FST Mulhouse
Licence 2/ Math.

Partiel de Math3.3 (espaces métriques)
du 26 octobre 2006- 2 heures

Questions de cours.

1. Rappeler la définition de 2 normes équivalentes sur un espace vectoriel E.
2. Donner une condition suffisante (en termes de suites) pour que 2 normes N_1 et N_2 sur E ne soient pas équivalentes.
3. Donner la définition d'un ouvert d'un espace métrique (X, d).
4. Donner une condition nécessaire et suffisante en termes de suites pour qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) soit fermée.
5. Donner la définition d'un point d'accumulation d'une partie A d'un espace métrique (X, d).

Exercice 1.

1. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\exp(t)-1}{t}$ (sans démonstration).
2. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(xy)-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$
est elle continue en $(0, 0)$?
3. L'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$
est elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 2. Etudier la convergence éventuelle pour chacune des suites (u_n) et (v_n)de $\mathbb{R}^2$ définies par: $u_n = \left(\frac{1}{n}\cos n, \cos\frac{\pi}{n}\right)$ et $v_n = (\cos n, \cos(n\pi))$.

Exercice 3. On considère, dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |.|)$, la partie $A = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}$. Déterminer

1. A° l'intérieur de A.
2. $\overline{A}$ l'adhérence de A.
3. A' l'ensemble des points d'accumulation de A.
4. L'ensemble des points isolés de A.

Exercice 4. On considère, dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$, la partie
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| < 1 + x^2\right\}$$

1. Est-elle un ouvert de $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$?
2. Est-elle un fermé de $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$?