FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 4 (Octobre 2006)

Exercice 1.

1. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. Montrer les inclusions suivantes concernant les boules:

$$\overline{B(a,r)} \subset Bf(a,r) = \overline{Bf(a,r)} \qquad \text{et} \qquad (B(a,r))^o = B(a,r) \subset (Bf(a,r))^o$$

2. Donner des exemples pour montrer que ces deux inclusions ne sont pas des égalités.

3. Montrer que dans un espace vectoriel normé, on a égalités (au lieu de ces inclusions) et

$$Fr(B(a,r)) = Fr(Bf(a,r)) = S(a,r)$$

Exercice 2. Soient(X, d) un espace métrique et A; B deux parties de X. Montrer que:

1. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
4. $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$,
5. $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$,
6. $(A \cup B)^o \supset A^o \cup B^o$.

Exercice 3. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et $a \in X$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. a est un point d'accumulation de A.
2. Il existe une suite à valeurs dans $A \setminus \{a\}$, qui converge vers a.
3. Il existe une suite injective de A qui converge vers a.
4. Tout voisinage de a contient une infinité d'éléments de A.

Exercice 4. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Montrer que $A \cup \complement_X \left(\overline{A}\right)$ est dense dans X.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si A et B sont deux parties denses dans X alors: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A^o = B^o = \emptyset$.

Exercice 6. Soient (X, d) un espace métrique, A et B deux parties de X. Montrer que si A est ouvert de X, A et B denses dans X, alors $A \cap B$ est dense dans X.

Exercice 7. Soient (X, d) un espace métrique, A et B deux parties de X. Montrer que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, alors $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.