Université de Haute Alsace, Faculté des Sciences et Techniques
L2 Math

Examen final de Math3.3 (Espaces métriques)
20/12/2006 — Durée 3 heures

Questions de cours (*3 points*). 1. Soit (E, d) un espace métrique. Soient $A \subset E$ et $a \in E$.

- Donner les caractérisations en termes de suites, des notions suivantes
$$a \in \overline{A} \iff \cdots, \qquad A \text{ est fermé} \iff \cdots$$
- Compléter les définitions suivantes
$$A \text{ est complet} \iff \cdots, \qquad A \text{ est compact} \iff \cdots$$

2. Soit $f_n : X \to E$ une suite d'applications définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique E. Soit $f : X \to E$ une application. Donner les définitions des notions suivantes

- La suite f_n converge simplement vers $f \iff \cdots$
- La suite f_n converge uniformément vers $f \iff \cdots$

Exercice 1 (*2 points*). Soient E et F des espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction continue. Montrer que l'image $f(A)$ d'une partie compacte A de l'espace métrique E est une partie compacte de l'espace métrique F. Donner un exemple montrant que l'image réciproque d'un compact n'est pas compacte.

Exercice 2 (*3 points*). Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
sont des normes sur E. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes. Que pouvez-vous en déduire sur la dimension de E ?

Exercice 3 (*4 points*). On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} f_n$. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2]$ et qu'elle est uniforme sur les parties $[0, a]$ et $[b, 2]$ avec $0 < a < 1 < b < 2$.
Soit $\varepsilon > 0$ et soient a et b tels que $0 < a < 1 < b < 2$ et $b - a < \varepsilon/4$. Montrer que
$$\left| \int_0^2 f_n(x)dx - 1 \right| \le \int_0^a |f_n(x)|dx + \int_b^2 |f_n(x) - 1|dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$
En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = 1.$$

Exercice 4 (*2 points*). Montrer que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5 (*3 points*). Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles fermées ? bornées ? complètes ? compactes ? (*il n'est pas nécessaire de répondre dans cet ordre et il faut justifier la réponse*)
$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}, \qquad [0, 1[, \qquad [0, 1].$$

Exercice 6 (*3 points*). Soit (E, d) un espace métrique. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Montrer que la suite x_n est bornée, c'est dire qu'il existe $y \in E$ et $r > 0$ tels que $x_n \in B(y, r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.