FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 6 (Novembre 2006)

Exercice 1. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité fermée de $(E, \|.\|_E)$. Monter que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$.

Exercice 2. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : X \to Y$ est dite k-lipschitzienne ssi

$$\forall (x, x') \in X^2, \qquad \delta(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')$$

1. Montrer que toute application lipschitzienne est uniformément continue.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sqrt{x} \end{array}$$
est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne.
3. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 \end{array}$$
est uniformément continue.

Exercice 3. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur I de dérivée bornée. Montrer que φ est uniformément continue.

Exercice 4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to & \frac{1}{2}(\cos y, \sin x) \end{array}$$

est uniformément continue.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que la distance $d : X^2 \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 6. Soient (X, d) un espace métrique et (u_n) une suite telle que pour tout n, $d(u_n, u_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Montrer que la suite est de Cauchy.

Exercice 7. On considère la suite réelle $n \to U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout entier m,

$$U_{2^{m+1}} - U_{2^m} \geq \frac{1}{2}$$

Montrer que (U_n) n'est pas de Cauchy. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = +\infty$.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que:

1. Toute suite de Cauchy de X est bornée.
2. Toute suite de Cauchy de X possédant une valheur d'adhérence $a \in X$ (i.e. ayant une suite extraite qui converge vers a) converge vers a.
3. Si (Y, δ) est un espace métrique, $f : X \to Y$ lipschitzienne et (x_n) une suite de Cauchy de X, alors la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y.
4. Toute partie A, de X, complète est un fermé de X.
5. Si (X, d) est complet alors une partie A de X est complète ssi elle est fermée.

Exercice 9. Montrer que la suite $n \to x_n = 2^{-n}$ est de Cauchy dans l'espace métrique $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Montrer que la suite $n \to 2^n$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Est-il vrai que l'image d'une suite de Cauchy par une application continue est de Cauchy? Et par un homéomorphisme?

Exercice 10. Dire si les 2 espaces métriques $\mathbb{R}$ et $]0, \infty[$ sont complets. Est-il vrai que tout espace métrique homéomorphe à un espace métrique complet est complet?

Exercice 11. Dire si les parties suivantes sont complètes:

1. Dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$, $[0, 1]$, $[0, \infty[$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}^2$, le graphe de la fonction $x \to 1/x$.

Exercice 12. Montrer le théorème du point fixe:

Théorème. *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application. Si X est complet et f est contractante (i.e. k-lipschitzienne avec $0 \le k < 1$), alors f admet un point fixe et un seul, et pour tout $a \in X$, la suite (x_n) définie par* $\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ *converge vers le point fixe de f.*

Indication. On prendra une suite (x_n) définie comme ci-dessus et on montrera qu'elle est de Cauchy.

Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to & \frac{1}{2}(\cos y, \sin x) \end{array}$$

admet un unique point fixe.