FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 1 (septembre 2006)

Exercice 1. Soit N_1 et N_2 des normes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, $N_4 = |N_1| + |N_2|$ et $N_5 = \left(N_1^2 + N_2^2\right)^{1/2}$ définissent encore des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 5y^2}$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $N(x, y) = \int_0^1 \left|x + yt\sqrt{2}\right| dt$. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit X un ensemble non vide. Si $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note par $B(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$. On définit alors pour tout $f \in B(X, \mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $B(X, \mathbb{K})$. Elle est appelée norme de la convergence uniforme.

Exercice 5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit pour tout $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad , \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Montrer $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ déterminent des normes sur E.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On définit pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Montrer que $\|.\|_\infty$ détermine une norme sur E.

Exercice 7. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $p \in [1, \infty[$ et E_p l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telles que la suite réelle $n \to \sum\limits_{i=0}^{n} \|u_i\|^p$ converge . On définit pour tout $u \in E_p$,

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \|u_i\|^p\right)^{1/p}$$

(où $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|u_i\|^p$ désigne la limite de $n \to \sum\limits_{i=0}^{n} \|u_i\|^p$). Montrer que $\|.\|_p$ détermine une norme sur E_p.