Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 3 bis

(séries numériques)

Exercice :

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice carrée réelles d'ordre n. On munit cet ensemble de la norme matricielle $\|.\|_1$, donnée par $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$; $[A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}]$.

1) Montrer que pour toute matrice carrée A d'ordre n, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$ converge. On note par

$$exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ...$$

sa somme et on l'appelle l'exponentielle de la matrice A.

2) Montrer que pour toutes matrices A et B qui commutent, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Indication : Montrer que $C_m(A,B) = \sum\limits_{k=0}^{2m}\frac{(A+B)^k}{k!} - \left(\sum\limits_{i=0}^{m}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{B^j}{j!}\right)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.

3) Montrer que si A est inversible, alors $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

4) Montrer que si $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, alors $e^A = diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n})$.

Application :

Soit A une matrice d'ordre trois définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer e^A. Utiliser la décomposition $D + N$ où

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$