FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 5 (Octobre 2006)

Exercice 1. Soient E un e.v.n., $a \in E$. Montrer que les applications

$$\begin{array}{c} E \times E \to E \\ (x,y) \to x+y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} E \to E \\ x \to a+x \end{array}$$

sont uniformément continues.

Exercice 2. Dire si les fonctions suivantes définies sur R^2 sont continues en $(0,0)$:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases}, \; f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases},$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases}, \; f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases},$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2} : si : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases}.$$

Exercice 3. L'application $f : R^2 \to R^2$ définie par $f(0,0) = (0,0)$ et $f(x,y) = (\frac{x^3y}{x^4+y^2}, \frac{x^2y^2}{x^2+y^2})$ si $(x,y) \neq (0,0)$ est-elle continue?

Exercice 4. Soient $p, q \in N^*$ et $f : R^2 - \{(0,0)\} \to R$ définie par $f(x,y) = \frac{x^py^q}{x^2+y^2}$. Pour quelles valeurs de p, q la fonction est-elle prolongeable au point $(0,0)$ en une fonction continue?

Exercice 5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin^2 x}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de α, l'application f est-elle continue?

Dire si la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \exp y - \sin x + \frac{y^2 \sin^2 x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases}$$

est continue au point $(0,0)$.

Exercice 6. Soit la fonction $f :]-1,1[^2 \to R$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} : si : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si \; x=y=0 \end{cases}$.
Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles f est continue en $(0,0)$.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$, muni de la norme définie par $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que φ est continue.
2. Soit $f \in E$. Montrer que l'application $\alpha : E \to \mathbb{R}$ définie par $\alpha(h) = \int_0^1 h(t)f(t)dt$ est continue.
3. Montrer que la fonction $\psi : E \to R$ définie par $\psi(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$ est continue.
4. Montrer que $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2}$ et $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$ pour tout réel x. En déduire que l'application $\xi : E \to R$ définie par $\xi(f) = \int_0^1 \sin f(t)dt$ est continue.

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in N} \|u_n\|$.

1. Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(u)_n = u_{n+1}$. Montrer que φ est continue.
2. Montrer que l'application $\vartheta : E \to E$ définie par $\vartheta(u)_n = \sin(u_n)$ est continue.
3. En déduire que l'application $\eta : E \to E$ définie par $\eta(u)_n = \sin(u_n u_{n+1})$ est continue.