Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. S4

Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 5

(séries entières)

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\pi^n} z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\pi^n} z^{2n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{2n}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} n^{\ln n} z^n,$$

Exercice 2 :

Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence R, ainsi que le comportement sur le cercle $\{\ z;\ |z| = R\}$ lorsque R est > 0 et fini.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1},\ \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^{\frac{n}{2}} z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} (1+5^n) z^n.$$

Exercice 3 :

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

2) Étudier le comportement de $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n$ sur le cercle $\{\ z;\ |z| = R\}$.

3) Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in]-1, 1[,\ x f'_\alpha(x) = f_{\alpha+1}(x)$.

b) Calculer f_0, f_1,f_2 puis f_{-1}.

4) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch} n}{n} z^n$ et calculer $g(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 4 :

On considère la série entière réelle $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n}{(2n+1)!}$. Détérminer son rayon de convergence et calculer sa somme pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et on considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

2) Calculer sa somme pour $x \in]-1, 1[$.

Exercice 6 :

1) Montrer que la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

2) On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 1.$$

Exercice 7 :

Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}; \qquad f_2(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}; \qquad f_3(x) = \frac{x^2}{(x-1)(2-x)^2};$$

$$f_4(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dx; \qquad f_5(x) = \arctan x; \qquad f_6(x) = \frac{1-x}{x-1};$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(1+x)^3}; \qquad f_8(x) = \ln(1 - x\sqrt{2} + x^2) \qquad .$$

(Déterminer leur développement, ainsi que le rayon de convergence correspondant).

Exercice 8 :

Soit f la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n x^n.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f; (Utiliser la formule de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$).

2) Trouver une relation de réccurence vérifiée par les coefficients $\alpha_n = C_{2n}^n$.

3) En déduire que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.