Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. - S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 2

(Intégrales généralisées)

Exercice 1 :

Montrer les égalités suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = 2,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = \ln 2, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \pi.$$

Exercice 2 :

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$.

1) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$, puis $I = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$.

2) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx$.

3) Déduire des questions précédentes que $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 3 :

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}, \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx.$$

Montrer que I et J sont convergentes et calculer leur valeurs. (Indication, pour I poser $x = 2\tan(t)$ et pour J poser $t = x^2$ et remarquer que $\big(\ln(\frac{u}{1+u})\big)' = \frac{1}{u(u+1)}$).

Exercice 4 :

1) Etudier, suivant la valeur du réel α, la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$.

2) Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 5 :

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$. Calculer $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_{-t}^{t} \frac{x+1}{x^2+1}dx$. Conclure.

Exercice 6 :

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx, \quad I_4 = \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx,$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx, \; I_6 = \int_0^1 \frac{\ln x\ln(1-x)}{x}dx, \quad I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{(1+x^4)^2}dx, \; I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}},$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}, \;, \; I_{10} = \int_0^{+\pi} \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Exercice 7 : (Intégrales de Bertrand en $+\infty$)

On s'intéresse ici à la convergence de l'integrale $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ avec $\alpha > 0$.

1) Montrer que si $0 < \alpha < 1$, $I_{\alpha,\beta}$ diverge.

2) Montrer que si $\alpha > 1$, $I_{\alpha,\beta}$ converge.

3) Pour la suite on suppose $\alpha = 1$. Etudier la nature de $I_{\alpha,\beta}$ (on pourra distinguer les cas $\beta < 1$, $\beta = 1$ et $\beta > 1$).

Application : Etudier la nature de l'integrale suivant $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

Exercice 8 : (La fonction Gamma)

1) Montrer que l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n dx$.

4) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^x} dt = \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

5) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis montrer que l'on a :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(Indication : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{u^2} du = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 9 :

Soient$\alpha \in \mathbb{R}$, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ et $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

1) Montrer que I_α est convergente si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

2) Montrer que J_α est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2$. Que peut-on dire de l'absolue convergence de J_α dans ce cas ?

3) Montrer que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) dt$ est convergente.

4) Etudier la convergence de $L_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx$ (lorsque $\alpha \neq 0$, on pourra poser $y = x^\alpha$).