Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. - S4

Année universitaire 2005-2006

**TD de Mathématiques N0 6**

(séries de Fourier)

**Exercice 1 :**

Soit $f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de période 1, telle que $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi[$.

1) Représenter graphiquement la fonction $f$.

2) Calculer les coeficients de Fourier réels de $f$.

3) Écrire la série de Fourier de $f$ et déterminer sa somme pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

4) En utilisant la formule de Parseval, montrer que l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, puis calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

**Exercice 2 :**

Soit $f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique et <u>impaire</u>, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ \\ 0 \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement la fonction $f$.

2) Que peut-on dire des coefficients de Fourier $a_n(f)$? Calculer les coeficients de Fourier $b_n(f)$.

3) Écrire la série de Fourier de $f$ et déterminer sa somme pour $x \in \mathbb{R}$.

4) Calculer les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5) Pour quelle valeurs de $x$ peut-on dériver terme à terme la série de Fourier de $f$? Quelle relation obtient-on pour $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

**Exercice 3:**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f$ de période $2\pi$ telle que $f(x) = ch\alpha x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier en notation complexe de $f$ et calculer la somme

de la série de Fourier pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

**Exercice 4 :**

Soit $f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f$ définie par : $f(x) = |\cos x|$.

1) Montrer que la fonction $f$ est périodique de période $\pi$.

2) Représenter graphiquement la fonction $f$.

3) Calculer les coeficients de Fourier de $f$.

4) Écrire la série de Fourier de $f$ et déterminer sa somme pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire la valeur de chacune des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)}.$$

4) Pour quelle valeurs de $x$ peut-on dériver terme à terme la série de Fourier de $f$? Quelle relation obtient-on pour $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

**Exercice 1 :**

Soit $f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique et paire, définie par

$$f(x) = \pi - x \text{ si } x \in [0, \pi].$$

1) Représenter graphiquement la fonction $f$.

2) Calculer les coeficients de Fourier réels de $f$.

3) Écrire la série de Fourier de $f$ et déterminer sa somme pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4) En utilisant la formule de Parseval, montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, puis calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$