Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 4

(suites et séries de fonctions)

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad I = \mathbb{R},$$

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \qquad I = \mathbb{R},$$

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} \qquad I = [0, 1],$$

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}}}{1 + nx} \ (k \in \mathbb{N}) \qquad I =]0, +\infty[,$$

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \ (\alpha \geq 0) \quad I = \mathbb{R}^+$$

Exercice 2 :

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynôme définie par

$$P_0 = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right).$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

2) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $P_n(x)$ tend vers une limite finie $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Calculer $f(x)$.

3) Montrer par récurrence sur n que

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

En dédure que $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 3 :

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow f_n(x) = n\,(\cos x)^n \sin x.$$

2) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Calculer

$$I = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)dx.$$

Exercice 4 :

Déterminer le domaine D de convergence simple des séries de fonctions $\sum u_n(x)$ suivantes et préciser si la convergence est normale sur D, uniforme sur D :

$$(1)\ f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \qquad (2)\ f_n = \frac{(-1)^n}{n+x^2}, \qquad (3)\ f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Exercice 5 :

On considère pour $n \geq 2$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par l'égalité

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}.$$

Étudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$, sa convergence normale sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, et sa convergence uniforme.

Exercice 6 :

Soit a un nombre réel strictement positif.

1) Montrer que la série de fonctions de terme général

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \\ u_n = (-1)^n e^{-na} \cos nx \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

est uniformément convergente sur $[0, \pi]$. Déterminer sa somme $S(x)$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nx}{\cos x + ch(a)} dx$.

Exercice 7 :

Pour $n \geq 1$, soit $f_n :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n}$.

1) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente sur $]-1, 1[$. On note $f(x)$ sa somme.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$, calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f(x) = \arctan \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}.$$

3) Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$