Université de Haute Alsace
FST- L2 Math. - S4
Année universitaire 2005-2006

TD de Mathématiques N0 7

(Intégrales généralisés dépendant d'un paramètre)

Première partie :

1) Soit α un nombre réel, $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et telle que $x \to e^{\alpha x} f(x)$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que

$$\int_0^n \left(1 + \frac{\alpha x}{n}\right) f(x)dx \to \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} f(x)dx. \tag{1}$$

2) En déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt. \tag{2}$$

(*Rappel :* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$)

Deuxième partie :

Soit l'intégrale impropre suivante : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$

1) Vérifier que $B(x, y) = B(y, x)$.

2) Montrer que l'intégrale $B(x, y)$ a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3) Calculer $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (*Indication : utiliser le changement de variable* $t = \sin^2 x$).

4) Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

5) Montrer que pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$B(x, n+1) = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}. \tag{3}$$

6) Montrer que pour $x > 0$, $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$B(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)...(x+y+n)}{x(x+1)...(x+n)} B(x+n+1, y). \tag{4}$$

Troisième partie :

Dans cette partie x et y désigneront des réels strictement positifs.

1) Montrer en utilisant (2) et (3) que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}. \tag{5}$$

(Dans (2) on pourra poser $t = nu$).

2) Montrer que $B(x+n+1, y) \sim \frac{\Gamma(y)}{n^y}$ quand $n \to +\infty$ et en déduire que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{6}$$