FST Mulhouse
Licence 2 Math3.3

TD 7 (Novembre 2006)

Exercice 1.

1. La suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{x-1}{1-n} & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$.

2. La suite de fonctions (g_n) définie sur $[0,1]$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{si } x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? sur $]0,1]$? sur $]a,1]$ avec $0 < a < 1$?

3. La suite de fonctions (h_n) définie sur $[0,1]$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - nx + n/2 & \text{si } x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? sur $]1/2,1]$? sur $]a,1]$ avec $1/2 < a < 1$?

Exercice 2. Calculer la limite éventuelle: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi/5} \tan^n(x)\, dx$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions (f_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{l}]0, \infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{nx+1} \end{array}$$

1. Comparer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) \right)$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,\infty[$? et sur $[a,\infty[$, avec $a > 0$?

Exercice 4.

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = nx^n(1-x)$$

converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle. Montrer que la suite $n \to \int_0^1 f_n(x)\, dx$ converge vers 0.

2. Montrer que la suite de fonctions (g_n) définie sur $[0,1]$ par

$$g_n(x) = n^2 x^n (1-x)$$

converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle. Montrer que la suite

$$n \to \int_0^1 g_n(x)\, dx$$

converge vers 1.

3. Conclure.

Exercice 5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère la suite de fonctions définies sur $I = [0,1]$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x) \text{ pour } n \geq 1$$

1. Déterminer la limite simple , si elle existe, de cette suite. On la notera f.
2. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme sur I?
3. Soit a réel tel que $0 < a < 1$. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme sur $[0,a]$?
4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ et $\int_0^1 f(x)\, dx$. Pour quelles valeurs de α, peut-on appliquer le théorème d'intégration de la limite?

Exercice 6. Monter que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,\pi/2]$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

converge uniformément vers une fonction dérivable $\varphi : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$. A-t-on convergence simple de la suite (f_n') vers φ'? Conclure.

Exercice 7. Soit $\alpha \geq 1$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = n^\alpha x \left(1 - x^2\right)^n$$

converge simplement vers une fonction continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$. La suite $n \to \int_0^1 f_n(x)\, dx$ converge-t-elle vers $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$? Conclure.

Exercice 8. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

converge uniformément vers une fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas dérivable sur $[-1,1]$ bien que chaque f_n soit de classe C^1 (ind.: $\sqrt{a+b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$). Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1/n}dx$.

Exercice 9. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & \text{si } x \in [0,1/n] \\ (-1)^{n+1} n^3 \left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & \text{si } x \in [2/n, 1] \end{cases}$$

converge simplement et non uniformément vers la fonction nulle et que la suite $n \to \int_0^1 f_n(x)\, dx$ diverge.