Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. - S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 1

(Rappels sur l'intégration)

Exercice 1 :

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné. f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$.

1) Montrer que si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2) Montrer que si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3) Montrer que $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2+1}dx, \quad \int_0^\pi \cos x e^{2x}dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$$

Exercice 3 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Etablir une relation de récurence entre I_{n+1} et I_n.

c) Déduire l'expresion de I_n en fonction de n.

d) Démonter que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que I_n est équivalent à $\frac{e}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4: (Intégrales de Wallis)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Trouver une formule de réccurence entre I_n et I_{n-2}, puis déterminer, pour $p \geq 0$, les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1}.

c) Monter que $\lim_n \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire la formule de $\underline{Wallis}$:

$$\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times ... \times \frac{2p}{2p-1} \sim \sqrt{(2p+1)\frac{\pi}{2}} \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty,$$

puis que l'on a $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.