Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques - Exercices supplémentaires

(suites et séries de fonctions)

Exercice 1 :

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f. Soit $x \in I$. On suppose que f est continue en x. Montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de I vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$.

Exercice 2 :

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(x) = Arctan(nx) \qquad I = \mathbb{R},\ ]0, +\infty[, [a, +\infty[, (a > 0),$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|} \qquad I = \mathbb{R}, [a, +\infty[, (a > 0),$$

$$f_n(x) = \sin x \, (\cos x)^n \qquad I = [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1 - x^2} \qquad I = [-1, 1], [0, 1], [a, 1], (0 < a < 1),$$

$$f_n(x) = nxe^{-nx} + \sin x \qquad I = \mathbb{R}^+, [a, +\infty[, (a > 0).$$

Exercice 3 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n = xe^{-nx^2}$. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(f'_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 4 :

On considère la suite de fonctions f_n: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + n^2}}.$$

1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que (f_n) converge uniformement vers f sur tout intervalle du type $[x_0, 1]$ où $0 < x_0 < 1$. Qu'en est-il sur $[0, 1]$?

Exercice 5 :

Soit α un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} nx^{\alpha}e^{-nx^2}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour quelles valeurs de α la série est-elle normalement convergente $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Déterminer la somme de la série.

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Commentaire?

Exercice 7 :

1) Montrer que l'égalité $u(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$ définit une application u continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Démontrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

3) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$.

Exercice 8 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{Arctan(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.