FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 2 (septembre 2006)

Exercice 1. Soit d la distance sur $\mathbb{R}$ associée à la norme $|.|$. On pose pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ et $\varepsilon(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$.

1. Montrer que δ et ε sont des distances sur $\mathbb{R}$.
2. Proviennent-elles de normes de $\mathbb{R}$?

Plus généralemt soit (E,d) un espace métrique; on pose pour tout couple $(x,y) \in E^2$ $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ et $\varepsilon(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$.

1. Montrer que δ et ε sont des distances sur E.
2. Montrer que les distances d, δ et ε définissent les mêmes ouverts.
3. Montrer que si la distance d est n'est pas bornée, les distances d et δ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. Soient a et b des éléments de $\mathbb{R}^2$, r et s des réels > 0.

1. Montrer que $\|a-b\| \leq r-s \Leftrightarrow B(b,s) \subset B(a,r)$.
2. Montrer que $\|a-b\| \geq r+s \Leftrightarrow B(b,s) \cap B(a,r) = \emptyset$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$,$r, s > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que l'on a pour toute norme sur $\mathbb{R}^2$:

1. $a + B(b,r) = B(a+b,r)$.
2. $B(b,s) = B(a,r) \Leftrightarrow a = b$ et $r = s$
3. $\lambda B(a,r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$.

Exercice 4. Montrer que deux normes équivalentes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E ont les mêmes ouvert, mêmes fermés, mêmes voisinages et mêmes parties bornées. Montrer qu'une suite converge pour l'une ssi elle converge pour l'autre norme.

Exercice 5. Montrer que le cercle unité de $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$ est un fermé. Idem pour la boule unité fermée. Montrer que la boule unité ouverte est un ouvert. Peut-on généraliser aux boules et sphères d'un evn quelconque.

Exercice 6. Parmi les intervalles de $\mathbb{R}$ dire lesquels sont des ouverts, des fermés de l'e.v.n. $(\mathbb{R}, |.|)$.

Exercice 7. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes, fermées, ni ouvertes ni fermées de $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$? $A =]-3,5] \times [1,4]$, $B = [-1,3] \times [2,6]$ et $C =]1,4[\times]-2,7[$.

Exercice 8. Montrer que l'ensemble $\{(\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$ n'est ni fermé, ni ouvert. dans $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$.

Exercice 9.

1. Montrer que les ensembles $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 2\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 2\}$ sont fermés dans $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$.

2. Montrer que l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x^2+y^2+1}\}$ est ouvert.

Exercice 10. Montrer que les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont fermées: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\sin(x)\}$, $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq |\sin(x)|\}$ et $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq|\sin(x)|\}$.

Exercice 11. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes, fermées, ni ouvertes ni fermées ? $A=]-3,5]\times[1,4]$, $B=[-1,3]\times[2,6]$, et $C=]1,4[\times]-2,7[$.

Exercice 12. Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles ouvertes, fermées, ni ouvertes ni fermées ?
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]2n,2n+1[$, $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n,2n+1]$, $\{\frac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\{\frac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}^*\}\bigcup\{0\}$.

Exercice 13. Soit O un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) tel que $0_E\in O$ et pour tout $x\in O$ et tout $t\geq 0$ on a $tx\in O$. Montrer que $O=E$.

Exercice 5. On considère les normes de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, données par:

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt,\quad \|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\qquad\text{et}\qquad \|f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

Montrer que ces 3 normes sont 2 à 2 non équivalentes.

Exercice 15.

1. La partie $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ est-elle fermée dans $(\mathbb{R},|.|)$? ouverte?

2. La partie $B=\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\left]\frac{n}{n+1},+\infty\right[$ est elle fermée dans $(\mathbb{R},|.|)$?

3. La partie $C=\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\left]\exp\frac{1}{n+1},+\infty\right[$ est-elle ouverte dans $(\mathbb{R},|.|)$?

4. Soient $P=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<\sin x\right\}$, $Q=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq\sin y\right\}$. Pour chacune de ces parties dire si elle est fermée de $\mathbb{R}^2$? ouverte?

5. En déduire que $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<\sin x \text{ et } x>\sin y\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

6. Montrer que $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq\sin x \text{ et } x\leq\sin y\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Etudier la convergence éventuelle pour chacune des suites (u_n) et (v_n)de $\mathbb{R}^2$ définies par: $u_n=\left(1+\frac{1}{2^n},\frac{6n-3}{2n+1}\right)$ et $v_n=(\sin n, 1+(-1)^n)$.

Exercice 17. Soit $N:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par $N(x,y)=|x|+3|y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que N est équivalente à la norme $\|.\|_1$.