Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 3

(séries numériques)

Exercice 1 :

Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) = \ln 2$.

Exercice 2 :

1) Soit $(u)_n$ une suite de termes positifs. Comparer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$.

2) Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ deux séries positives convergentes. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ est aussi convergente.

Exercice 3

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série à termes positifs qui supposée convergente.

1) Établir simplement que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$.

2) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{u_p}$. Montrer que $S_n \leq M\sqrt{n}$, où M est une constante à déterminer. (Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schartz $\displaystyle\sum_{1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$).

Exercice 4 :

Établir la divergence des séries dont les termes généraux sont définis ci-dessous :

$$n!,\quad nLog(1+\frac{1}{n})\ \ (n \geq 1),\quad (-1)^n,\ shn,\ \max(2, \text{sin n}),\ \sin n.$$

Exercice 5 :

Étudier la convergence des séries qui ont pour termes généraux :

$$\tfrac{n+1}{3^n},\quad \tfrac{\sqrt{n^n}}{2^n},\quad \tfrac{n!}{n^2},\quad \tfrac{1}{(\ln n)^n},\quad \tfrac{e^{\sqrt{n}}}{2^n},\quad \left(\tfrac{2n^2}{n^2+1}\right)^n,\quad \tfrac{\sin^2 n}{n^4},\quad \tfrac{\sqrt{n}}{n^2+1},$$

$$\tfrac{n}{\sqrt{n^3+1}},\quad \tfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\tfrac{1}{n}),\quad \tfrac{2n}{n+2^n},\quad \tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\ (\alpha > 0),\quad \tfrac{\ln n}{n},\quad \tfrac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 6 :

Déterminer la nature (convergence absolue, semi-convergence ou divergence) des séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{(-1)^n}{\ln n},\quad \frac{\sin n}{n^2},\quad \frac{(-1)^n}{1+\cos n},\quad \frac{(-1)^n n}{2n^2-1},\quad \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 7 :

Pour $n \geq 1$, on note $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

1) En écrivant $\ln n$ à l'aide d'une intégrale, montrer que (u_n) est une suite décroissante de nombres positifs. En déduire qu'elle possède une limite C, puis que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln n \text{ quand } n \to +\infty.$$

(C s'appelle la constante d'Euler; on a $C = 0,577215664901532...$)

2) Soient $s_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sigma_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$.

a) Montrer que $s_{2p} = \sigma_{2p} - \sigma_p$.

b) En utilisant la question 1), montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.