FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 3 (Octobre 2006)

Exercice 1. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Décrire les boules ouvertes suivantes (pour cette distance): $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ et $B(5,2)$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$; décrire en discutant suivant les valeurs de $r > 0$ la boule ouverte $B(a,r)$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, d)$. En déduire tous les ouverts de $(\mathbb{R}, d)$?

Exercice 2.

1. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que pour tout élément a de X et tout réel $r > 0$ les diamètres de la boule ouverte $B(a,r)$, de la boule fermée $Bf(a,r)$ et de la sphère $\mathcal{S}(a,r)$ sont inférieurs ou égaux à $2r$.
2. On considère l'espace métrique $E =]-\infty, 0]$ muni de la distance usuelle. Déterminer le diamètre des parties suivantes de E: $B(0,1)$, $\mathcal{S}(0,1)$, $Bf(0,1)$, $B(-1,2)$, $\mathcal{S}(-1,2)$ et $B(-1,1)$.
3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout élément a de E et tout réel $r > 0$, $diam(B(a,r)) = diam(Bf(a,r)) = diam(\mathcal{S}(a,r)) = 2r$.

Exercice 3. Pour chaque partie A de l'espace métrique spécifié X, donner l'adhérence, l'intérieur, la frontière et l'ensemble dérivé des points d'accumulation de A lorsque,

1. $X = \mathbb{R}$ muni de $|.|$, et A l'une des parties: $]1,2] \cup \{3\}$, $]1,2] \cup]2,3[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. X est le sous espace métrique $[0,1] \cup \{2\} \cup]3,4[$ de $(\mathbb{R}, |.|)$ et A l'une des parties: $\{2\}$, $[0,1] \cup \{2\}$, $]0,1[$, $]0,1]$, $\{0,1,2\}$, $\{2\} \cup]3,4[$.
3. $X = \mathbb{R}^2$ muni d'une norme usuelle et A l'une des parties: $[0,1] \times]0,1[$, $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < x\right\}$, $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < x\right\} \cup \{(0,1)\}$.

Exercice 4. Montrer que toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation.

Exercice 5. Soit A une partie d'un espace métrique (X,d). Montrer que l'ensemble dérivé A'de A des points d'accumulation de A vérifie: $A' \subset \overline{A}$, A' est un fermé et $\overline{A} = A \cup A'$. Montrer que $\overline{A}$ est réunion de A' et de l'ensemble des points isolés de A.

Exercice 6. Donner un exemple d'une partie A de l'evn $(\mathbb{R}, |.|)$ vérifiant:

1. $A \cap A' = \emptyset$.
2. $A \subset A'$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq A'$.
3. $A' \subset A$, $A' \neq \emptyset$ et $A \neq A'$.
4. $A' = A$.