) : G(Z) \to G(X)$. On a $G(f)(x) \in G(X)$ ce qui permet de définir un morphisme de foncteur ψ de F dans G de la manière suivante:

$$\begin{array}{rccc} \psi(X) : & F(X) & \longrightarrow & G(X) \\ & f & \longmapsto & \psi(X)(f) = G(f)(x). \end{array}$$

Ces deux applications étant inverses l'une de l'autre, on a bien l'isomorphisme

$$Hom(F, G) \simeq G(Z). \qquad \square$$

Il existe une version contravariante du lemme de Yoneda.
Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, F et G deux foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles

$$F : \mathcal{C} \to Ens$$
$$G : \mathcal{C}^{op} \to Ens.$$

On note

$$F \times_{\mathcal{C}} G = \bigcup_{X \in Obj\mathcal{C}} F(X) \times G(X) \ / \ \sim$$

où la relation d'équivalence est définie de la façon suivante: Soient C et D des objets de la catégorie $\mathcal{C}$, une application $f : C \to D$. Alors les foncteurs F et G définissent les applications $F(f) : F(C) \to F(D)$ et $G(f) : G(D) \to G(C)$ et la relation d'équivalence est donnée par

$$(x, G(f)(y)) \sim (F(f)(x), y)$$

pour tous $x \in F(C)$ et $y \in G(D)$.

Lemme 8.2 *(dit de Yoneda contravariant) Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie, F et G deux foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles, F covariant et G contravariant. Si F est un foncteur représentable i.e $F = Hom_{\mathcal{C}}(Z, -)$, alors il existe un isomorphisme*

$$F \times_{\mathcal{C}} G \simeq G(Z). \qquad \square$$

Preuve. Il suffit de prendre

$$\begin{array}{rccc} F \times_{\mathcal{C}} G = \cup_{X \in Obj\mathcal{C}} & Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \times G(X) \ / \ \sim & \longrightarrow & G(Z) \\ & (g, x) & \longmapsto & G(g)(x) \end{array}$$

On vérifiera que cette application respecte bien la relation d'équivalence et admet pour inverse l'application

$$\begin{array}{ccc} G(Z) & \longrightarrow & F \times_{\mathcal{C}} G \\ \lambda & \longmapsto & (id_Z, \lambda) \end{array}$$

9 Homologie d'une petite catégorie

9.1 Générateurs projectifs et injectifs

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Considérons la catégorie abélienne $\mathcal{C}$-mod des foncteurs $M : \mathcal{C} \to Vect$. Soit $X \in \mathcal{C}$. On peut définir un foncteur P_X, objet de la catégorie $\mathcal{C}$-mod par:

$$P_X := \mathbb{K}[Hom_{\mathcal{C}}(X, -)].$$

où $\mathbb{K}[S]$ désigne l'espace vectoriel libre engendré par l'ensemble S.
Ainsi, pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, on a

$$P_X(C) = \mathbb{K}[Hom_{\mathcal{C}}(X, C)].$$

Pour tout $M \in \mathcal{C}$-mod, le lemme de Yoneda donne un isomorphisme naturel

$$Hom_{\mathcal{C}}(P_X, M) \cong M(X)$$

ce qui entraîne que P_X est un objet projectif de $\mathcal{C}$-mod.

Proposition 9.1 *La famille des $\{P_X, X \in \mathcal{C}\}$ est une famille de générateurs projectifs.*

On peut définir de manière similaire des objets injectifs de $\mathcal{C} - mod$:
Soit $X \in \mathcal{C}$. Posons

$$J_X := \mathbb{K}[Hom_{\mathcal{C}}(-, X)]^*.$$

On montre comme ci-dessus que J_X est un objet injectif de $\mathcal{C}$-mod.

Exemple. Considérons la petite catégorie $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. La catégorie $\mathcal{V}$-mod des foncteurs de la catégorie $\mathcal{V}$ dans la catégorie $Vect$ est aussi notée $\mathcal{F}$ (cf chapitre 1). Pour tout $V \in \mathcal{V}$

$$P_V := \mathbb{K}[Hom_{\mathcal{V}}(V, -)]$$

est un objet projectif de $\mathcal{F}$ et

$$J_V := \mathbb{K}[Hom_{\mathcal{V}}(-,V)]^*$$

est un objet injectif de $\mathcal{F}$.

9.2 Les foncteurs $Ext_{\mathcal{C}\text{-mod}}$

Si C_* est un complexe de $\mathcal{C}$-modules de la forme

$$C_* \qquad ... \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

le complexe obtenu à partir de C_* en supprimant M est noté $(C_M)_*$. Ainsi

$$(C_M)_* \qquad ... \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0.$$

Soit P une résolution projective du foncteur M objet de la catégorie $\mathcal{C}$-mod.

$$... \to P_n \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

(les P_i sont des foncteurs projectifs). Le foncteur contravariant $Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-,N)$ associe alors au complexe $(P_M)_*$ le complexe

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(P_0,N) \longrightarrow ... \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(P_n,N) \longrightarrow ....$$

C'est un complexe de chaînes dont l'homologie est notée $E_*(M,N)$:

$$E_n(M,N) = H^n(Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}((P_M)_*,N)).$$

On peut de manière similaire définir à l'aide du foncteur covariant $Hom_{C\text{-mod}}(M,-)$ et d'une résolution injective d'un objet N, un complexe

$$0 \to Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(M,I^0) \to Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(M,I^1) \to ... \to Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(M,I^n) \to ....$$

C'est un complexe dont l'homologie est notée $E^*(M,N)$. Or

$$H^n(Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(M,(I_N)^*)) = H^n(Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}((P_M)_*,N))$$

Définition 14 *La valeur commune de $E^n(M,N)$ et $E_n(M,N)$ est appelée n-ième module d'extension de N par M et est notée*

$$Ext^n_{\mathcal{C}\text{-}mod}(M,N).$$

9.3 Caractérisation des foncteurs $Ext^n_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-,N)$

Les foncteurs dérivés Ext^n sont caractéristisés par les trois propriétés suivantes:
a) le foncteur $Ext^n_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-,N)$ est exact, i.e. il transforme une suite exacte en suite exacte,
b) $\forall n > 0, \quad Ext^n_{\mathcal{C}\text{-mod}}(P,N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ est projectif,
c) $Ext^0_{\mathcal{C}-mod}(P,N) = Hom_{\mathcal{C}-mod}(P,N)$.

10 Les catégories $\mathbb{\Gamma}$ et $\mathcal{F}$

10.1 Adjonction

Proposition 10.1 (P2) *Soient $\mathcal{A}$,et $\mathcal{B}$ des catégories abéliennes avec assez d'objets projectifs et d'injectifs. Soit F un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui a un adjoint à droite $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) F est exact et préserve les objets projectifs
ii) G est exact et préserve les objets injectifs
iii) Pour tout $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{B}$ on a l'isomorphisme suivant:

$$Ext^*_{\mathcal{B}}(FA, B) \simeq Ext^*_{\mathcal{A}}(A, GB).$$

iv) F et G sont des foncteurs exacts
v) Pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ on a l'isomorphisme suivant:

$$Ext^1_{\mathcal{B}}(FA, B) \simeq Ext^1_{\mathcal{A}}(A, GB).$$

Preuve. Voir [P2].

Corollaire 3 *Soit $\mathcal{D} \xrightarrow{r} \mathcal{C}$ un foncteur entre deux petites catégories tel que le foncteur induit*

$$\mathcal{C}\text{-}mod \xrightarrow{r^\sharp} \mathcal{D}\text{-}mod$$

admette un adjoint à gauche noté L. Alors on a un isomorphisme

$$Ext^n_{\mathcal{C}\text{-}mod}(M, L(N)) \cong Ext^n_{\mathcal{D}\text{-}mod}(r^\sharp(M), N)$$

pour tout $M : \mathcal{C} \to Vect$, $N : \mathcal{D} \to Vect$.

Preuve. Pour $n = 0$, c'est simplement l'adjonction.
Soit

$$... \to P_n \to .. \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$$

une résolution projective de M dans les $\mathcal{C}$-modules (i.e $\forall c \in \mathcal{C} \quad ... \to P_n(c) \to .. \to P_1(c) \to P_0(c) \twoheadrightarrow M(c) \to 0$). A fortiori c'est une suite exacte pour $c = r(d), \quad d \in \mathcal{D}$, ce qui implique que $r^\sharp P_*$ est une résolution de M.
Or P_n projectifs entraîne que

$$\begin{array}{ccc} & & M(c) \\ & \nearrow & \downarrow \\ P_n(c) & \longrightarrow & M''(c) \end{array}$$

C'est encore le cas si on prend $c = r(d)$. On en déduit que $r^\sharp P_*$ est une résolution projective de $r^\sharp M$. On a

$$Ext^n_{\mathcal{C}\text{-mod}}(M, L(N)) = H^n(Hom_{\mathcal{C}\text{-mod}}(P_*, L(N))) = H^n(Hom_{\mathcal{D}\text{-mod}}(r^\sharp M, N)) \quad \square.$$

Corollaire 4 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux petites catégories. Soit le foncteur $r : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ayant un adjoint à gauche $l : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Pour tous foncteurs $F : \mathcal{C} \to Vect$ et $G : \mathcal{D} \to Vect$, on a l'isomorphisme suivant:*

$$Ext^*_{\mathcal{D}}\text{-}mod(F \circ r, G) \simeq Ext^*_{\mathcal{C}}\text{-}mod(F, G \circ l).$$

Corollaire 5 *Si $\mathcal{D} \overset{r}{\to} \mathcal{C}$ i.e les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont les mêmes objets et $Hom_{\mathcal{D}}(a,b) \hookrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(a,b)$. Alors l'adjoint à droite de $r^\sharp$ existe, c'est la coinduction.*

$$Coind : \mathcal{D}\text{-}mod \to \mathcal{C}\text{-}mod$$

$$Coind(M) = \underset{a \in obj(\mathcal{C})}{\oplus} Hom_{\mathcal{D}\text{-}mod}(\mathbb{K}\,[Hom_{\mathcal{C}}(a,-)], M) : \mathcal{D} \to Vect$$

pour tout $M \in \mathcal{D}$-mod.

10.2 La catégorie Γ

On note Fin la catégorie des ensembles finis, Fin_* est la catégorie des ensembles finis pointés souvent remplacée par Γ, son squelette. Les objets de Γ sont les ensembles pointés par 0 notés $[n] = \{0, 1, ..., n\}$, les morphismes sont les applications ensemblistes.
Tout foncteur de Fin_* donne un foncteur de Γ et réciproquement. En effet si F est un foncteur de Γ dans une catégorie $\mathcal{C}$, alors pour tout objet X de Fin_* de cardinalité $n+1$ on pose

$$F(X) := Iso([n], X) \times_{\Sigma_n} F([n]).$$

Il y a deux foncteurs importants de Fin_* et Fin_*^{op} :

$$\mathbb{K}[-] : Fin_* \to Vect$$

le foncteur covariant qui a tout objet $X_+ = X \cup \{+\}$ de Fin_* associe l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X] = \oplus_{x \in X} \mathbb{K}x$,

$$t : Fin_*^{op} \to Vect$$

le foncteur contravariant qui a tout objet X_+ associe l'espace vectoriel

$$t(X) := Hom(X, \mathbb{K}).$$

Remarque. Comme X est un ensemble fini, on a un isomorphisme naturel entre $\mathbb{K}[X]$ et $t(X)$. En effet, pour tout $Y = \sum_{x \in X} \lambda_x . x$ on définit l'application $\phi_Y \in Hom(X, \mathbb{K})$ par

$$\phi_Y(x) = \lambda_x$$

A tout morphisme $f :\to X_+ \to Y_+$ de Fin_*, on peut associer les deux morphismes de $Vect$ suivants:

$$f_* = \mathbb{K}[f] : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[Y]$$

et

$$f^* = t(f) : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X].$$

10.3 La catégorie $\mathcal{F}$

Cette catégorie est très liée à la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Pour tout $V \in Obj(\mathcal{V})$, on a noté $P_V = \mathbb{K}[Hom(V, -)]$ et nous avons vu que c'était un objet projectif de la catégorie $\mathcal{V}$-mod.

Définition 15 *Le dual DF d'un foncteur $F \in \mathcal{F}$ est donné par*

$$DF(V) := F(V^*)^*$$

Exemple. On a $D(S^n) = \Gamma^n$ et $D(\Lambda^n) = \Lambda^n$.

Pour tout $V \in Obj(\mathcal{V})$, on pose $J_V := \mathbb{K}[Hom(-, V)]^*$. Comme $Hom_{\mathcal{F}}(F, J_V) \cong (DF)(V)$ on en déduit que

$$J_V = DP_V.$$

On montre également les isomorphismes suivants :

$$P_{V \oplus W} \cong P_V \otimes P_W \quad \text{et} \quad J_{V \oplus W} \cong J_V \otimes J_W$$

Le morphisme fonctoriel D s'étend en un morphisme

$$D : Ext^*_{\mathcal{F}}(F, G) \to Ext^*_{\mathcal{F}}(DG, DF).$$

Lemme 10.2 *Si F et G sont à valeurs dans $\mathcal{V}$, alors D est un isomorphisme.*

Preuve. On a

$$(V^*)^* \cong V$$

car V est de dimension finie.

Exemple. (Lemme de Shapiro) $G' \rightarrowtail G$ i.e un point $Hom_{\mathcal{D}}(*, *) = G, \quad Coind(M) = Hom_{G'}(\mathbb{K}[G], M)$

$G' \overset{r}{\rightarrowtail} G$

$$G\text{-mod} \underset{Coind}{\overset{\text{Res}}{\rightleftarrows}} G'\text{-mod} \quad \text{ou} \quad Coind^G_{G'} M' = Hom_{G'}(\mathbb{K}[G], M)$$

Alors $H^n(G, Coind^G_{G'} M') \cong H^n(G', M')$ est appelé le lemme de Shapiro.

Exemple. $\Delta C \overset{F}{\to} \Delta S \overset{\mathcal{L}(A)}{\to} Vect, \quad [n] \overset{C(A)}{\mapsto} A^{\otimes n+1}$

$$HC^n(A) = Ext^n_{\Delta C(\mathbb{K}, C(A))} \cong Ext^n_{\Delta S}(-, \mathcal{L}(A))$$

11 Le lemme de Pirashvili

Lemme 11.1 *(T. Pirashvili) Soient A, F et G trois foncteurs de $\mathcal{F}$ tels que A est additif et $F(0) = 0 = G(0)$. Alors*

$$Ext^k_{\mathcal{F}}(A, F \otimes G) = 0.$$

C'est la conséquence d'une proposition un peu plus générale:

Proposition 11.2 *(T. Pirashvili) Soit L un foncteur diagonalisable i.e $L = T \circ \Delta$ pour un certain foncteur $T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ Alors*

$$Ext^*_{\mathcal{F}}(A, L) = Ext^*_{\mathcal{F}}(A, T(-,0)) \oplus Ext^*_{\mathcal{F}}(A, T(0,-)).$$

Preuve. La catégorie des bifoncteurs T vérifiant $T(X,0) = 0 = T(0,X)$ est une catégorie abélienne avec assez de projectifs et d'infectifs.
Le foncteur $T \to T \circ \Delta$ est exact et préserve les injectifs et les projectifs.
Le foncteur $\Delta : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est adjoint du foncteur $\oplus$ (Δ adjoint à gauche) (on utilise ???)

$$\begin{aligned} \Delta\left(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\right) &= \left(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1\right) \wedge \ldots \wedge \left(x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n\right) \\ &= \sum (-1)^\nu \left(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}\right) \wedge \ldots \wedge \left(x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_{n-p}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ext^k_{\mathcal{F}}(A, T \circ \Delta) &= Ext^k_{\text{bi-}\mathcal{F}}(A \circ \oplus, T) \\ &= Ext^k_{\text{bi-}\mathcal{F}}(A \circ pr_1, T) \oplus Ext^k_{\text{bi-}\mathcal{F}}(A \circ pr_2, T) \qquad \text{car } A \text{ est additif} \\ &= Ext^k_{\mathcal{F}}(A, T(X,0)) \oplus Ext^k_{\mathcal{F}}(A, T(0,X)) \qquad \text{par adjonction} \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$.

Démonstration du lemme. On a

$$F \otimes G = L = \underbrace{F \boxtimes G}_{T} \circ \Delta.$$

Or $T(X,0) = 0 = T(0,X)$ et on a $T(X,0) = F(X) \otimes G(0)$ et $F(0) \otimes G(X)$ $\square$.

Application:

Proposition 11.3 *Pour tout $0 \leq i < n$ on a*

$$Ext_* \mathcal{F}(I, S^n) \cong Ext^{*+n-1}_{\mathcal{F}}(I, \Lambda^n).$$

Démonstration. On utilise la suite exacte

$$0 \to K^i_n \to \Omega^i_n \to K^{i-1}_n \to 0$$

avec $\Omega^i_n = S^i \otimes \Lambda^{n-i}$. C'est une longue suite exacte, mais les termes du milieu $- \otimes -$ sont nuls d'où l'équivalence

$$Ext^*_{\mathcal{F}}(I, S^n) \cong Ext^{*+i}_{\mathcal{F}}(I, K^i_n) \cong Ext^{*+n-1}_{\mathcal{F}}(I, \Lambda^n) \quad \square.$$

Références

[Ca] Cartan séminaire exposé

[C-H] Cartan H.,Eilenberg S., Homological algebra. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[C] Cartier P., Une nouvelle opration sur les formes diffrentielles. C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), 426–428.

[F-L-S] Franjou V., Lannes J., Schwartz L., Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. Invent. Math. 115 (1994), no. 3, 513–538.

[McL] Mac Lane S., Homology, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114 Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Gttingen-Heidelberg 1963.

[L] Loday J.-L., Cyclic homology. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 301. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1998.

[P1] Pirashvili T., Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin). Sminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000. Astrisque No. 276 (2002), 369–388.

[P2] Pirashvili T., this volume.

[R] Roby N., Les algèbres puissances divisées. Bull. Sci. Math. (2) 89 1965 75–91.